مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۴، ص ۵۴۸-۵۵۶

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2023.40315.2021

ساخت یک ماتریس با مقادیر ریتز معلوم از مرتبه کوچک‌تر یا مساوی سه

علی‌محمد نظری [×]، عطیه نظامی

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ایران،کدپستی ۸۹۴۳ − ۳۸۱۵۶

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۲/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۲۲

چکیده: مقادیر ریتز یک ماتریس، مجموعه کلیه مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی پیش‌روی آن است. در این مقاله با فرض معلوم بودن مجموعه مقادیر ریتز از بعد حداکثر سه، ماتریسی می‌یابیم به‌گونه‌ای که مجموعه معلوم، مجموعه مقادیر ریتز ماتریس یافت‌شده باشد. هم‌چنین شرایط وجود جواب، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: مقادیر ریتز، ماتریس سه‌قطری متقارن، مسئله مقدار ویژه معکوس.

رده‌بندی ریاضی: 15A18; 15A29

۱ مقدمه

مجموعه مقادیر ریتز یک ماتریس $n \times n$ مجموعه‌ای است که اعضای آن مجموعه مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی پیش‌رو برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$اند. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه مجموعه مقادیر ریتز آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$R(A) = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۲۲}; \lambda_{۱۳}, \lambda_{۲۳}, \lambda_{۳۳}; \cdots; \lambda_{۱n}, \cdots, \lambda_{nn}\}, \tag{۱.۱}$$

که در آن عبارت بین سمیکالن $(i-۱)$ام و iام مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌رو از مرتبه i برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ است. پارلت[†] و استرانگ[‡] در [۴] دو سوال اساسی مطرح کردند:

۱. آیا برای یک مجموعه دل‌خواه از اعداد حقیقی به شکل (۱.۱) ماتریس متقارنی وجود دارد که مجموعه داده‌شده مقادیر ریتز آن باشد؟

۲. آیا برای یک مجموعه مختلط از مقادیر ریتز ماتریس حقیقی وجود دارد؟

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: a-nazari@araku.ac.ir (A.M. Nazari), atiyeh.nezami@gmail.com (A. Nezami)

[†]Parlett
[‡]Strang

سوالات مطرح‌شده فوق سوالات جالبی‌اند و نویسندگان آن مقاله موفق به یافتن یک ماتریس سه‌قطری متقارن شدند که مقادیر ریتز آن از قبل داده شده باشد و در حالت نامتقارن توانستند یک ماتریس هسنبرگی یکتایی بیابند که مقادیر ریتز آن معلوم باشد. در این مقاله برای ما نیز همان سوالات بالا مطرح و سعی داریم ماتریس متقارن یا نامتقارن برای مقادیر ریتز معلوم بیابیم. در سال ۲۰۱۴ نظری و افشاری حالت خاصی از مقادیر ریتز معلوم برای ماتریس متقارن نامنفی را طی الگوریتمی حل نمودند[۳]. لازم‌به‌ذکر است که یافتن ماتریس نامنفی برای مجموعه مقادیر ریتز داده شده وقتی‌که $n \geq ۳$ اگر غیرممکن نباشد، بسیار سخت می‌گردد. دلیل این مطلب آن است که اولاً مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی تا کنون برای حالت $n = ۴$ به‌طور کامل حل شده است و برای $n \geq ۵$ در حالت کلی باز است. درثانی اگر فرض کنیم یک مجموعه دل‌خواه از مقادیر ریتز به‌شکل (۱.۱) برای $n = ۴$ داشته باشیم و بخواهیم از بعد $n = ۳$ به بعد $n = ۴$ برویم باید ۷ درایه نامنفی $a_{۱۴}, a_{۲۴}, a_{۳۴}, a_{۴۴}, a_{۴۱}, a_{۴۲}, a_{۴۳}$، را در ماتریس

$$A_۴ = \begin{pmatrix} & & & a_{۱۴} \\ & A_۳ & & a_{۲۴} \\ & & & a_{۳۴} \\ a_{۴۱} & a_{۴۲} & a_{۴۳} & a_{۴۴} \end{pmatrix},$$

