مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۴، ص ۵۰۶-۵۱۴

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2022.42005.2100

# جبر باناخ $U(X)$ بر فضای صفر-بعدی $X$

علیرضا الفتی ×

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۷/۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۲

چکیده: در این پژوهش، برای فضای صفر-بعدی $X$ زیرجبر باناخ $U(X)$ از $C^*(X,\mathbb{C})$ معرفی شده است. نشان داده شده است که $U(X)$ بستار یکنواخت زیرجبرهای $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C_c^*(X,\mathbb{C})$ در جبر باناخ $C^*(X,\mathbb{C})$ است. همچنین شرط لازم و کافی برای انطباق $U(X)$ و $C^*(X,\mathbb{C})$ داده شده است. نشان داده شده است که توابع $U(X)$ دقیقاً توابعی در $C^*(X,\mathbb{C})$ اند که دارای توسیعی به $\beta_\circ X$ اند. با استفاده از این نکته یک یکریختی جبری طول‌پا از $U(X)$ به $C^*(\beta_\circ X,\mathbb{C})$ معرفی شده است. در انتها توصیفی از اعضای $U(X)$ بر حسب نگاره وارون مجموعه‌های بسته در $\mathbb{C}$ ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: فضای صفر-بعدی، فضای قویاً صفر-بعدی، فشرده‌ساخت باناشوسکی، همگرایی یکنواخت، بستار یکنواخت.

رده‌بندی ریاضی: 54C40; 46J10

## ۱ مقدمه

فرض کنیم $X$ یک فضای تیخونوف (هاوسدورف و کاملاً منظم) باشد. مجموعه همه توابع پیوسته از $X$ به توی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ را که بردشان کران‌دار است (در قرصی به شعاع متناهی قرار گرفته است) با نماد $C^*(X,\mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $C^*(X,\mathbb{C})$ با اعمال جمع، ضرب و ضرب اسکالر معمولی توابع، تشکیل یک جبر یکانی بر میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌دهد. نرم سوپریمم بر $C^*(X,\mathbb{C})$ با تعریف

$$\|f\|_X=\sup\{|f(x)|:x\in X\},\quad (f\in C^*(X,\mathbb{C})),$$

جبر $C^*(X,\mathbb{C})$ را به یک جبر باناخ یکانی بر میدان $\mathbb{C}$ بدل می‌کند. بستار هر زیر مجموعه $A\subseteq C^*(X,\mathbb{C})$، در فضای نرم‌دار $(C^*(X,\mathbb{C}),\|\cdot\|_X)$ را با $\mathrm{cl}_u A$ نمایش می‌دهیم. همچنین یادآوری می‌کنیم که همگرایی دنباله‌های تابعی در این فضای نرم‌دار، همان همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع است [۱۱، فصل ۷]. مجموعه همه توابع مختلط-مقدار پیوسته با برد متناهی بر فضای $X$ و

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: alireza.olfati@yu.ac.ir (A. R. Olfati)

مجموعه همه توابع مختلط–مقدار پیوسته با برد کران‌دار و شمارا بر فضای $X$ را به‌ترتیب با $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C^*_c(X,\mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان دریافت که $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C^*_c(X,\mathbb{C})$ زیرجبرهایی از $C^*(X,\mathbb{C})$ بر میدان $\mathbb{C}$ اند. در [۳] توصیف نسبتاً مبسوطی از زیرجبرهای $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C^*_c(X,\mathbb{C})$ و نیز برخی ارتباط‌های جبری– توپولوژی میان این زیرجبرها و فضای توپولوژی $X$ داده شده است. البته لازم است یادآوری کنیم که در مرجع ذکرشده برد توابع متعلق به جبرهای $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C^*_c(X,\mathbb{C})$ در $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شده است. با این وجود نتایج مورد بررسی در این پژوهش که از مرجع یاد شده آمده‌اند، به‌طور کاملاً مطلوبی با این پیش فرض که برد توابع مشمول در $\mathbb{C}$ اند، هم‌خوانی خواهد داشت.

برای هر $f\in C^*(X,\mathbb{C})$، صفر–مجموعه تابع $f$ را با $Z(f)$ نمایش می‌دهیم، که عبارت است از $Z(f)=f^{-1}(\{0\})$. همچنین، مجموعه $X\setminus Z(f)$ را متمم صفر–مجموعه تابع $f$ گوییم و با $\operatorname{coz}(f)$ نمایش می‌دهیم. علاوه بر این مجموعه همه صفر–مجموعه‌های فضای $X$ را با $Z[X]$ نمایش می‌دهیم. در واقع $Z[X]=\{Z(f):f\in C^*(X,\mathbb{C})\}$. اگر $V\subseteq X$ در $X$ هم باز و هم بسته باشد، در این صورت $V$ را یک زیر مجموعه باز–بسته می‌نامیم. گردایه همه زیر مجموعه‌های باز–بسته در $X$ را با $\mathrm{CO}(X)$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که

