مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۴، ص ۵۲۳-۵۳۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.36648.1897

# ماتریس های زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته و مهتری

احمد محمدحسنی [×]، یامین سیاری

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی سیرجان

دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۷

چکیده: ماتریس مربعی و حقیقی $A$ یک ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته است هرگاه مجموع قدرمطلق درایه‌های هر سطر آن از یک بیش‌تر نباشد. برای دو بردار سطری (ستونی) $x$ و $y$، گوییم $y$ $B$-مهتر راست (چپ) $x$ است هرگاه ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته $A$ موجود باشد که $x = yA$ $(x = Ay)$ و می‌نویسیم $x \prec_{rB} y$ $(x \prec_{lB} y)$. ما دراین مقاله برای هر بردار سطری (ستونی) $y$ همه بردارهایی مانند $x$ را که $y$ $B$-مهتر راست (چپ) آن‌هاست پیدا کردیم. هم‌چنین ما ثابت کردیم $y \sim_{lB} x$ اگر و تنها اگر رابطه $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$ برقرار باشد و نشان دادیم $y \sim_{rB} x$ اگر و تنها اگر رابطه $\|x\|_۱ = \|y\|_۱$ برقرار باشد. علاوه براین نشان دادیم تحت شرایطی، $B$-مهتری راست معادل با مهتری راست است و هم‌چنین شرایطی را پیدا کردیم که تحت این شرایط $B$-مهتری چپ معادل با مهتری چپ است.

واژه‌های کلیدی: مهتری، $B$-مهتری، ماتریس زیرتصادفی سطری، ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته.

رده‌بندی ریاضی: 15A04; 15A21

## ۱ مقدمه و پیش‌گفتار

در این بخش مفهوم عمل روی یک فضای برداری را بیان کرده‌ایم، هم‌چنین مفهوم مهتری را که نیازمند یک عمل روی یک فضای برداری می‌باشد را توضیح داده‌ایم و ازآن‌جا که مهتری دارای تعمیم‌های بسیار و کاربردی است، در ادامه این بخش، اشاره‌ای به برخی از این تعمیم‌ها و نتایج داریم.

فرض کنیم $G$ یک گروه (نیم‌گروه) و $X$ یک مجموعه باشد. گوییم $G$ روی $X$ یک عمل از چپ است هرگاه یک نگاشت $\theta : G \times X \longrightarrow X$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱. اگر $e$ عضو همانی $G$ باشد، آن‌گاه $\theta(e, x) = x$ برای هر $x \in X$،

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: a.mohammadhasani53@gmail.com (A. Mohammadhasani), ysayyari@gmail.com (Y. Sayyari)

۲. اگر $g_1, g_2 \in G$، آن‌گاه

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$$

برای هر $x \in X$.

گروه $G$ یک رابطه هم‌ارزی روی $X$ به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

$$x \sim y \iff x = gy,\ \exists g \in G.$$

مدار نقطه $x \in X$ برابر با مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$O_G(x) = \{y \in X : y = gx,\ \exists g \in G\}.$$

سه‌تایی $(\theta, G, X)$ یک سیستم دینامیکی با فضای حالت $X$ و مجموعه زمان $G$ نامیده می‌شود.
به‌طور مشابه گوییم $G$ روی $X$ یک عمل از راست است هرگاه یک نگاشت $\theta : X \times G \longrightarrow X$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱. اگر $e$ عضو همانی $G$ باشد، آن‌گاه $\theta(x, e) = x$ برای هر $x \in X$،

۲. اگر $g_1, g_2 \in G$، آن‌گاه

$$\theta(\theta(x, g_1), g_2) = \theta(x, g_1 g_2)$$

برای هر $x \in X$.

گروه $G$ یک رابطه هم‌ارزی روی $X$ به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

$$x \sim y \iff x = yg,\ \exists g \in G.$$

مدار نقطه $x \in X$ برابر با مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$O_G(x) = \{y \in X : y = xg,\ \exists g \in G\}.$$

عمل روی یک مجموعه در هندسه منیفلد و میدان های برداری روی یک منیفلد و هم‌چنین در مبحث سیستم‌های دینامیکی کاربرد دارد.
اگر مجموعه $X$ یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد آن‌گاه هر عمل از چپ $G$ یک رابطه مهتری چپ $\prec_{lG}$ روی $X$ و هر عمل از راست $G$ یک رابطه مهتری از راست $\prec_{rG}$ روی $X$ ایجاد می‌کند که در ادامه آن‌ها را معرفی می‌کنیم.
فرض کنیم $X$ یک فضای برداری باشد. برای هر زیر مجموعه $W$ از $X$ غلاف محدب $W$ را با $\mathrm{conv(W)}$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{conv(W)} = \left\{ \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_i v_i} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{v_i} \in \mathrm{W}, 0 \leq \mathrm{r_i} \leq 1 \text{ و } \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_i} = 1 \right\}.$$