بیابیم (و فرض بر این است که ماتریس نامنفی $A_۳$ با سه مقدار ریتز اول حاصل شده است) که مجموعه مقادیر ویژه‌اش چهار مقدار ویژه داده شده معلوم انتهایی در مجموعه $R(A_۴)$ باشد. درایه $a_{۴۴}$ به‌سادگی قابل محاسبه است زیرا جمع مقادیر ویژه با اثر ماتریس برابر است و از این معادله این مجهول محاسبه می‌گردد. برای محاسبه بقیه مجهولات ماتریس فوق از چندجمله‌ای مشخصه کمک می‌گیریم؛ یعنی بسط $\det(A_۴ - \lambda I_۴)$ را یافته و مساوی طرف دوم عبارت زیر قرار داده و ضرایب جملات هم‌توان λها را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\det(A_۴ - \lambda I_۴) = (\lambda - \lambda_{۱۱})(\lambda - \lambda_{۱۲})(\lambda - \lambda_{۱۳})(\lambda - \lambda_{۱۴}),$$

در این صورت باید از چهار معادله غیرخطی (ضریب $\lambda^۴$ در هر دو طرف برابر با یک است)، شش مجهول نامنفی را بیابیم که حل این مسئله به‌هیچ‌عنوان حتی با نرم‌افزارهای Matlab و Maple و استفاده از روش‌های عددی نیز ساده نخواهد بود. برای $n \geq ۵$ با افزایش ابعاد مسئله، و این‌که مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی در حالت کلی حل نشده است، حل آن به‌غایت مشکل می‌شود.

می‌دانیم ماتریس سه‌قطری متقارن، ماتریسی متقارن و مربعی چون $A = (a_{ij})$ است که در شرط زیر صدق نماید:

$$a_{ij} = ۰, \quad |i - j| > ۱.$$

نکته مهمی که باید در نظر داشته باشیم این است که مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی پیش‌رو ماتریس‌های سه‌قطری متقارن در خاصیت تداخلی کوشی صدق می‌کنند؛ به‌عبارت دیگر برای مجموعه (۱.۱) رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\lambda_{۱,j+۱} \leq \lambda_{۱j} \leq \lambda_{۲,j+۱} \leq \lambda_{۲j} \leq \ldots \leq \lambda_{j+۱,j+۱}, \qquad (۲.۱)$$

که در آن $\lambda_{۱j}, \lambda_{۲j}, \cdots, \lambda_{jj}$ مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌رو jام و $\lambda_{۱,j+۱}, \lambda_{۲,j+۱}, \cdots, \lambda_{j+۱,j+۱}$ مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌روی $j + ۱$ام است.

نکته حائز اهمیت این است که مسئله مورد نظر ما به نوعی یک مسئله مقدار ویژه معکوس است؛ که از سال ۱۹۳۷ نوع خاص و پیچیده‌تر آن مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی مورد نظر ریاضیدانان جبرخطی بوده است. شاید بتوان به نوعی مسئله را، مسئله مقادیر ریتز معکوس نام‌گذاری کرد. برای آشنایی با تاریخچه مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی [۲] دیده‌شود. در همان‌جا نیز تا حدودی به تاریخچه مسئله مقادیر ریتز نیز اشاره‌ای شده است.

اگرچه در [۳] مسئله برای ابعاد دل‌خواه حل شده است، اما مسئله مقادیر ریتز با شرط تداخلی (۲.۱) را فقط زمانی می‌توانیم مورد استفاده قرار دهیم که ماتریس مورد نظر یک ماتریس سه‌قطری متقارن باشد و در حالت ماتریس نامتقارن یا حالت متقارن غیرسه‌قطری این شرط مهم و کارساز را نخواهیم داشت، اما واضح است که برای حالت $n = ۲$ و متقارن این شرط برقرار است. ما ابتدا حالت نامتقارن این حالت را مطرح و مسئله را برای حالت متقارن و نامتقارن برای $n = ۳$ حل کرده و سعی در ارائه شرایط و الگوریتمی خواهیم داشت که با کمک آن به‌توان مسئله را در ابعاد بالاتر حل نمود. با الگوریتم ارائه شده در [۳] مسئله ما برای $n = ۱, ۲$ حل می شود، به‌شرطی که داشته باشیم $\lambda_{۱۱} \geq ۰$. یعنی

$$A_۱ = (\lambda_{۱۱}),$$

با تک مقدار ریتز $R_۱ = \{\lambda_{۱۱}\}$ و

$$A_۲ = \begin{pmatrix} \lambda_{۱۱} & \sqrt{(\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۱})(\lambda_{۱۱} - \lambda_{۱۲})} \\ \sqrt{(\lambda_{۲۲} - \lambda_{۱۱})(\lambda_{۱۱} - \lambda_{۱۲})} & \lambda_{۲۲} + \lambda_{۱۲} - \lambda_{۱۱} \end{pmatrix}, \qquad (۳.۱)$$