$$\mathrm{CO}(X)=\{Z(e):e\in C^*(X,\mathbb{C}),\ \ e^2=e\}.$$

هر اشتراک شمارا از اعضای $\mathrm{CO}(X)$ را یک $c_\delta$–مجموعه می‌نامیم و نیز متمم هر $c_\delta$–مجموعه یک $c_\sigma$–مجموعه نام نهاده می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که هر فضای $T_1$ که شامل پایه‌ای از مجموعه‌های باز–بسته باشد، یک فضای صفر–بعدی نام دارد. همچنین فضای توپولوژی $X$ را قویاً صفر–بعدی گوییم، هرگاه هر پوشش متناهی $X$ از متمم صفر–مجموعه‌های آن، دارای تظریفی متناهی مانند $\mathcal{C}\subseteq \mathrm{CO}(X)$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا باشد به‌طوری که $\mathcal{C}$ نیز یک پوشش باز برای $X$ است [۶، فصل ۱۶، ص۲۴۶]. یادآوری می‌کنیم که هر فضای صفر–بعدی، فشرده و هاسدورف، قویاً صفر–بعدی است [۶، قضیه ۱۶.۱۶].

برای فضای صفر–بعدی $X$، فشرده‌سازی باناشوسکی $X$، که آن را با $\beta_\circ X$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از یک فضای فشرده و صفر–بعدی که $X$ را به عنوان یک زیر مجموعه چگال شامل می‌شود و علاوه بر این برای هر فضای صفر–بعدی و فشرده $K$، و هر تابع پیوسته $f:X\to K$، تابع پیوسته $\bar{f}:\beta_\circ X\to K$ وجود دارد به‌طوری که $\bar{f}|_X=f$. ایده معرفی فشرده‌ساخت باناشوسکی یک فضای صفر–بعدی تقریباً شبیه به ایده تولید فشرده‌ساخت استون–چک برای یک فضای کاملاً منظم است که اولین بار در مرجع آلمانی زبان [۴] ظاهر شد. مطالعه‌ای عمیق و نسبتاً جامع از فشرده‌ساخت باناشوسکی یک فضای صفر–بعدی در [۱۰] آورده شده است. یک روش شناسایی توپولوژیک فشرده‌ساخت باناشوسکی فضای صفر–بعدی $X$ بر حسب زیرجبر $C^F(X,\mathbb{C})$ در قضیه بعد آورده شده است. برهان قضیه با توجه به [۱۰، بخش ۷.۴، نتیجه $(f)$] به‌سادگی قابل حصول است.

**قضیه ۱.۱.** فرض کنیم $T$ یک فضای فشرده و صفر–بعدی باشد به‌طوری که شامل زیر مجموعه چگال $X$ است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. هم‌سان‌ریختی $\theta:\beta_\circ X\to T$ وجود دارد به‌طوری که $\theta|_X$ تابع همانی بر $X$ باشد.

۲. برای هر $f\in C^F(X,\mathbb{C})$، تابع $\bar{f}\in C^F(T,\mathbb{C})$ وجود دارد به‌طوری که $\bar{f}|_X=f$.

با توجه به سابقه تاریخی پوشش‌ها در تعریف بُعد یک فضای توپولوژی، فضاهای قویاً صفر–بعدی از اهمیت بالایی برخوردار بوده‌اند و تحقیقات وسیعی در رابطه با توصیف‌هایی از فضاهای قویاً صفر–بعدی از جهات مختلف صورت گرفته است. در واقع نکته قابل توجه در چنین فضاهایی، انطباق آن‌ها بر فضاهایی با بُعد پوششی صفر است [۵، فصل ۷]. خاطر نشان می‌کنیم که در [۵، مثال ۲۰.۲.۶] به معرفی یک فضای صفر–بعدی پرداخته شده است که قویاً صفر–بعدی نیست. قضیه بعد روش تشخیص فضاهای قویاً صفر–بعدی را بر حسب فشرده‌ساخت باناشوسکی و انطباق آن با فشرده‌ساخت استون–چک فضا بیان می‌کند. خواننده می‌تواند برای مشاهده برهانی از قضیه بعد به [۱۰، بخش ۷.۴، گزاره $(g)$] مراجعه نماید.

**قضیه ۲.۱.** فضای صفر–بعدی $X$ قویاً صفر–بعدی است اگر و تنها اگر $\beta X=\beta_\circ X$.

در سال ۱۹۵۹ میلادی، یک توصیف نسبتاً ملموس از فضاهای قویاً صفر–بعدی بر حسب صفر–مجموعه‌های (متمم صفر–مجموعه‌های) آن فضا به‌دست آمد [۷]، که چندین سال بعد در [۸، ۹] نیز به آن اشاره شد. در قضیه بعد این نتیجه را آورده‌ایم. خاطر نشان می‌کنیم که در سال ۱۹۷۲ میلادی این نتیجه در [۱۲] نیز بدون اشاره به مبداء آن مجدداً بازیابی شد.

**قضیه ۳.۱.** فضای صفر–بعدی $X$ قویاً صفر–بعدی است اگر و تنها اگر برای هر $f\in C^*(X,\mathbb{C})$، صفر مجموعه $Z(f)$ یک $c_\delta$–مجموعه باشد.