فرض کنیم $G$ یک عمل از راست (عمل از چپ) برای فضای برداری $X$ باشد. برای هر دو عضو $x, y \in X$ گوییم $y$ $G$-مهتر راست ($G$-مهتر چپ) $x$ است و می‌نویسیم $x \prec_{rG} y$ ($x \prec_{lG} y$) هرگاه $x \in \mathrm{conv(O_G(y))}$.
هرگاه $x \prec_{rG} y \prec_{rG} x$ ($x \prec_{lG} y \prec_{lG} x$) می‌نویسیم، $x \sim_{rG} y$ ($x \sim_{lG} y$). در صورتی که $X$ فضای برداری $n$-بعدی باشد و $G$ گروهی از ماتریس‌های متعامد، رابطه‌های مهتری نتایج جالبی را به‌دست می‌دهند که در جبر خطی مورد استفاده قرار می‌گیرند.
در این مقاله از نماد $M_{nm}$ برای نمایش فضای برداری همه‌ی ماتریسهای حقیقی $n \times m$ استفاده شده است، هم‌چنین $M_n := M_{nn}$.
فضای برداری همه‌ی بردارهای حقیقی $n \times 1$ ($1 \times n$) با نماد $\mathbb{R}_n$ ($\mathbb{R}^n$) نمایش داده شده است. مجموعه $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ای استاندارد برای فضای برداری $\mathbb{R}_n$ و مجموعه $\{e_1^t, \dots, e_n^t\}$ پایه‌ای استاندارد برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ است. نماد $e$ برای نمایش بردار

$\sum_{i=1}^{n} e_i$ استفاده می‌شود. برای هر ماتریس (بردار) $A = [a_{ij}]$، ماتریس (بردار) علامت به‌صورت $\mathrm{sign}[a_{ij}] = [\mathrm{sign}(a_{ij})]$ تعریف می‌شود که در آن

$$\mathrm{sign}(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & a_{ij} \geq 0, \\ -1 & a_{ij} < 0 \end{cases}$$

و منظور از $|A|$ ماتریس $|A| = [|a_{ij}|]$ است. برای هر بردار $y^* = y^t = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_n$ نرم یک ($\|.\|_1$) و نرم بینهایت ($\|.\|_\infty$) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\|y\|_\infty = \|y^*\|_\infty = \max\{|y_i| : 1 \leq i \leq n\},\ \|y\|_1 = \|y^*\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

**تعریف ۱.۱.** [۱۱] ماتریس حقیقی $D = [d_{ij}] \in M_n$ زیرتصادفی تعمیم‌یافته است، اگر برای هر $k = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} |d_{ik}| \leqslant 1$ و $\sum_{j=1}^{n} |d_{kj}| \leqslant 1$.

**تعریف ۲.۱.** [۶، ۱۴] ماتریس حقیقی و نامنفی $D = [d_{ij}] \in M_n$ تصادفی سطری است، اگر برای هر $k = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $\sum_{i=1}^{n} d_{ik} = 1$.

**تعریف ۳.۱.** [۱۵] برای $x = y^t = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Tr}_+(x) = \mathrm{Tr}_+(y) = \sum_{x_i \geq 0} x_i,\ \mathrm{Tr}_-(x) = \mathrm{Tr}_-(y) = \sum_{x_i < 0} x_i$$

و

$$\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(y) = \mathrm{Tr}_+(x) + \mathrm{Tr}_-(x).$$

فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{R}_n)$ و $x^{\downarrow} = y^{\downarrow t} = \left(x_1^{\downarrow}, \ldots, x_n^{\downarrow}\right)$ بردار به‌دست آمده با مولفه‌های $x$ باشد که به‌صورت نزولی مرتب شده اند، یعنی؛ $x_1^{\downarrow} \geq x_2^{\downarrow} \geq \ldots \geq x_n^{\downarrow}$. گوییم $y$ مهتر راست (چپ) $x$ است و با نماد $x \prec_r y$ ($x \prec_l y$) نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس تصادفی سطری $D \in M_n$ یافت شود به‌طوری که $x = yD$ ($x = Dy$). نماد $x \prec y$ بدین معنی است که

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} y_i^{\downarrow},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

و

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\downarrow} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\downarrow}.$$

مهتری، یکی از موضوعاتی است که در بسیاری از شاخه‌های جبرخطی، سیستم‌های دینامیکی، هندسه و آمار کاربرد دارد [۱۵] و تاکنون تعمیم‌های زیادی از مهتری معرفی شده است [۱]–[۵] (همچنین مراجع آن‌ها دیده شود) به‌علاوه، کارهای زیادی در این زمینه انجام شده است [۸] و [۱۲]–[۱۳]. نتایج زیر از جمله کارهای در این زمینه‌اند.