یک ماتریس 2×2 نامنفی با مجموعه مقادیر ریتز $R_2 = \{\lambda_{11}; \lambda_{12}, \lambda_{22}\}$ جواب مسئله خواهد بود. اگر $\lambda_{11} < 0$ در این صورت واضح است که شرط نامنفی بودن خودبه‌خود از بین خواهد رفت ولی با همان الگوریتم جواب فوق خوش‌تعریف است؛ زیرا در صورت نامثبت شدن λ_{11}، مقدار λ_{12} نیز به‌خاطر خاصیت تداخلی کوشی (ماتریس 2×2 متقارن خودش یک ماتریس سه‌قطری متقارن است) نامثبت شده و زیر رادیکال نامنفی شده و ماتریس A_2 خوش‌تعریف خواهد بود. هم‌چنین اگر هر سه مقدار ریتز مجموعه R_2 منفی باشند با استدلالی کاملاً مشابه، ماتریس A_2 خوش‌تعریف خواهد بود. پس جواب ارائه‌شده در [3] برای $n = 1, 2$ مسئله را در حالت متقارن حل خواهد کرد.
برای حالت نامتقارن ماتریس جواب دارای شکل زیر است:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & a \\ b & c \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

حال سه مجهول a، b و c را به‌گونه‌ای می‌یابیم که $\{\lambda_{12}, \lambda_{22}\}$ مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A_2 باشد. چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس به‌صورت

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_{11})(\lambda - c) - ab = \lambda^2 - (\lambda_{11} + c)\lambda + \lambda_{11}c - ab = 0,$$

است. اگر قرار باشد یک ماتریس حقیقی بیابیم، درایه λ_{11} باید یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه با توجه به این که ریشه‌های معادله فوق λ_{12} و λ_{22} هستند با در نظر گرفتن خواص معادله درجه دوم این مجهولات را می‌یابیم. در این صورت c از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda_{12} + \lambda_{22} = \lambda_{11} + c. \tag{5.1}$$

از طرف دیگر از رابطه‌ی

$$\lambda_{12}\lambda_{22} = \lambda_{11}c - ab \tag{6.1}$$

با توجه به معلوم شدن c از رابطه (5.1) می‌توان دو مجهول a و b را به‌دست آورد. واضح است که جواب می‌تواند منحصربه‌فرد نباشد. به‌عنوان مثال مجموعه $R_2 = \{3; 6 + i, 6 - i\}$ را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم ماتریسی 2×2 بیابیم که R_2 مجموعه مقادیر ریتز آن باشد. ماتریس جواب را به‌شکل (4.1) در نظر می‌گیریم. از معادله (5.1) داریم $c = 9$. هم‌چنین از معادله (6.1) خواهیم داشت $ab = -10$، که واضح است مسئله در این حالت دارای بی‌نهایت جواب است. به‌عنوان نمونه یکی از جواب‌ها دارای شکل زیر است:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

پس جواب سوال ۲ در ابتدای مقدمه برای $n = 2$ مثبت است؛ یعنی برای یک مجموعه مختلط از مقادیر ریتز توانستیم یک ماتریس حقیقی به‌شکل فوق بیابیم. هم‌چنین لازم‌به‌ذکر است که مسئله در این حالت فاقد جواب به‌عنوان یک ماتریس نامنفی است؛ زیرا برای ماتریس 2×2 و نامنفی، باید یک مقدار ویژه حقیقی و مثبت به‌عنوان مقدار ویژه پرون داشته باشیم و چون هر دو مقدار ویژه داده‌شده برای این حالت مختلطند، مسئله فاقد جواب نامنفی است.
در ادامه ما مسئله را ابتدا برای حالت $n = 3$ حل کرده و در ادامه شرایط حل‌پذیری مسئله را در این حالت بررسی کرده و سعی در ارائه الگوریتمی خواهیم‌بود که مسئله را در ابعاد بالاتر حل نماید.