در این پژوهش همواره تمام فضاهای توپولوژی را صفر-بعدی در نظر گرفته‌ایم. برای هر فضای صفر-بعدی $X$، زیرجبرهای $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C_c^*(X,\mathbb{C})$ از $C^*(X,\mathbb{C})$ در توصیف فضای توپولوژی $X$ بسیار سودمندند. اما نکته‌ای قابل تامل جبر باناخ $C^*(X,\mathbb{C})$ را از این زیرجبرها متمایز می‌سازد. در واقع کامل بودن فضای نرم‌دار $(C^*(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_X)$ یکی از مهم‌ترین وجه تمایزها با این زیرجبرهای معرفی‌شده است. بنابر قضیه مشهور استون-وایراشتراس ([۱، قضیه ۱۱.۳] و یا [۲، قضیه۱.۳.۷])، اگر $X$ فشرده نیز باشد، در این صورت هر دو زیرجبر $C^F(X,\mathbb{C})$ و $C_c^*(X,\mathbb{C})$، در جبر باناخ $C^*(X,\mathbb{C})$ چگال‌اند. یادآوری می‌کنیم که در این حالت فضای $X$ قویاً صفر-بعدی است. اما پرسش این است که اگر شرط فشرده بودن فضا را حذف کنیم، چگال بودن این دو زیرجبر تا چه حد پابرجا باقی می‌ماند. لذا علاقه‌مندیم تکمیل شده (بستار یکنواخت) این زیرجبرها را در $(C^*(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_X)$ مطالعه نماییم. مشاهده خواهیم کرد که همواره در هر فضای صفر-بعدی، تکمیل‌شده این دو زیرجبر بر هم منطبق خواهند شد و درواقع منجر به معرفی زیرجبر باناخ $U(X)$ از $C^*(X,\mathbb{C})$ خواهد شد. جبر باناخ $U(X)$ به‌طور شگفت‌انگیزی با $\beta_\circ X$ در ارتباط خواهد بود. در واقع مشاهده خواهد شد که $U(X)$ بزرگترین زیرجبری از $C^*(X,\mathbb{C})$ است که اعضای آن قابل توسیع به $\beta_\circ X$ اند. مضاف‌براین، نشان می‌دهیم که در یک فضای صفر-بعدی، زیرجبرهای ذکرشده در $C^*(X,\mathbb{C})$ چگال‌اند اگر و تنها اگر فضای $X$ قویاً صفر-بعدی باشد. در انتهای این پژوهش، نشان خواهیم داد که اعضای $U(X)$ دقیقاً توابعی از $C^*(X,\mathbb{C})$ اند که نگاره وارون هر مجموعه بسته در $\mathbb{C}$ تحت این توابع $c_\delta$-مجموعه‌ای در $X$ باشد.

## ۲ معرفی زیرجبر $U(X)$ و برخی ویژگی‌های آن

فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژی باشد. اگر $A \subseteq X$ و $f \in C^*(X,\mathbb{C})$، نوسان تابع $f$ بر مجموعه $A$ را با $\mathrm{osc_A}(f)$ نمایش می‌دهیم، که عبارت است از:

$$\mathrm{osc_A}(f) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\}.$$

پیش از بیان تعریف بعدی لازم است یادآوری کنیم که اگر $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{CO}(X)$ یک پوشش متناهی برای فضای $X$ باشد، به‌طوری که اعضای آن دوبه‌دو مجزایند، در این صورت $\mathcal{D}$ را یک افراز متناهی برای $X$ می‌نامیم.

**تعریف ۱.۲.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر-بعدی و $f : X \to \mathbb{C}$ یک تابع پیوسته باشند. گوییم $f \in U(X)$ اگر برای هر $\epsilon > ۰$، افراز متناهی $\mathcal{D}_\epsilon$ از $X$ موجود باشد، به‌طوری که $\mathrm{osc_D}(f) \leq \epsilon$، برای هر $D \in \mathcal{D}_\epsilon$.

بدیهی است که $U(X)$ زیر مجموعه‌ای از $C^*(X,\mathbb{C})$ است. در لم بعدی نشان می‌دهیم $U(X)$ با اعمال جمع، ضرب و ضرب اسکالر معمولی توابع، تشکیل زیرجبری از $C^*(X,\mathbb{C})$ بر میدان اعداد مختلط می‌دهد.

**لم ۲.۲.** فرض کنیم $f, g \in U(X)$ و $c \in \mathbb{C}$. در این صورت توابع $f+g$، $fg$، $cf$، $\mathrm{Im}(f)$، $\mathrm{Re}(f)$ و $\bar{f}$ به $U(X)$ تعلق دارند.