**گزاره ۴.۱.** [۹] فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_n$. آن‌گاه شرایط زیر هم‌ارزند:

۱. $x \sim_r y$.

۲. $\|x\|_1 = \|y\|_1$ و $\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(y)$.

**گزاره ۵.۱.** [۱۰] فرض کنیم $X, Y \in M_{n,m}$. آن‌گاه $X \prec_l Y$ اگروتنها اگر $\mathrm{conv}(R(X)) \subseteq \mathrm{conv}(R(Y))$، که در آن $R(A)$ مجموعه همه سطرهای مجزای $A$ است و $\mathrm{conv}(R(A))$ غلاف محدب آن‌هاست.

نتیجه **۶.۱.** فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$. آن‌گاه $x \prec_l y$ اگروتنها اگر

$$\min_{1\leq i\leq n} y_i \leq \min_{1\leq i\leq n} x_i \leq \max_{1\leq i\leq n} x_i \leq \max_{1\leq i\leq n} y_i.$$

نتیجه **۷.۱.** فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$. آن‌گاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. $x \sim_l y$.

۲. با فرض $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ و $y = (y_1, \dots, y_n)^t$

$$\min_{1\leq i\leq n} x_i = \min_{1\leq i\leq n} y_i \quad \text{و} \quad \max_{1\leq i\leq n} x_i = \max_{1\leq i\leq n} y_i$$

قضیه **۸.۱.** [۷] ماتریس $A$ تصادفی دوگانه است اگر و تنها اگر $Ax \prec x$ برای هر $x$.

قضیه **۹.۱.** [۷] فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$. گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱. $x \prec y$

۲. یک ماتریس تصادفی دوگانه $n \times n$ $D$ وجود دارد به‌طوریکه $x = Dy$.

## ۲ نتایج اصلی

در این بخش همه بردارهای $B$-مهتر چپ و همه بردارهای $B$- مهتر راست یک بردار معین را مشخص کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که رابطه هم‌ارزی که از $B$-مهتری چپ به‌دست می‌آید وابسته به نرم بینهایت و رابطه هم‌ارزی که از $B$-مهتری راست به‌دست می‌آید وابسته به نرم-۱ در فضای برداری $n$-بعدی است. هم‌چنین همه بردارهای سطری (ستونی) را که در آن‌ها $B$- مهتری چپ ($B$-مهتری راست) معادل با مهتری چپ (راست) است تعیین کرده‌ایم.

تعریف **۱.۲.** ماتریس حقیقی $R = [r_{ij}] \in M_n$ زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته است، اگر برای هر $i = 1, \dots, n$ داشته باشیم $\sum_{j=1}^{n} |r_{ij}| \leqslant 1$ .

تعریف **۲.۲.** الف) برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ گوییم $y$ $B-$مهتر ماتریسی چپ $x$ است و با نماد $x \prec_{lB} y$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته $R \in M_n$ یافت شود به‌طوری که $x = Ry$.
ب) برای هر $x, y \in \mathbb{R}_n$ گوییم $y$ $B-$مهتر ماتریسی راست $x$ است و با نماد $x \prec_{rB} y$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته $R \in M_n$ یافت شود به‌طوری که $x = yR$.

قضیه **۳.۲.** فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$. در این صورت، $x \prec_{lB} y$ اگر و فقط اگر $\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty$.

اثبات. فرض کنیم $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ و $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ دو بردار در $\mathbb{R}^n$ باشند.
ابتدا فرض می‌کنیم $x \prec_{lB} y$. در این صورت ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته $R = [r_{ij}] \in M_n$ موجود است به‌طوری که $x = Ry$. بنابراین، برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} |x_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |r_{ij} y_j| \\ &\leq \|y\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |r_{ij}| \leq \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

در نتیجه $\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty$.