۲ حالت $n = 3$

ابتدا حالت متقارن ماتریس جواب را بررسی کرده و در ادامه حالت نامتقارن ماتریس جواب را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالت سه‌قطری متقارن بودن ماتریس جواب در [4] جواب داده شده است و ما این‌جا درایه‌های $(1, 3)$ و $(3, 1)$ ماتریس جواب را ناصفر درنظر می‌گیریم.
فرض کنیم مجموعه مقادیر ریتز یک ماتریس متقارن 3×3 به‌صورت زیر داده شده باشد:

$$R_3 = \{\lambda_{11}; \lambda_{12}, \lambda_{22}; \lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{33}\},$$

داده شده‌باشد. لازم‌به‌ذکر است که مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن اعداد حقیقی‌اند، پس کلیه درایه‌های مجموعه R_2 نیز اعداد حقیقی‌اند. در این صورت با توجه با ماتریس A_2 در (3.1)، ماتریس جواب این حالت باید دارای شکل زیر باشد:

$$A_3 = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_2}} & a \\ & & b \\ a & b & \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{33} - (\lambda_{12} + \lambda_{22}) \end{array} \right),$$

که در آن دو متغیر a و b مجهول‌اند. واضح است که اثر ماتریس A_3 برابر است با $\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{33}$ که شرط لازم برای حل‌پذیری مسئله است با توجه به درایه‌های قطری ماتریس A_2 و این‌که اثر ماتریس برابر با مجموع مقادیر ویژه است، درایه $(3,3)$ ماتریس A_3 به‌سادگی حاصل می‌شود. حال دو مجهول a و b را به‌گونه‌ای تعیین می کنیم که مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A_3 برابر با $\{\lambda_{13},\lambda_{23},\lambda_{33}\}$ گردد. ابتدا چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A_3 را می‌یابیم:

$$\begin{aligned}P(A_3,\lambda)=\lambda^3-(\lambda_{13}+\lambda_{23}+\lambda_{33})\,\lambda^2-(a^2+b^2-\lambda_{13}\lambda_{22}-\lambda_{13}\lambda_{12}-\\ \lambda_{23}\lambda_{22}-\lambda_{23}\lambda_{12}-\lambda_{33}\lambda_{22}-\lambda_{33}\lambda_{12}+{\lambda_{22}}^2+\lambda_{22}\lambda_{12}+{\lambda_{12}}^2)\lambda-\\ \lambda_{11}a^2-2\,a\sqrt{(\lambda_{22}-\lambda_{11})\,(\lambda_{11}-\lambda_{12})}b+b^2\lambda_{11}+a^2\lambda_{22}+\\ a^2\lambda_{12}-\lambda_{22}\lambda_{12}\lambda_{13}-\lambda_{22}\lambda_{12}\lambda_{23}-\lambda_{22}\lambda_{12}\lambda_{33}+{\lambda_{22}}^2\lambda_{12}+\lambda_{22}{\lambda_{12}}^2=\\ (\lambda-\lambda_{13})(\lambda-\lambda_{23})(\lambda-\lambda_{33}),\end{aligned}$$

ضرایب λ^0 و λ را در عبارت فوق مساوی قرار داده و دو معادله زیر را بر اساس دو متغیر a و b حاصل می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(a,b)=(a^2+b^2-\lambda_{13}\lambda_{22}-\lambda_{13}\lambda_{12}-\lambda_{23}\lambda_{22}-\lambda_{23}\lambda_{12}-\lambda_{33}\lambda_{22}-\\ \qquad\lambda_{33}\lambda_{12}+{\lambda_{22}}^2+\lambda_{22}\lambda_{12}+{\lambda_{12}}^2)+(\lambda_{13}\lambda_{23}+\lambda_{13}\lambda_{33}+\lambda_{23}\lambda_{33})=0\\ g(a,b)=(\lambda_{11}+\lambda_{22}+\lambda_{12})a^2-2\,a\sqrt{(\lambda_{22}-\lambda_{11})\,(\lambda_{11}-\lambda_{12})}b+b^2\lambda_{11}-\\ \qquad\lambda_{22}\lambda_{12}\lambda_{13}-\lambda_{22}\lambda_{12}\lambda_{23}-\lambda_{22}\lambda_{12}\lambda_{33}+{\lambda_{22}}^2\lambda_{12}+\lambda_{22}{\lambda_{12}}^2-(\lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{33})=0\end{cases}\tag{1.2}$$

