مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۴، ص ۵۱۵-۵۲۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.41725.2077

نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع $(\alpha, m)-$ محدب

مهدی اسدی ×

دانشیار، گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران

دبیر مسئول: محمد اسماعیل سامعی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۶/۳   تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۲۵

چکیده: در این مقاله بعد از معرفی خاصیت $m-$ محدب توسط تادر به‌عنوان یک خاصیت میانی بین تحدب کلی و ستاره‌شکل، نامساوی انتگرال هرمیت-هادامارد را برای تابع $(\alpha, m)-$ محدب در قالب جدید بیان و ثابت می‌کنیم. نتایج قبلی در مورد نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع $m-$ محدب بخشی از نتایج قضایای مایند. مثال‌هایی در خصوص توابع $(\alpha, m)-$ محدب و $m-$ محدب نیز در مقاله گنجانده شده است.

واژه‌های کلیدی: نامساوی انتگرالی هرمیت - هادامارد، تابع $m-$ محدب، تابع محدب

رده‌بندی ریاضی: 26D07; 26D15

۱ تعاریف و مقدمات

مفهوم تابع $m-$ محدب در آنالیز محدب گسسته نقش اساسی داشته به‌طوری‌که در اقتصاد ریاضی نیز کاربرد دارد. بعد از معرفی مفهوم $m-$ محدب به‌وسیله تادر در [۱۵] به‌عنوان تحدب میانی بین خاصیت ستاره‌شکل و تحدب کلی، نامساوی هرمیت - هادامارد را برای توابع $(\alpha, m)-$ محدب تعریف، بیان و ثابت می‌کنیم.

اگر تابع $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی فاصله ناتهی I پیوسته و محدب میانی باشد، محدب خواهد بود، [۱۳] دیده شود. به‌عبارتی، هرگاه برای هر $a, b \in I$ داشته باشیم:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲},$$

در این‌صورت

$$\forall a, b \in I \wedge \forall t \in [۰, ۱] \Rightarrow f(ta + (۱-t)b) \leq tf(a) + (۱-t)f(b).$$

برای تابعی که محدب می‌باشد، درنتیجه پیوسته و انتگرال‌پذیر است، هم‌چنین داریم:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲} \qquad (۱.۱)$$

که به نامساوی هرمیت - هادامارد برای توابع محدب معروف است.

×مهدی اسدی رایانامه: me.masadi@iau.ac.ir (M. Asadi)

تعریف **۱.۱** ([۱۵]). فرض کنیم $m \in [۰, ۱]$ باشد. مجموعه C از $\mathbb{R}$ را محدب می‌گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in C \wedge \forall t \in [۰, ۱] \Rightarrow tx + (۱ - t)y \in C,$$

و $m-$ محدب می‌گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in C \wedge \forall t, m \in [۰, ۱] \Rightarrow tx + m(۱ - t)y \in C,$$

و (α, m) محدب می‌گوییم هرگاه

$$\forall t, \alpha, m \in [۰, ۱] \Rightarrow t^\alpha x + m(۱ - t^\alpha)y \in C.$$

تعریف **۲.۱**. فرض کنیم $m \in [۰, ۱]$ باشد. تابع حقیقی f روی مجموعه C از $\mathbb{R}$ را محدب می‌گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in C \wedge \forall t \in [۰, ۱] \Rightarrow f(tx + (۱ - t)y) \leq tf(x) + (۱ - t)f(y)$$

و $m-$ محدب می‌گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in C \wedge \forall t, m \in [۰, ۱] \Rightarrow f(tx + m(۱ - t)y) \leq tf(x) + m(۱ - t)f(y),$$

و (α, m) محدب می‌گوییم هرگاه

$$\forall x, y \in C \wedge \forall t, \alpha, m \in [۰, ۱] \Rightarrow f(t^\alpha x + m(۱ - t^\alpha)y) \leq t^\alpha f(x) + m(۱ - t^\alpha)f(y).$$

برای تعریف مقعر و $m-$ مقعر حالت‌های $f-$ را در نظر خواهیم گرفت.

از دید هندسی مجموعه m محدب شامل قطعه خط بین نقاط x و my برای هر $x, y \in C$ خواهد بود. هم‌چنین تابع f روی C برای هر $x, y \in C$ $m-$ محدب خواهد بود هرگاه برای $x \leq y$ قطعه بین نقاط $(x, f(x))$ و $(y, mf(y))$ بالای نمودار f در $[x, my]$ قرار گیرد.