به‌عکس: فرض کنیم $\|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty$. واضح است که عدد صحیح $r$ ($۱ \leq r \leq n$) وجود دارد به‌طوری که $\|y\|_\infty = |y_r|$. بدیهی است که

$$|x_i| \leq \|x\|_\infty \leq \|y\|_\infty = |y_r|, \; \forall\, i \in \{۱, \dots, n\}.$$

اگر $y_r = ۰$، آن‌گاه $y = \bar{o}$، لذا $x = \bar{o}$ و $x = I_n y$، که برهان تمام است (منظور از $\bar{o}$ بردار $n$–بعدی با درایه‌های صفر است). در صورتی که $y_r \neq ۰$، ماتریس $R$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_{nn} = [r_{ij}] = \left[\frac{x_i \delta_{jr}}{y_r}\right]$$

که در آن $\delta_{ij}$ تابع دلتای کرونیکر به‌صورت زیر است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } i = j \\ ۰ & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

ماتریس $R$ زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته است زیرا؛

$$\sum_{j=۱}^{n} |r_{ij}| = \sum_{j=۱}^{n} \left|\frac{x_i \delta_{jr}}{y_r}\right| = \frac{|x_i|}{|y_r|} \leq ۱.$$

از طرفی داریم

$$(Ry)_i = \sum_{j=۱}^{n} r_{ij} y_j = \sum_{j=۱}^{n} \frac{x_i \delta_{jr}}{y_r} y_j = x_i$$

لذا $Ry = x$، یعنی $x \prec_{lB} y$. □

قضیه **۴.۲**. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_n$. در این صورت $x \prec_{rB} y$ اگر و تنها اگر $\|x\|_۱ \leq \|y\|_۱$.

اثبات. فرض کنیم $x = (x_۱, \dots, x_n)$ و $y = (y_۱, \dots, y_n)$ دو بردار در $\mathbb{R}_n$ باشند و $x \prec_{rB} y$ در این صورت ماتریس زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته $R = [r_{ij}]$ وجود دارد که $x = Ry$. لذا

$$\begin{aligned} \|x\|_۱ &= \sum_{j=۱}^{n} |x_j| = \sum_{j=۱}^{n} \left|\sum_{i=۱}^{n} y_i r_{ij}\right| \\ &\leq \sum_{j=۱}^{n} \sum_{i=۱}^{n} |y_i r_{ij}| \leq \sum_{i=۱}^{n} (|y_i| \sum_{j=۱}^{n} |r_{ij}|) \\ &\leq \sum_{i=۱}^{n} |y_i| = \|y\|_۱ \end{aligned}$$

به‌عکس: فرض کنیم $\|x\|_۱ \leq \|y\|_۱$. اگر $\|y\|_۱ = ۰$، آن‌گاه $\|x\|_۱ = ۰$ لذا $x = y = \bar{o}$، پس $x = yI_n$ و حکم برقرار است. در صورتی که $\|y\|_۱ \neq ۰$، تعریف می‌کنیم:

$$R := \frac{۱}{\|y\|_۱} (\mathrm{sign(y)})^{\mathrm{t}} \mathrm{x}$$

ماتریس $R$ زیرتصادفی سطری تعمیم‌یافته است زیرا؛

$$\begin{aligned} \sum_{j=۱}^{n} |r_{ij}| &= \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{\|y\|_۱} |(\mathrm{sign(y_i)}) \mathrm{x_j}| \\ &= \frac{\|x\|_۱}{\|y\|_۱} \leq ۱. \end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} yR &= y(\|y\|_{۱}^{-۱}(\mathrm{sign(y)})^{\mathrm{t}}\mathrm{x}) \\ &= \|y\|_{۱}^{-۱}y(\mathrm{sign(y)})^{\mathrm{t}}\mathrm{x} \\ &= \|y\|_{۱}^{-۱}\|y\|_{۱}x = x \end{aligned}$$

در نتیجه $x \prec_{rB} y$. □

تعریف **۵.۲**. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$.

آ) گوییم $y \sim_{lB} x$ هرگاه $y \prec_{lB} x$ و $x \prec_{lB} y$.

ب) گوییم $y \sim_{rB} x$ هرگاه $y \prec_{rB} x$ و $x \prec_{rB} y$.

نتیجه **۶.۲**. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$.

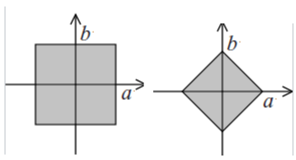
آ) $y \sim_{lB} x$ اگر و تنها اگر $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$.

ب) $y \sim_{rB} x$ اگر و تنها اگر $\|x\|_{۱} = \|y\|_{۱}$.