اثبات. تنها نشان می‌دهیم $fg \in U(X)$. برهان سایر موارد سر راست است. با توجه به کران‌دار بودن توابع $f$ و $g$، عدد $M > ۰$ وجود دارد به‌طوری که $\|f\|_X \leq M$ و $\|g\|_X \leq M$. برای $\epsilon > ۰$، افرازهای متناهی برای $X$ مانند $\mathcal{B} = \{B_i : i = ۱, \cdots, n\}$ و $\mathcal{C} = \{C_j : i = ۱, \cdots, m\}$ موجودند به‌طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، $\mathrm{osc}_{B_i}(f) \leq \frac{\epsilon}{۲M}$ و $\mathrm{osc}_{C_j}(g) \leq \frac{\epsilon}{۲M}$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{D} := \{B_i \cap C_j : ۱ \leq i \leq n, \quad ۱ \leq j \leq m\}.$$

روشن است که $\mathcal{D}$ نیز یک افراز متناهی برای $X$ است. برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، و برای هر $x, y \in B_i \cap C_j$، داریم:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M|g(x) - g(y)| + M|f(x) - f(y)| \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، $\mathrm{osc}_{B_i \cap C_j}(fg) \leq \epsilon$ و لذا باید $fg \in U(X)$. □

**قضیه ۳.۲.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر-بعدی باشد. در این صورت $\mathrm{cl}_u C^F(X,\mathbb{C}) = U(X)$.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم $U(X)$ در فضای نرم‌دار $C^*(X,\mathbb{C})$ بسته است. فرض کنیم $(f_n: n\in\mathbb{N})$ دنباله‌ای در $U(X)$ باشد که به‌طور یکنواخت به تابع $f$ همگرا است. برای $\epsilon>0$، عدد طبیعی $N$ وجود دارد به‌طوری که اگر $n\geq N$ و $x\in X$، $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{3}$. با توجه به این که $f\in U(X)$، گردایه $\{C_i: i=1,\cdots,n\}$ از مجموعه‌های باز–بسته در $X$ وجود دارد به‌طوری که $\operatorname{osc}_{C_i}(f_N)\leq\frac{\epsilon}{3}$ برای هر $i=1,\cdots,n$. بنابراین برای هر $x,y\in C_i$ خواهیم داشت:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|\leq\epsilon.$$

بنابراین $\operatorname{osc}_{C_i}(f)\leq\epsilon$، برای هر $i=1,\cdots,n$، و لذا $f\in U(X)$. بدیهی است که $C^F(X,\mathbb{C})\subseteq U(X)$ و بنابر آنچه در قسمت قبل آمد، $\mathrm{cl}_u C^F(X,\mathbb{C})\subseteq U(X)$. حال نشان می‌دهیم شمول $U(X)\subseteq\mathrm{cl}_u C^F(X,\mathbb{C})$ برقرار است. فرض کنیم $f\in U(X)$. برای هر $\epsilon>0$، پوشش متناهی

$$\mathcal{D}=\{D_j: j=1,\cdots,m\}$$

از مجموعه‌های باز–بسته در $X$ وجود دارد به‌طوری که اعضای آن دوبه‌دو مجزایند و همچنین $\operatorname{osc}_{D_j}(f)\leq\epsilon$، برای هر اندیس $j=1,\cdots,m$. برای هر $j=1,\cdots,m$، عضو $x_j\in D_j$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_j=f(x_j)$. اکنون تابع $h$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h:=\sum_{j=1}^{m} r_j\chi_{D_j},$$

که در آن $\chi_{D_j}$ تابع مشخصه مجموعه $D_j$ است. بدیهی است که $h\in C^F(X,\mathbb{C})$ و $\|h-f\|_X\leq\epsilon$. بنابراین تابع $f$ به $\mathrm{cl}_u C^F(X,\mathbb{C})$ متعلق است. $\square$

تا این‌جا بستار یکنواخت زیرجبر $C^F(X,\mathbb{C})$ را در $C^*(X,\mathbb{C})$ مشخص کردیم. از قضیه ۳.۲ مشهود است که $U(X)$ یک زیرجبر بسته از $C^*(X,\mathbb{C})$ است. این مطلب را در گزاره بعد آورده‌ایم.

**گزاره ۴.۲.** برای فضای صفر–بعدی $X$، زیرجبر $U(X)$ از $C^*(X,\mathbb{C})$، تشکیل یک جبر باناخ یکانی بر میدان $\mathbb{C}$ می‌دهد.

اکنون نظر خود را معطوف به محاسبه بستار یکنواخت زیرجبر $C_c^*(X,\mathbb{C})$ در $C^*(X,\mathbb{C})$ می‌نماییم.

**قضیه ۵.۲.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر–بعدی باشد. در این صورت $C_c^*(X,\mathbb{C})\subseteq U(X)$.

اثبات. فرض کنیم $f\in C_c^*(X,\mathbb{C})$. حجره دوبعدی $[a,b]\times[c,d]$ در $\mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(X)\subseteq[a,b]\times[c,d].$$

چون برد $f$ شمارا است، برای $\epsilon>0$، افرازهای $a_\circ=a<a_1<\cdots<a_n=b$ و $c_\circ=c<c_1<\cdots<c_m=d$ به‌ترتیب از بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ وجود دارند به‌طوری که هر یک از زیر حجره‌های $[a_i,a_{i+1}]\times[c_j,c_{j+1}]$ دارای قطری کمتر از $\epsilon$ باشد، و برای هر $0\leq i\leq n-1$ و $0\leq j\leq m-1$، میله‌های $\{a_i\}\times\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}\times\{c_j\}$ مجموعه $f(X)$ را قطع نکنند. اگر برای هر $0\leq i\leq n-1$ و $0\leq j\leq m-1$، قرار دهیم

$$E_{ij}:=f^{-1}\left([a_i,a_{i+1}]\times[c_j,c_{j+1}]\right),$$

در این صورت گردایه

$$\{E_{ij}: 0\leq i\leq n-1,\quad 0\leq j\leq m-1\},$$

افراز متناهی (از مجموعه‌های باز–بسته) برای $X$ است. برای هر $0\leq i\leq n-1$ و $0\leq j\leq m-1$، عضو $x_{ij}\in E_{ij}$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_{ij}=f(x_{ij})$. حال تابع $g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g:=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} r_{ij}\chi_{E_{ij}},$$