مثال **۳.۱**. تابع $f(x) = x^۲$ و $f(x) = \|x\|$ روی فضای نرم دار مثالی از تابع $m-$ محدب و تابع $f(x) = \sqrt{x}$، $m-$ مقعر است.

مثال **۴.۱**. فرض کنیم

$$B = \{x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n, \cdots) \in l^۱ | \, \|x\|_۱ \leq ۱\}$$

لذا B $(\alpha, m)-$ محدب است. حال فرض کنیم

$$C = \{x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n, \cdots) \in l^۱ | \, x_i \geq ۰, \ \|x\|_۱ = \sum_{n=۱}^{\infty} x_i = ۱\}$$

در این‌صورت C محدب است، در حالی‌که m و $(\alpha, m)-$ محدب نیست.

برای مثال‌های بیش‌تر به مراجع [۱، ۳–۱۲، ۱۴، ۱۵] رجوع شود.

لم **۵.۱**. فرض کنیم تابع حقیقی f $m-$ محدب باشد و $۰ \leq n < m \leq ۱$. در این‌صورت f، $n-$ محدب است.

لم **۶.۱**. فرض کنیم $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ که تابع f $n-$ محدب و تابع g $m-$ محدب باشند و $n \leq m$. در این‌صورت $f + g$ و kf که برای ثابت $k \geq ۰$، $n-$ محدب خواهند بود.

لم **۷.۱**. فرض کنیم $f, g : [۰, a] \to \mathbb{R}$ توابع نامنفی، صعودی و $m-$ محدب باشند. در این‌صورت fg، $m-$ محدب خواهند بود.

۲ نتایج اصلی

فرض کنیم $\mathrm{co}(f) := \{f : \text{تابع } f \text{ محدب است}\}$ و $\mathrm{co}_m(f) := \{f : \text{تابع } f \; m- \text{ محدب است}\}$. بنابراین $\mathrm{co}_m(B) \subsetneqq \mathrm{co}(A)$ چراکه؛ اگر $t = ۰/۲$، $m = ۰$ و f را به‌صورت زیر بگیریم

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - x, & ۰ \leq x \leq ۱ \\ \frac{-x+۱}{۲}, & ۱ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

دراین‌صورت $f \in \mathrm{co}(A) \backslash \mathrm{co}_m(B)$. همین‌طور؛ اگر $a = ۰$، $b = ۱$ و $m = ۰/۵$. خواهیم داشت:

$$f(\frac{a+mb}{۲}) = \frac{۳}{۴} > \frac{f(a)+mf(b)}{۲} = \frac{۱}{۲},$$

درحالی‌که

$$f(\frac{a+b}{۲}) = \frac{۱}{۲} \leq \frac{f(a)+f(b)}{۲} = \frac{۱}{۲}.$$

برای جزئیات بیش‌تر می‌توان به [۱] مراجعه کرد.

اکنون به اثبات قضیه اصلی مقاله می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $m \in [۰, ۱]$ و $C \subseteq \mathbb{R}$ و تابع $f : C \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع $(\alpha, m)-$ محدب روی بازه C بوده و $a, b \in C$. اگر برای هر r و s داشته باشیم $a + mb = r + s$. آن‌گاه،

(۱.۲)

$$f\left(\frac{a+mb}{۲}\right) \leq \frac{۱}{۲(۱+\alpha)}\left(\frac{۱}{r-a}\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(u)du + m\frac{۱}{mb-s}\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(u)du\right)$$

و

$$\begin{aligned} &\frac{۱}{۲(۱+\alpha)}\left(\frac{۱}{r-a}\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(u)du + m\frac{۱}{mb-s}\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(u)du\right) \\ &\leq \frac{f(r)+f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{۲} + m\left(\frac{f(s)+f(s+(mb-s)(\alpha+۱))}{۲}\right). \end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم $a, b, s, r \in C$، در این‌صورت قرار می‌دهیم:

$$t^{\alpha-۱}A := r-(r-a)(\alpha t+t^{\alpha}) = r(۱-\alpha t-t^{\alpha}) + a(\alpha t+t^{\alpha}) \in C$$

و

$$m(۱-t^{\alpha-۱})B := s+(mb-s)(\alpha t+t^{\alpha}) = s(۱-\alpha t-t^{\alpha}) + mb(\alpha t+t^{\alpha}) \in C.$$