اثبات. آ) اثبات از قضیه (۳.۲) نتیجه می‌شود.

ب) اثبات از قضیه (۴.۲) نتیجه می‌شود. □

مثال **۷.۲**. فرض کنیم $(a, b)^t \in \mathbb{R}^{۲}$. آن‌گاه $\{x \in \mathbb{R}^{۲} : x \prec_{rB} (a, b)^t\}$ و $\{x \in \mathbb{R}^{۲} : x \prec_{lB} (a, b)^t\}$ به‌صورت زیر است.




شکل ۱: $x \prec_{rB} (a, b)^t$ و $x \prec_{lB} (a, b)^t$

تعریف **۸.۲**. ماتریس حقیقی با درایه‌های نامنفی $A = [a_{ij}] \in M_n$ را تصادفی سطری می‌نامیم اگر برای هر $i = ۱, \ldots, n$ داشته باشیم $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = ۱$ .

تعریف **۹.۲**. الف) برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ گوییم $y$ مهتر ماتریسی چپ $x$ است و با نماد $x \prec_l y$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس تصادفی سطری $A \in M_n$ یافت شود به‌طوری که $x = Ay$.
ب) برای هر $x, y \in \mathbb{R}_n$ گوییم $y$ مهتر ماتریسی راست $x$ است و با نماد $x \prec_r y$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس تصادفی سطری $A \in M_n$ یافت شود به‌طوری که $x = yA$.

قضیه **۱۰.۲**. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_n$. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

۱. $x \prec_r y$،

۲. $\|x\|_{۱} \leq \|y\|_{۱}$ و $\mathrm{Tr(x)} = \mathrm{Tr(y)}$،

۳. $x \prec_{rB} y$ و $\mathrm{Tr(x)} = \mathrm{Tr(y)}$.

اثبات. ۲ $\longrightarrow$ ۱: فرض کنیم $x,y\in\mathbb{R}_n$ و $x\prec_r y$ بدیهی است که $x\prec_{rB} y$ و لذا بنابر قضیه ۴.۲ $\|x\|_۱\leq\|y\|_۱$. اکنون ثابت می‌کنیم $\mathrm{Tr}(x)=\mathrm{Tr}(y)$ . فرض کنیم $\alpha(x)=\mathrm{Tr}_+(x)e_1+\mathrm{Tr}_-(x)e_2$ که در آن $\mathrm{Tr}_+(x)$ و $\mathrm{Tr}_-(x)$ در تعریف ۳.۱ آورده شده‌اند. ابتدا نشان می‌دهیم $x\sim_r\alpha(x)$. برای این منظور ماتریس $A$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}A_۱\\A_۲\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}$$

که در آن

$$A_i=\begin{cases}e_۱,\ x_i\leq ۰ & \text{اگر}\\ e_۲,\ x_i>۰ & \text{اگر}\end{cases}$$

واضح است که $A$ تصادفی سطری است و $\alpha(x)=xA$. از طرفی اگر ماتریس $B$ را به‌صورت زیر در نظر بگیریم

$$B=\begin{bmatrix}B_۱\\B_۲\\\vdots\\B_n\end{bmatrix}$$

که در آن

$$B_i=\begin{cases}\frac{۱}{\mathrm{Tr}_-(x)}\sum_{x_j<۰}x_je_j, & i=۱ \text{ اگر}\\ \frac{۱}{\mathrm{Tr}_+(x)}\sum_{x_j>۰}x_je_j, & i=۲ \text{ اگر}\\ e_۱, & i\neq ۱,۲ \text{ اگر}\end{cases}$$

آن‌گاه $B$ یک ماتریس تصادفی سطری است و $x=\alpha(x)B$. بنابراین $x\sim_r\alpha(x)$.
اگر $x\prec_r y$، آن‌گاه $\alpha(x)\prec_r\alpha(y)$. لذا یک ماتریس تصادفی سطری مانند $R=[r_{ij}]$ وجود دارد که

$$\alpha(x)=\alpha(y)R \tag{۱.۲}$$

بنابراین

$$\mathrm{Tr}_+(x)=\mathrm{Tr}_+(y)r_{11}+\mathrm{Tr}_-(y)r_{21} \tag{۲.۲}$$

و درنتیجه $\mathrm{Tr}_+(x)\leq\mathrm{Tr}_+(y)$. همین طور از رابطه (۱.۲) داریم:

$$\mathrm{Tr}_-(x)=\mathrm{Tr}_+(y)r_{12}+\mathrm{Tr}_-(y)r_{22} \tag{۳.۲}$$

و لذا $\mathrm{Tr}_-(x)\geq\mathrm{Tr}_-(y)$. بنابراین

$$\|x\|_۱=\mathrm{Tr}_+(x)-\mathrm{Tr}_-(x)\leq\mathrm{Tr}_+(y)-\mathrm{Tr}_-(y)=\|y\|_1,$$