درصورتی‌که دستگاه غیرخطی فوق دارای جواب باشد مسئله ما حل‌پذیر است. واضح است که معادله اول یا دایره است یا یک نقطه و یا یک مجموعه تهی است. به‌عنوان نمونه اگر مجموعه زیر به عنوان یک مجموعه مقادیر ریتز داده شده باشد؛

$$R_3=\{-3;-8,-2;-7,2,14\},$$

در این صورت شرط تداخلی کوشی برای حالت 2×2 برقرار است و این شرط برای حالت 3×3 برقرار نیست. حال ماتریس جواب این حالت باید شکل زیر را داشته باشد:

$$\begin{bmatrix}-3 & \sqrt{5} & a\\ \sqrt{5} & -7 & b\\ a & b & 19\end{bmatrix},$$

حال معادله اول (۱.۲) به‌صورت زیر خواهد بود؛

$$-a^2-b^2-174=-84,$$

که این معادله ناسازگار است و نشان می‌دهد مسئله فوق فاقد جواب است. اگر به معادله اول شرط تداخلی کوشی را اضافه نماییم، آن‌گاه معادله اول همواره دارای مجموعه جواب ناتهی است؛ یعنی با هر مجموعه دل‌خواه از مقادیر ریتز که در شرط تداخلی کوشی صدق نمایند، این دایره دارای شعاع نامنفی است و درنتیجه سازگار است. برای این که این مطلب را نشان دهیم باید بگوییم معادله اول دستگاه (۱.۲) به‌صورت یک دایره با شعاع نامنفی است. اگرچه می‌توانستیم با عامل‌گیری و تجزیه، نامنفی بودن شعاع دایره را در این معادله با زحمت نه‌چندان کم به اثبات برسانیم، اما برای این کار با استفاده از نرم‌افزار Maple و با الگوریتم بسیار ساده زیر مطلب را نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}&assume(\lambda_{13}\le\lambda_{12}\le\lambda_{23}\le\lambda_{11}\le\lambda_{22}\le\lambda_{33}),\\ &is(\lambda_{13}\lambda_{22}+\lambda_{13}\lambda_{12}+\lambda_{23}\lambda_{22}+\lambda_{23}\lambda_{12}+\lambda_{33}\lambda_{22}+\\ &\lambda_{33}\lambda_{12}-{\lambda_{22}}^2-\lambda_{22}\lambda_{12}-{\lambda_{12}}^2-(\lambda_{13}\lambda_{23}+\lambda_{13}\lambda_{33}+\lambda_{23}\lambda_{33})\ge 0),\end{aligned}$$

که جواب خروجی آن کلمه $true$ است، و نشان می‌دهد که تحت شرط تداخلی کوشی معادله اول همواره یا یک دایره یا یک نقطه است و مجموعه جواب آن ناتهی است. اگر شرط اول الگوریتم فوق با تغییر کوچک و مجازی به‌صورت زیر باشد:

$$assume(\lambda_{13}\le\lambda_{12}\le\lambda_{11}\le\lambda_{23}\le\lambda_{22}\le\lambda_{33}),$$

باز نتیجه فرقی نکرده و باز مجموعه جواب معادله اول رابطه (۱.۲) ناتهی خواهد بود.

معادله دوم نیز بسته به مقادیر ریتز داده شده یا یک هذلولی، یا دو خط متقاطع در مبداء مختصات و یا یک دایره و در حالت خاص نقطه، مبداء مختصات (دایره با شعاع صفر) است، پس معادله دوم نیز سازگار است. در [۱] شرط حل‌پذیری دستگاه غیر خطی فوق به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial a}\neq \circ, \tag{۲.۲}$$

یعنی اگر شرط تداخلی کوشی را اضافه کنیم و شرط فوق نیز برقرار باشد، در این صورت می‌توان گفت که مسئله حالت متقارن در این حالت حل‌پذیر است.

در ادامه با چندنکته و مثال این مطلب را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۲. برای مجموعه $R_۳=\{۲;-۲,۳;-۴,۴,۸\}$ ماتریس‌های ۳×۳ بیابید که این مجموعه، مجموعه مقادیر ریتز آن باشد.