بنابراین $t^{\alpha-۱}A + m(۱-t^{\alpha-۱})B = r+s = a+mb \in C$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+mb}{۲}\right) &= f\left(\frac{t^{\alpha-۱}A+m(۱-t^{\alpha-۱})B}{۲}\right) \\ &\leq \frac{۱}{۲}\left(\int_{۰}^{۱} t^{\alpha-۱}f(A)dt + m(۱-t^{\alpha-۱})\int_{۰}^{۱} f(B)dt\right) \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\int_{۰}^{۱} t^{\alpha-۱}f(r-(r-a)(\alpha t+t^{\alpha}))dt + m\int_{۰}^{۱}(۱-t^{\alpha-۱})f(s+(mb-s)(\alpha t+t^{\alpha}))dt\right) \\ &= \frac{۱}{۲(۱+\alpha)(r-a)}\left(\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(u)du\right) \\ &+ m\frac{۱}{۲(۱+\alpha)(mb-s)}\left(\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(u)du\right). \end{aligned}$$

چون $r-a=mb-s$

$$f\left(\frac{a+mb}{۲}\right)\leq \frac{۱}{۲(۱+\alpha)(r-a)}\left(\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(u)du + m\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(u)du\right) \quad (۲.۲)$$

(۳.۲)
$$f\left(\frac{a+mb}{۲}\right)\leq \frac{۱}{۲(۱+\alpha)(mb-s)}\left(\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(u)du + m\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(u)du\right).$$

بنا به تعریف تابع $(\alpha,m)-$ محدب

(۴.۲)
$$\frac{f(x)-f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{x-(r-(r-a)(۱+\alpha))}\leq \frac{f(r)-f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{r-(r-(r-a)(۱+\alpha))} = \frac{f(r)-f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{(r-a)(۱+\alpha)}$$

نتیجه می‌شود که

$$f(x)\leq f(r-(r-a)(۱+\alpha)) + \frac{f(r)-f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{r-a}(x-(r-(r-a)(۱+\alpha))).$$

لذا

$$\begin{aligned}\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(x)dx &\leq \int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(r-(r-a)(۱+\alpha))dx\\ &+ \int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} \frac{f(r)-f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{(r-a)(۱+\alpha)}(x-(r-(r-a)(۱+\alpha)))dx\\ &= f(r-(r-a)(۱+\alpha))(r-a)(۱+\alpha)\\ &+ \frac{f(r)-f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{(r-a)(۱+\alpha)}\frac{(r-a)^{۲}(۱+\alpha)^{۲}}{۲}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{(r-a)(۱+\alpha)}\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r} f(u)du \leq \frac{f(r)+f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{۲} \quad (۵.۲)$$

و

$$\begin{aligned}m\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(x)dx &\leq m\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(s)dx\\ &+ m\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} \frac{f(s+(mb-s)(\alpha+۱))-f(s)}{s+(mb-s)(\alpha+۱)-s}(x-s)dx\\ &= mf(s)(mb-s)(۱+\alpha)\\ &+ m\frac{f(s+(mb-s)(\alpha+۱))-f(s)}{(mb-s)(\alpha+۱)}\frac{(۱+\alpha)^{۲}(mb-s)^{۲}}{۲}\\ &= m(mb-a)(\alpha+۱)\left(\frac{f(s+(mb-s)(\alpha+۱))+f(s)}{۲}\right).\end{aligned}$$

دراین‌صورت

$$\frac{m}{(mb-s)(\alpha+۱)}\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)} f(x)dx \leq m\left(\frac{f(s)+f(s+(mb-s)(\alpha+۱))}{۲}\right). \quad (۶.۲)$$

حال با به‌کارگیری نامساوی‌های (۵.۲) و (۶.۲)

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{(۱+\alpha)(r-a)}\int_{r-(r-a)(۱+\alpha)}^{r}f(u)du+m\frac{۱}{(۱+\alpha)(mb-s)}\int_{s}^{s+(mb-s)(\alpha+۱)}f(u)du\right)$$
$$\leq\frac{f(r)+f(r-(r-a)(۱+\alpha))}{۲}+m\left(\frac{f(s)+f(s+(mb-s)(\alpha+۱))}{۲}\right).$$

□

نتیجه زیر با فرض $\alpha=۰$ قضیه ۱.۳ از [۲] را نتیجه می‌دهد.