که در آن $\chi_{E_{ij}}$ تابع مشخصه مجموعه $E_{ij}$ است. روشن است که $g\in C^F(X,\mathbb{C})$ و $\|f-g\|_X\leq\epsilon$. بنابر قضیه ۳.۲، $f\in U(X)$. $\square$

ملاحظه می‌کنیم که $C^F(X,\mathbb{C})\subseteq C_c^*(X,\mathbb{C})$. لذا از ترکیب قضیه ۳.۲ و قضیه ۵.۲، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

**نتیجه ۶.۲.** برای فضای صفر–بعدی $X$، داریم $\mathrm{cl}_u C_c^*(X,\mathbb{C})=U(X)$.

# ۳ معرفی یک طول‌پا و نمایشی دیگر برای $U(X)$

به‌کمک مطالب بخش قبل به‌سادگی می‌توان دریافت که جبر باناخ $U(X)$، به‌همراه عمل تزویج، در واقع یک $C^*$- جبر یکانی است. اما بنابر قضیه مشهور گلفاند–نایمارک، فضای فشرده و هاسدورف $T$ وجود دارد به‌طوری که $U(X)$ به‌طور طول‌پا با $C^*(T,\mathbb{C})$ یکریخت جبری است. در این قسمت، با روشی مستقیم و با ابزاری توپولوژیکی، علاوه براین که چنین طول‌پایی را به‌دست خواهیم آورد، به‌طور دقیق فضای فشرده آشکارشده در قضیه گلفاند–نایمارک را توصیف خواهیم کرد.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر–بعدی باشد. در این صورت برای هر $f \in C^*(\beta_\circ X,\mathbb{C})$، تابع تحدید $f|_X$ به $U(X)$ متعلق است.

اثبات. فرض کنیم $\epsilon > ۰$. با توجه به این که برد تابع $f$، زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{C}$ است، گردایه

$$\mathcal{B} = \{B_i : i = ۱,\cdots,n\},$$

از گوی‌های باز در $\mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری که $\mathrm{diam}(B_i) < \frac{\epsilon}{۲}$، برای هر $i = ۱,\cdots,n$، و علاوه بر این $\mathcal{B}$ یک پوشش باز برای مجموعه $f(\beta_\circ X)$ باشد. ملاحظه می‌کنیم که برای هر $i = ۱,\cdots,n$، نگاره وارون $f^{-۱}(B_i)$ یک متمم صفر–مجموعه در $\beta_\circ X$ است و هم‌چنین گردایه

$$\mathcal{F} = \{f^{-۱}(B_i) : i = ۱,\cdots,n\},$$

پوشش بازی برای $\beta_\circ X$ است. چون $\beta_\circ X$ قویاً صفر–بعدی است، افراز متناهی $\{C_j : j = ۱,\cdots,m\}$ (متشکل از مجموعه‌های باز–بسته) از $\beta_\circ X$ وجود دارد که تظریفی برای $\mathcal{F}$ است. بدیهی است که $\mathrm{osc}_{C_j} f \leq \epsilon$، برای هر $j = ۱,\cdots,m$. بنابراین گردایه

$$\mathcal{C} = \{C_j \cap X : j = ۱,\cdots,m\},$$

یک افراز متناهی (از مجموعه‌های باز–بسته) برای $X$ است، به‌طوری که $\mathrm{osc}_{C_j\cap X}(f|_X) \leq \epsilon$، برای هر $j = ۱,\cdots,m$. این مطلب نشان می‌دهد که $f|_X \in U(X)$. □

**قضیه ۲.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر–بعدی باشد. در این صورت هر $f \in U(X)$ دارای توسیعی به $\beta_\circ X$ است.

اثبات. فرض کنیم $(f_n : n \in \mathbb{N})$ دنباله‌ای از توابع در $C^F(X,\mathbb{C})$ باشد که به‌طور یکنواخت به تابع $f$ همگرا است. هم‌چنین فرض کنیم $p \in \beta_\circ X$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع $F_n$ را توسیع تابع $f_n$ به $\beta_\circ X$ در نظر می‌گیریم. ابتدا نشان می‌دهیم که دنباله عددی $(F_n(p) : n \in \mathbb{N})$ در $\mathbb{C}$ همگرا است. برای هر عدد طبیعی $n$ قرار می‌دهیم $c_n = F_n(p)$ و مجموعه $A_n = F_n^{-۱}(c_n)$ را تعریف می‌کنیم. روشن است که برای هر $n$، مجموعه $A_n$ در $\beta_\circ X$ باز–بسته است. اکنون فرض کنیم $\epsilon > ۰$. عدد طبیعی $N$ وجود دارد به‌طوری که اگر $n,m > N$ و $x \in X$، آن‌گاه $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. چون $A_m \cap A_n$ یک همسایگی باز از $p$ در $\beta_\circ X$ است و با توجه به چگال بودن $X$ در $\beta_\circ X$، مجموعه $A_m \cap A_n \cap X$ ناتهی است. با انتخاب $z_{mn} \in A_m \cap A_n \cap X$، خواهیم داشت:

$$|F_n(p) - F_m(p)| = |f_n(z_{mn}) - f_m(z_{mn})| < \epsilon, \quad (m,n \geq N).$$