علاوه بر آن اگر $k\neq ۱,۲$، آن‌گاه از (۱.۲) داریم:

$$۰=\mathrm{Tr}_+(y)a_{1k}+\mathrm{Tr}_-(y)a_{2k}. \tag{۴.۲}$$

با جمع رابطه‌های (۲.۲)، (۳.۲) و (۴.۲) نتیجه می‌شود $\mathrm{Tr}_+(x)+\mathrm{Tr}_-(x)=\mathrm{Tr}_+(y)+\mathrm{Tr}_-(y)$ و بنابراین $\mathrm{Tr}(x)=\mathrm{Tr}(y)$.

۱ $\longrightarrow$ ۲: اگر $\|y\|_1 = 0$ آن‌گاه $\|x\|_1 = 0$ و $x = yI_n$. در غیر این صورت از $\|x\|_1 \leq \|y\|_1$ و $\mathrm{Tr(x)} = \mathrm{Tr(y)}$ نتیجه می‌شود

$$\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{x}) \leq \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y}) \tag{۵.۲}$$

و

$$\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) + \mathrm{Tr}_-(\mathrm{x}) = \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) + \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y}) \tag{۶.۲}$$

و با جمع کردن طرفین روابط (۵.۲) و (۶.۲) نتیجه می‌گیریم $\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) \leq \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y})$ و $\mathrm{Tr}_-(\mathrm{x}) \geq \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})$. اکنون ماتریس $A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})-\mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})}{\|y\|_1} & \frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{y})-\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})}{\|y\|_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{y})-\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})}{\|y\|_1} & \frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})-\mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})}{\|y\|_1} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس $A$ یک ماتریس تصادفی سطری است زیرا؛

$$\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y}) \leq \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})$$

و

$$\mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) \leq \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})$$

و

$$\frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})}{\|y\|_1} + \frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})}{\|y\|_1} = 1.$$

هم‌چنین داریم:

$$\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) = \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y})\frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})}{\|\mathrm{y}\|_1} + \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})\frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})}{\|\mathrm{y}\|_1}$$

و

$$\mathrm{Tr}_-(\mathrm{x}) = \mathrm{Tr}_+(\mathrm{y})\frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{y}) - \mathrm{Tr}_+(\mathrm{x})}{\|\mathrm{y}\|_1} + \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})\frac{\mathrm{Tr}_+(\mathrm{x}) - \mathrm{Tr}_-(\mathrm{y})}{\|\mathrm{y}\|_1}$$

لذا $\alpha(x) = \alpha(y)A$. بنابراین $\alpha(x) \prec_r \alpha(y)$ و در نتیجه $x \prec_r y$.

۳ $\longleftrightarrow$ ۲: هم‌ارزی گزاره‌های ۲ و ۳ از قضیه ۴.۲ واضح است. □

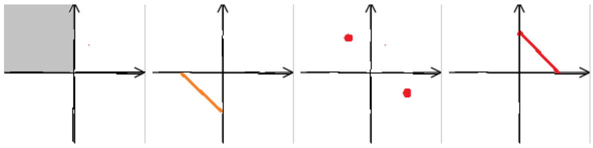
**نتیجه ۱۱.۲.** فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}_n$. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

۱. $x \sim_r y$.

۲. $\|x\|_1 = \|y\|_1$ و $\mathrm{Tr(x)} = \mathrm{Tr(y)}$.

۳. $x \sim_{rB} y$ و $\mathrm{Tr(x)} = \mathrm{Tr(y)}$.

**مثال ۱۲.۲.** فرض کنیم $\bar{o} \neq y \in \mathbb{R}_2$، مجموعه $\{x \in \mathbb{R}_2 | x \sim_r y\}$ در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲: $x \sim_r y$ و $\frac{\mathbb{R}_2}{\sim_r}$ .

**قضیه ۱۳.۲.** فرض کنیم $x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

۱. $x \sim_l y$.