نتیجه ۲.۲. فرض کنیم $m\in[۰,۱]$ و $C\subseteq\mathbb{R}$ و تابع $f:C\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع $m-$محدب روی بازه C باشد و $a,b\in C$. اگر برای هر r و s داشته باشیم $a+mb=r+s$. آن‌گاه،

$$f\left(\frac{a+mb}{۲}\right)\leq\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{r-a}\int_{a}^{r}f(u)du+m\frac{۱}{mb-s}\int_{s}^{mb}f(u)du\right)\tag{۷.۲}$$

و

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{r-a}\int_{a}^{r}f(u)du+m\frac{۱}{mb-s}\int_{s}^{mb}f(u)du\right)\leq\frac{f(r)+mf(s)}{۲}+\frac{f(a)+mf(mb)}{۲}.\tag{۸.۲}$$

نتیجه بعدی نتیجه ۲.۳ از مقاله [۲] است.

نتیجه ۳.۲. با فرضیات نتیجه ۲.۲ داریم:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{r-a}\int_{a}^{r}f(u)du+m\frac{۱}{mb-s}\int_{s}^{mb}f(u)du\right)\leq\frac{f(r)+f(a)}{۲}+m\frac{f(s)+mf(b)}{۲}.$$

اگر $r=s=\frac{a+mb}{۲}$ آن‌گاه،

نتیجه ۴.۲. با فرضیات نتیجه ۲.۲ داریم:

$$\left(\frac{۱}{mb-a}\int_{a}^{\frac{a+mb}{۲}}f(u)du+m\frac{۱}{mb-a}\int_{\frac{a+mb}{۲}}^{mb}f(u)du\right)\leq\frac{۱+m}{۴}f\left(\frac{a+mb}{۲}\right)+\frac{f(a)+m^{۲}f(b)}{۴}.$$

اگر $m=۱$ و $r=s=\frac{a+b}{۲}$ آن‌گاه،

نتیجه ۵.۲. با فرضیات نتیجه ۲.۲ داریم:

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\leq\frac{۱}{b-a}\int_{a}^{b}f(t)dt\leq\frac{f(a)+f(b)}{۴}+\frac{۱}{۲}f\left(\frac{a+b}{۲}\right).$$

ویرایش جدیدی از نتیجه ۲.۲ با $r=s=\frac{mb+a}{۲}$ به‌صورت زیر است.

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم $m\in[۰,۱]$ و $C\subseteq\mathbb{R}$ و تابع $f:C\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع $m-$محدب روی بازه C و $a,b\in C$ باشد. آن‌گاه

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+mb}{۲}\right)&\leq\frac{۱}{mb-a}\left(\int_{a}^{\frac{mb+a}{۲}}f(u)du+m\int_{\frac{mb+a}{۲}}^{mb}f(u)du\right)\\&\leq\frac{f(a)+mf(b)}{۲}\left(\frac{m+۱}{۴}\right)+\frac{f(a)+m^{۲}f(b)}{۴}\\&=\frac{(۳m+۱)(mf(b))+(m+۳)f(a)}{۸}.\end{aligned}$$

نتیجه ۷.۲. با فرضیات نتیجه ۶.۲:

$$\frac{1}{mb-a}\left(\int_a^{\frac{mb+a}{2}} f(u)du + m\int_{\frac{mb+a}{2}}^{mb} f(u)du\right) \leq \frac{(3m+1)(mf(b))+(m+3)f(a)}{8}.$$

اگر در نتیجه ۶.۲ $m=1$ بگیریم، آن‌گاه، نامساوی هرمیت - هادامارد (۱.۱) بدست می‌آید.

مثال ۸.۲. توجه داریم که

$$\begin{aligned}\frac{1}{mb-a}\left(\int_a^{\frac{mb+a}{2}} f(u)du + m\int_{\frac{mb+a}{2}}^{mb} f(u)du\right) &\leq \frac{1}{mb-a}\left(\int_a^{\frac{mb+a}{2}} f(u)du + \int_{\frac{mb+a}{2}}^{mb} f(u)du\right)\\ &= \frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(u)du\end{aligned}$$