این نشان می‌دهد که دنباله عددی $(F_n(p) : n \in \mathbb{N})$ یک دنباله کوشی در $\mathbb{C}$ است و بنابراین در $\mathbb{C}$ همگرا است.

اکنون تابع $F : \beta_\circ X \to \mathbb{C}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $p \in \beta_\circ X$،

$$F(p) := \lim_{n\to\infty} F_n(p).$$

روشن است که تابع $F$ توسیعی از $f$ به $\beta_\circ X$ است. برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم $F$ بر $\beta_\circ X$ پیوسته است. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. عدد طبیعی $M$ وجود دارد به‌طوری که اگر $M \leq n$ و $z \in X$، آن‌گاه $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{۳}$. علاوه بر این، از آن‌جا که $f \in U(X)$، مجموعه باز–بسته $V$ در $X$ وجود دارد به‌طوری که $p \in \mathrm{cl}_{\beta_\circ X} V$ و برای هر دو عضو $x,y \in V$، داریم $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{۳}$. توجه داریم که $\mathrm{cl}_{\beta_\circ X} V$ یک همسایگی باز از $p$ در $\beta_\circ X$ است.

فرض کنیم $q \in \mathrm{cl}_{\beta_\circ X} V$. عدد طبیعی $K \geq M$ وجود دارد به‌طوری که اگر $K \leq n$، آن‌گاه $|F_n(q) - F(q)| < \frac{\varepsilon}{۳}$. با توجه به این که $F_K \in C^F(X,\mathbb{C})$، زیر مجموعه‌های

$$W_p := F_K^{-۱}(F_K(p)), \quad W_q := F_K^{-۱}(F_K(q)),$$

در $\beta_\circ X$ باز–بسته‌اند. فرض کنیم
$$x_\circ \in W_p \cap X, \quad y_\circ \in W_q \cap X.$$
روشن است که
$$f_k(x_\circ) = F_k(p), \quad f_k(y_\circ) = F_k(q).$$
همچنین، با به‌کارگیری نابرابری مثلثی خواهیم داشت:
$$|F(q) - F(p)| \leq |F(p) - F_K(p)| + |F_K(p) - F_K(q)| + |F_K - F(q)| \leq \varepsilon.$$
این نشان می‌دهد که اگر $\mathbf{B}(F(p), \varepsilon)$ گوی بازی به مرکز $F(p)$ و شعاع $\varepsilon$ در $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه
$$\mathrm{cl}_{\beta_\circ X} V \subseteq F^{-1}\left(\mathbf{B}(F(p), \varepsilon)\right).$$
پس تابع $F$ در هر نقطه از $\beta_\circ X$ پیوسته است. این مطلب اثبات را تمام می‌کند. $\square$

اکنون آماده‌ایم تا با استفاده از قضیه ۱.۳ و قضیه ۲.۳، سیمای مشخصی برای توابعی از $C^*(X, \mathbb{C})$ که دارای توسیعی به $\beta_\circ X$ اند، ارائه دهیم. در واقع بزرگ‌ترین زیرجبر از $C^*(X, \mathbb{C})$ که اعضای آن همگی قابل توسیع به $\beta_\circ X$ اند، همان $U(X)$ است. این نکته را به‌طور خلاصه در نتیجه بعد گنجانده‌ایم.

**نتیجه ۳.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر–بعدی باشد. در این صورت $f \in C^*(X, \mathbb{C})$ دارای توسیعی به $\beta_\circ X$ است اگر و تنها اگر $f \in U(X)$.

اکنون این پرسش مطرح می‌شود که چه وقت $U(X)$ زیرجبری سره از $C^*(X, \mathbb{C})$ است. در نتیجه بعد مشاهده خواهیم کرد که اگر فضا قویاً صفر–بعدی نباشد، همواره $U(X)$ از $C^*(X, \mathbb{C})$ متمایز است.

**نتیجه ۴.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر–بعدی باشد. در این صورت $X$ قویاً صفر–بعدی است اگر و تنها اگر $U(X)$ بر $C^*(X, \mathbb{C})$ منطبق باشد.

اثبات. برهان با استفاده از قضیه ۲.۱ و نتیجه ۳.۳ به سهولت به‌دست می‌آید. لذا از آوردن برهان صرف نظر می‌کنیم. $\square$

با توجه به یکتایی توسیع هر تابع واقع در $U(X)$ به $\beta_\circ X$، در نتیجه بعد توصیفی دقیق از جبر باناخ $U(X)$ را ارائه می‌کنیم.