۲. $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$ و

$$\max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i + \min_{1\le i\le n} y_i.$$

۳. $x \sim_{lB} y$ و

$$\max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i + \min_{1\le i\le n} y_i.$$

اثبات. ۲ $\longrightarrow$ ۱ : فرض کنیم $x \sim_l y$ پس $x \sim_{lB} y$ و بنا بر قضیه ۳.۲ $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$. همچنین بنابر گزاره ۵.۱ داریم:

$$\min_{1\le i\le n} x_i = \min_{1\le i\le n} y_i \text{ و } \max_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i.$$

پس

$$\max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i + \min_{1\le i\le n} y_i.$$

۱ $\longrightarrow$ ۲ : فرض کنیم $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$ و

$$M(x,y) := \max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i + \min_{1\le i\le n} y_i \tag{۷.۲}$$

اگر $M(x,y) \ge 0$، آن‌گاه از تساوی‌های

$$\|x\|_\infty = \begin{cases} \max_{1\le i\le n} x_i, & \max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i \ge 0 \text{ اگر} \\ -\min_{1\le i\le n} x_i, & \max_{1\le i\le n} x_i + \min_{1\le i\le n} x_i < 0 \text{ اگر} \end{cases} \tag{۸.۲}$$

و

$$\|y\|_\infty = \begin{cases} \max_{1\le i\le n} y_i, & \max_{1\le i\le n} y_i + \min_{1\le i\le n} y_i \ge 0 \text{ اگر} \\ -\min_{1\le i\le n} y_i, & \max_{1\le i\le n} y_i + \min_{1\le i\le n} y_i < 0 \text{ اگر} \end{cases} \tag{۹.۲}$$

و از این که $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$ نتیجه می‌شود:

$$\max_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i$$

و از تساوی (۷.۲) نتیجه می‌شود:

$$\min_{1\le i\le n} x_i = \min_{1\le i\le n} y_i.$$

لذا بنابر گزاره ۵.۱ $x \sim_l y$. اگر $M(x,y) < 0$ از تساوی‌های (۸.۲) و (۹.۲) و اینکه $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$ نتیجه می‌شود

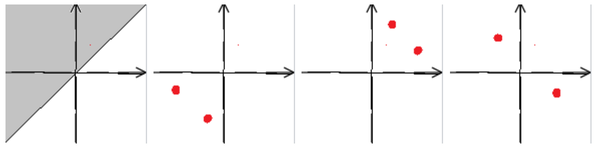
$$\min_{1\le i\le n} x_i = \min_{1\le i\le n} y_i$$

و از تساوی (۷.۲) نتیجه می‌شود:

$$\max_{1\le i\le n} x_i = \max_{1\le i\le n} y_i.$$

لذا بنابر گزاره ۵.۱ $x \sim_l y$.

۳ $\longleftrightarrow$ ۲ : هم‌ارزی گزاره‌های ۲ و ۳ بنابر قضیه ۳.۲ واضح است. □



شکل ۳: $y \sim_l x$ و $\frac{\mathbb{R}^2}{\sim_l}$.

**مثال ۱۴.۲.** فرض کنیم $\bar{o} \neq y \in \mathbb{R}^2$، مجموعه $\{x \in \mathbb{R}^2 | x \sim_l y\}$ در شکل ۳ نشان داده شده است.

**گزاره ۱۵.۲.** فرض کنیم $x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$ و $y_1^{\downarrow} + y_n^{\downarrow} = 0$ در این صورت

۱. $x \prec_{lB} y$ اگروتنها اگر $x \prec_l y$؛

۲. $x \sim_{lB} y$ اگروتنها اگر $x \sim_l y$.

اثبات. ۱. اگر $x \prec_l y$، آن‌گاه بدیهی است که $x \prec_{lB} y$. اگر $x \prec_{lB} y$ و $y_1^{\downarrow} + y_n^{\downarrow} = 0$ ، آن‌گاه داریم $y_n^{\downarrow} \leq x_i \leq y_1^{\downarrow}$ برای هر $1 \leq i \leq n$، پس بنا بر گزاره ۵.۱، $x \prec_l y$.

۲. با توجه به قسمت اول اثبات واضح می‌باشد.

□

# ۳ نتیجه گیری

هر گروه یا نیم‌گروه $G$ همراه با یک عمل روی یک فضای برداری $X$ یک رابطه مهتری ایجاد می‌کند، که در هندسه منیفلد، سیستم‌های دینامیکی و جبر خطی اهمیت ویژه‌ای دارد. نیم‌گروه ماتریس‌های تصادفی سطری یک رابطه مهتری روی بردارهای سطری (ستونی) $n-$ بعدی ایجاد می‌کنند، که ما در این مقاله آن را رابطه مهتری راست (چپ) نامیده‌ایم و نیم‌گروه ماتریس‌های زیرتصادفی سطری نیز یک رابطه مهتری روی بردارهای $n-$ بعدی سطری (ستونی) ایجاد می‌کند، که ما در این مقاله آن را رابطه $B-$مهتری راست (چپ) نامیده‌ایم. در این مقاله همه بردارهای $B-$مهتر راست (چپ) یک بردار سطری (ستونی) را پیدا کرده‌ایم. هم‌چنین ارتباط بین رابطه مهتری راست (چپ) را با رابطه $B-$مهتری راست (چپ) به‌دست آورده‌ایم.