اما

$$\frac{\int_a^{mb} f(x)dx}{mb-a} \not\leq \frac{(3m+1)(mf(b))+(m+3)f(a)}{8}.$$

فرض کنیم $b=3$ ،$a=0$ و $m=\frac{1}{2}$. در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & 0\leq x\leq 1;\\ \frac{1-x}{2}, & 1\leq x\leq 3.\end{cases}$$

$$\frac{\int_a^{mb} f(x)dx}{mb-a} = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 \frac{1-x}{2}dx\right) = \frac{7}{24}$$

درحالی‌که

$$\frac{(3m+1)(mf(b))+(m+3)f(a)}{8} = \frac{1}{8}\left((\frac{3}{2}+1)\frac{1}{2}f(3)+(\frac{1}{2}+3)f(0)\right) = \frac{9}{32}.$$

۳ نتیجه گیری

با اثبات قضیه اصلی ۱.۲ در این مقاله برای توابع $(\alpha,m)-$ محدب، می‌توان با فرض $\alpha=0$ نتایج، قبلی را برای توابع $m-$ محدب در مقاله [۲] به‌دست آورد و همچنین با فرض $\alpha=0$ و $m=1$ به نامساوی اصلی هرمیت - هادامارد (۱.۱) رسید.

فهرست منابع

[1] Gh. Amirbostaghi, M. Asadi, M.R. Mardanbeigi, m–Convex Structure on b–Metric Spaces, Filomat **35**(14) (2021) 4765-4776.

[2] M. Asadi, Gh. Amirbostaghi, Hermite-Hadamard (Hh) Integral Inequality for m-Convex Functions, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **23**(8) (2022) 1537-1544.

[3] M. K. Bakula, M. E. Özdemir, J. Pecaric, Hadamard type inequalities for m-convex and (α,m)-convex functions, Pure Appl. Math. **9**(4) (2008) Article ID 96.

[4] S. S. Dragomir, On some new inequalities of hermite-hadamard type for m-convex functions, Tamkang journal of mathematics **33**(1) (2002) 45–55.

[5] S.S. Dragomir, I. Gomm, Some Hermite–Hadamard type inequalities for functions whose exponentials are convex, Stud. Univ. Babe, s–Bolyai, Math. **60** (2015) 527–534.

[6] R. George, S. Radenovic, K. P. Reshma, S.Shukla, “ Rectangular b-metric spaces and contractio principle“, J. Nonlinear Sci. Appl. (2015) 8:10051013.

[7] T. Lara, E. Rosales, J. Sanchez, New Properties of m-convex functions, International Journal of Mathematical Analysis **9**(15) (2015) 735 - 742.

[8] V. G. Mihesan, A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, Romania (1993).

[9] S. Özcan, Hermite-Hadamard type inequalities for m–convex and (α, m)–convex function, Journal of Inequalities and Applications **175** (2020).

[10] S. Rashid, F. Safdar, A. O. Akdemir, M. A. Noor, K. I. Noor, Some new fractional integral inequalities forexponentially m–convex functions viaextended generalized Mittag–Leffler function, Journal of Inequalities and Applications (2019) 2019:299.

[11] S. Simić, B. Bin-Mohsin, Some generalizations of the Hermite-Hadamard integral inequality, J. Inequal. Appl. (2021) 2021:72. https://doi.org/10.1186/s13660–021–02605–y

[12] S. Simons, *From Hahn-Banach to Monotonicity*, Springer, Berlin, (2008).

[13] B. Simon, *Convexity: An Analytic Viewpoint*, Cambridge University Press, New York, (2011).

[14] G. Toader, The order of starlike convex function, Bull. Appl. Comp. Math. **85** (1998) 347–350.

[15] G. Toader, Some generalizations of the convexity, Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization, Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj–Napoca (Romania) (1985) 329–338.

HERMITE-HADAMARD INTEGRAL INEQUALITY FOR (α, m)-CONVEX FUNCTIONS

MEHDI ASADI †

Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran

Communicated by: Mohammadesmael Samei

Received: 2022/8/5 Accepted: 2022/12/28

Abstract: In this paper, after introducing the m-convexity by Toader, as an intermediate among the general convexity and star shaped property, we bring Hermite-Hadamard integral inequality on (α, m)-convex function in the new form. Previous results about the Hermite-Hadamard inequality for m-convex functions are part of the results of our theorems. Illustrated examples of (α, m)-convex and m-convex functions are also included in the article.

Keywords: Hermite-Hadamard integral inequality, m,-convex function, convex functions.

†Corresponding author.
E-mail addresses: masadi.azu@gmail.com (M. ASADI), me.masadi@iau.ac.ir