**نتیجه ۵.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای صفر–بعدی باشد. در این صورت جبر باناخ $U(X)$ به‌طور طول‌پا با $C(\beta_\circ X, \mathbb{C})$ یکریخت می‌باشد.

اثبات. برای هر $f \in U(X)$، توسیع آن به $\beta_\circ X$ را با $f^\circ$ نمایش می‌دهیم و نگاشت $\varphi$ را با ضابطه
$$\varphi : U(X) \to C(\beta_\circ X, \mathbb{C}), \quad \varphi(f) = f^\circ,$$
تعریف می‌کنیم. با توجه به این که $X$ در $\beta_\circ X$ چگال است، لذا $\varphi$ تابعی خوش‌تعریف است و برای هر $f, g \in U(X)$ و هر اسکالر $c \in \mathbb{C}$، خواهیم داشت:

۱. $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$،

۲. $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$،

۳. $\varphi(cf) = c\varphi(f)$.

علاوه بر این یک‌به‌یک و پوشا بودن $\varphi$ به‌سهولت قابل مشاهده است. اکنون تنها باید نشان دهیم $\varphi$ یک طول‌پا است. فرض کنیم $f \in U(X)$. بدیهی است که $\|f\|_X \leq \|f^\circ\|_{\beta_\circ X}$. برای مشاهده نابرابری عکس، فرض کنیم $\epsilon > \circ$. لذا $p \in \beta_\circ X$ موجود است به‌طوری که
$$\|f^\circ\|_{\beta_\circ X} - \epsilon < |f^\circ(p)|.$$

قرار می‌دهیم $r = \|f^\circ\|_{\beta_\circ X} - \epsilon$. با توجه به این که $|f^\circ|$ تابعی حقیقی مقدار و پیوسته است، لذا مجموعه $W = |f^\circ|^{-1}(r, \infty)$ همسایگی بازی از $p$ در $\beta_\circ X$ است. چگال بودن $X$ در $\beta_\circ X$ ایجاب می‌کند که $W \cap X \neq \emptyset$. لذا $x \in W \cap X$ وجود دارد به‌طوری که $r < |f^\circ(x)| = |f(x)|$. بنابراین برای هر $\epsilon > \circ$ خواهیم داشت:

$$\|f^\circ\|_{\beta_\circ X} - \epsilon < \|f\|_X.$$

با توجه به این که نابرابری قبل برای هر $\epsilon > \circ$ برقرار است، خواهیم داشت:

$$\|\varphi(f)\|_{\beta_\circ X} \leq \|f\|_X,$$

و بنابراین برهان به اتمام می‌رسد. $\square$

پایان بخش این مقاله توصیف توابع $U(X)$ بر حسب نگاره وارون مجموعه‌های باز در $\mathbb{C}$ است. مجدداً یادآوری می‌کنیم که برای فضای توپولوژی $X$، زیرمجموعه $V \subseteq X$ یک $c_\delta$-مجموعه است هرگاه زیر مجموعه شمارای $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ از $\mathrm{CO}(X)$ یافت شود، به‌طوری که $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. همچنین، متمم یک $c_\delta$-مجموعه در $X$ را یک $c_\sigma$-مجموعه می‌نامیم.

قضیه **۶.۳**. فرض کنیم $X$ یک فضای صفر-بعدی باشد. در این صورت $U(X)$ متشکل است از همه توابع $f \in C^*(X, \mathbb{C})$، به‌طوری که برای هر مجموعه بسته $\mathbf{B}$ در $\mathbb{C}$، $f^{-1}(\mathbf{B})$ یک $c_\delta$-مجموعه در $X$ باشد.

اثبات. فرض کنیم $f \in U(X)$ و $\mathbf{B}$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{C}$ باشد. با توجه به قضیه ۲.۳، تابع $f$ دارای توسیع $f^\circ$ به $\beta_\circ X$ است. ملاحظه می‌کنیم که $(f^\circ)^{-1}(\mathbf{B})$ صفر-مجموعه‌ای در فضای قویاً صفر-بعدی $\beta_\circ X$ است. با استفاده از قضیه ۳.۱، $(f^\circ)^{-1}(\mathbf{B})$ یک $c_\delta$-مجموعه در $\beta_\circ X$ است. پس دنباله $(V_n : n \in \mathbb{N})$ از مجموعه‌های باز-بسته در $\beta_\circ X$ وجود دارد به‌طوری که

$$(f^\circ)^{-1}(\mathbf{B}) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_i.$$

لذا با گرفتن اشتراک نسبت به $X$ از طرفین تساوی قبل خواهیم داشت:

$$f^{-1}(\mathbf{B}) = (f^\circ)^{-1}(\mathbf{B}) \cap X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (V_i \cap X).$$

با توجه به این که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $V_i \cap X$ یک مجموعه باز-بسته در $X$ است، پس $f^{-1}(\mathbf{B})$ یک $c_\delta$-مجموعه در $X$ است.