## فهرست منابع


[۱] ع. آرمندنژاد، مروری بر مهتری‌های عادی و تعمیم‌یافته و بررسی ساختار نگه‌دارنده‌های خطی آن‌ها، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۴۵** (۱۳۸۹) ۴۰-۳۱.

[۲] ا. محمدحسنی، ی. سیاری و م. سبزواری، نگه‌دارنده‌های خطی راست–چپ ماتریسی، موجک‌ها و جبر خطی، **۸** (۳) (۱۴۰۱) ۵۹-۳۷.

[3] A. Armandnejad and Z. Gashool, Strong linear preservers of g-tridiagonal majorization on $\mathbb{R}^n$. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **123** (2012) 115-121.

[4] A. Armandnejad, S. Mohtashami, and M. Jamshidi, On linear preservers of g-tridiagonal majorization on $\mathbb{R}^n$. *Linear Algebra and its Applications*, **459** (2014) 145-153.

[5] R. Bahatia, Matrix Analysis. *Springer-Verlag, New York*, 1997.

[6] L. B. Beasley, S-G. Lee and Y-H Lee, A characterization of strong preservers of matrix majorization. *Linear Algebra and its Applications*, **367** (2003) 341-346.

[7] R. A. Brualdi and G. Dahl, An extension of the polytope of doubly stochastic matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **6** (3) (2013) 393-408.

[8] H. Chiang and C. K. Li, Generalized doubly stochastic matrices and linear preservers. *Linear and Multilinear Algebra*, **53** (2005) 1-11.

[9] G. Dahl, Matrix majorization, Linear Algebra Appl., **288** (1999) 53-73.

[10] Francisco D. Martínez Pería, Pedro G. Massey, Luis E. Silvestre, Weak matrix majorization, Linear Algebra and its Applications **403** (2005) 343–368.

[11] M.H. Hadian, A. Armandnejad, $B$-majorization and its linear preservers, Linear Algebra and its Application, **478** (2015) 218-227.

[12] A. M. Hasani, A. Ilkhanizadeh Manesh, Linear preservers of two-sided right matrix majorization on $\mathbb{R}_n$, Adv. Oper. Theory, **3** (2018) 1-8

[13] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, The structure of linear operators strongly preservingmajorizations of matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **15** (2006) 260-268.

[14] M. Marcus, All linear operators leaving the unitary group invariant, Duke Math. J. **26** (1959) 155-163.

[15] A. W. Marshall, I. Olkin, and B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of majorization and its applications*. Springer, New York, 2011.

# Generalized row substochastic matrices and majorization

**Ahmad Mohammadhasani** [†] **, Yamin Sayyari**

Department of Mathematics, Sirjan University Of Technology, Sirjan, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamollaei

Received: 2021/3/11 Accepted: 2022/12/28

**Abstract:** The square and real matricx $A$ is called a generalized row substochastic matrix, if the sum of the absolute values of the entries in each row is less than or equal to one. Let $x, y \in \mathbb{R}^n$. We say that $x$ is right $B$-majorized (resp. left $B$-majorized) by $y$, denoted by $x \prec_{rB} y$ ($x \prec_{lB} y$), if there exists a substochastic matrix $D$, such that $x = yD$ (resp. $x = Dy$). In this article, we have found all the vectors such as $x$ that $x$ is right $B$-majorized (resp. left $B$-majorized) by $y$, for all row vector $y$ (resp. column vector). Also, we show $x \sim_{lB} y$ if and only if $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$ and prove $x \sim_{rB} y$ if and only if $\|x\|_1 = \|y\|_1$. We have also created conditions in which the left $B$-majorization is equivalent to the left majorization, and created conditions in which the right $B$-majorization is equivalent to the right majorization.

**Keywords**: Majorization, B-majorization, Row substochastic matrix, Generalized row substochastic matrix.

©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[†]Corresponding author.

*E-mail addresses:* a.mohammadhasani53@gmail.com (A. Mohammadhasani), ysayyari@gmail.com (Y. Sayyari).