حال فرض کنیم $f \in C^*(X, \mathbb{C})$ دارای این ویژگی است که برای هر مجموعه بسته $B$ در $\mathbb{C}$، نتیجه شود که $f^{-1}(B)$ یک $c_\delta$-مجموعه در $X$ است. گردایه متناهی $\mathcal{B} = \{B_i : i = 1, \cdots, k\}$ از گوی‌های باز در $\mathbb{C}$ را به‌گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $\mathrm{diam} B_i < \epsilon$ و نیز $\mathcal{B}$ پوششی باز برای $f(X)$ باشد. در این صورت

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(B_i).$$

با توجه به این که برای هر $i = 1, \ldots, k$، مجموعه $f^{-1}(B_i)$ یک $c_\sigma$-مجموعه در $X$ است، لذا گردایه شمارای $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ از مجموعه‌های باز-بسته در $X$ وجود دارد به‌طوری که $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$. قرار می‌دهیم $C_1 := D_1$ و برای هر $n \geq 2$، تعریف می‌کنیم $C_n := D_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i$. گردایه

$$\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\},$$

پوششی شمارا برای $X$ از مجموعه‌های باز-بسته‌ی $X$ است که اعضای آن دوبه‌دو مجزایند. بدون کاستن از کلیت و با یک تجدید آرایش مجدد، می‌توانیم فرض کنیم که تمامی اعضای $\mathcal{C}$ ناتهی‌اند. همچنین به‌سادگی می‌توان دریافت که $\mathrm{osc}_{C_i}(f) \leq \epsilon$، برای هر $i \in \mathbb{N}$. برای هر $i \in \mathbb{N}$، عضو $x_i \in C_i$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $r_i = f(x_i)$. اکنون تابع $g$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \chi_{C_i}.$$

روشن است که $g \in C_c^*(X, \mathbb{C})$ و $\|f - g\|_X \leq \epsilon$. لذا $f \in \mathrm{cl}_u C_c^*(X, \mathbb{C})$. بنابر نتیجه ۶.۲، تابع $f$ به $U(X)$ تعلق دارد. $\square$

## فهرست منابع

[۱] ک. د. الیپرانتیس، ا. برکینشاو، اصول آنالیز حقیقی (ویرایش سوم)، برگردانِ م. ع. رضوانی، انتشارات پوران پژوهش، ۱۳۹۳.

[۲] ژ. دیودونه، مبانی آنالیز مدرن، برگردانِ م. ع. غیرتمند، انتشارات شباهنگ، ۱۳۸۸.

[3] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh, Z. Keshtkar and A.R. Olfati, *On maximal ideals of $C_c(X)$ and the uniformity of its localizations*, Rocky Mountain J. Math, **48** (2018), 345–384.

[4] B. Banaschewski, *Über nulldimensionale Räume*, Math. Nachr. **13** (1955), 129–140.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Sigma Series in Pure Mathematics 6, Heldermann, Berlin, 1989.

[6] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Reprint of the 1960 edition. Graduate Texts in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, New York, 1976.

[7] L. J. Heider, *Compactifications of dimension zero*, Proc. Amer. Math. Soc, **10** (1959), 377–384.

[8] P. Nyikos, *Strongly zero-dimensional spaces*, General topology and its relations to modern analysis and algebra, III (Proc. Third Prague Topological Sympos., 1971), pp. 341–344. Academia, Prague, 1972.

[9] P. Nyikos, *The Sorgenfrey plane in dimension theory*, Fund. Math. **79** (2) (1973), 131–139.

[10] J.R. Porter and R.G. Woods, *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[11] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 1976.

[12] J. Terasawa, On the *zero-dimensionality of some non-normal product spaces*, Sci. Tokyo Kyoiku Daigaku, **11** (1972), 167–174.

# The Banach algebra $U(X)$ on a zero-dimensional space $X$

**Alireza Olfati** [†]

Department of mathematics, Faculty of Basic Science, Yasouj university, Yasouj, Iran

Communicated by: Fariborz Azarpanah

Received: 2022/9/29 Accepted: 2022/12/23

**Abstract:** In this research, for a zero-dimensional space $X$, a Banach subalgebra $U(X)$ of $C^*(X,\mathbb{C})$ is introduced. It is shown that $U(X)$ is the uniform closure of the subalgebras $C^F(X,\mathbb{C})$ and $C_c^*(X,\mathbb{C})$ of the Banach algebra $C^*(X,\mathbb{C})$. Moreover a necessary and sufficient condition for the coincidence of $U(X)$ and $C^*(X,\mathbb{C})$ is given. It is shown that $U(X)$ consists exactly of all $f \in C^*(X,\mathbb{C})$ each of which has an extension to $\beta_\circ X$. Using this fact, an isometric isomorphism from $U(X)$ onto $C(\beta_\circ X,\mathbb{C})$ is defined. Finally, a description of the elements of $U(X)$ in terms of the inverse image of the closed subsets of $\mathbb{C}$ is given.

**Keywords**: Zero-dimensional space, Strongly zero-dimensional space, Banaschewski compactification, Uniform convrgence, Uniform closure.

©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[†]Corresponding author.
*E-mail addresses:* alireza.olfati@yu.ac.ir (A.R. Olfati).