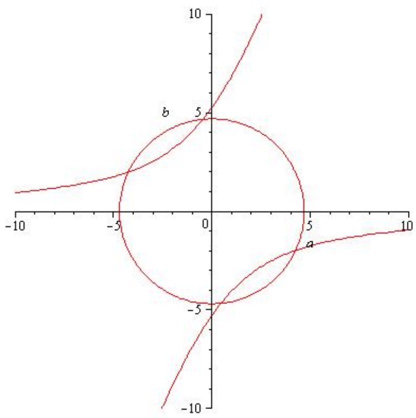
حل: ابتدا دو معادله (۱.۲) را می یابیم

$$\begin{aligned} f(a,b)&=a^۲+b^۲-۲۲=\circ,\\ g(a,b)&=-۴\,b\sqrt{۲}a+۲\,b^۲-۵۶=\circ,\end{aligned}$$

معادله اول در عبارت بالا یک دایره است و معادله دوم یک هذلولی است. شرط حل‌پذیری (۲.۲) برقرار است با حل دو معادله غیر خطی فوق جواب‌های زیر برای دو متغیر a و b حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\{a=-۳\sqrt{۲},b=۲\}, && \{a=۳\sqrt{۲},b=-۲\},\\ &\{a=-(۱/۳)\sqrt{۲},b=۱۴/۳\}, && \{a=(۱/۳)\sqrt{۲},b=-۱۴/۳\}.\end{aligned}$$

شکل ۱ تصویر این دو معادله را نشان می‌دهد. در این صورت یکی از چهار ماتریس ۳×۳ جواب به شرح زیر است و بقیه جواب‌ها نیز با



شکل ۱: مثال (۱.۲)

جای‌گذاری مقادیر a، به‌دست خواهند آمد؛

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۲\sqrt{۲} & -۱/۳\sqrt{۲}\\ ۲\sqrt{۲} & \circ & ۱۴/۳\\ -۱/۳\sqrt{۲} & ۱۴/۳ & ۵\end{bmatrix}.$$

ملاحظه ۲.۲. اگر به مجموعه مقادیر ریتز مثال فوق توجه کنیم، این نکته قابل‌ذکر است که مجموعه مقادیر ویژه زیرماتریس اصلی پیش‌رو ۲×۲ در بین مقادیر ویژه حالت ۳×۳ قرار ندارد. با این حال ما توانسته‌ایم برای مسئله جوابی بیابیم. این نشان می‌دهد که شرط تداخلی کوشی می‌تواند به‌عنوان یک شرط کافی مطرح گردد، اما لازم نیست.

ملاحظه ۳.۲. مسئله ما ممکن است یک یا دو و یا چهار و یا بی‌نهایت جواب داشته باشد. اگر همه اعضای مجموعه $R(A)$ متمایز باشند در این صورت هر دو معادله دستگاه معادلات (۱.۲) سازگار بوده و یکی از آن‌ها دایره و دیگری یک هذلولی است، که در چهار نقطه یکدیگر را

قطع می‌کنند و در این حالت مسئله دارای چهار جواب متمایز است، که مثال بالا نمونه‌ای از آن است. اگر مقادیر ویژه زیرماتریس‌های اصلی مرتبه پایین‌تر با مرتبه بالاتر عضوهای مشترک داشته باشند، مسئله ممکن است همه حالات مطرح شده را داشته باشد. مثلاً برای مجموعه مقادیر ریتز

$$\{-۳; -۸, ۱; -۸, -۳, ۱\},$$

مقادیر دو مجهول a و b فقط صفرند و درنتیجه معادله اول فقط نقطه مبداء مختصات است و معادله دوم نیز هذلولی

$$۴a^۲ + ۴a\sqrt{۵}b + ۳b^۲ = ۰,$$

است که از مبداء مختصات عبور می‌کند. در این صورت ماتریس جواب شکل زیر را خواهد داشت:

$$\begin{bmatrix} -۳ & ۲\sqrt{۵} & ۰ \\ ۲\sqrt{۵} & -۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}.$$

نکته دیگر آن‌که برای مجموعه مقادیر ریتز

$$\{-۸; -۸, -۸; -t, -۸, ۱\},$$

با مقدار $t > ۸$ همواره بی‌نهایت جواب خواهیم داشت؛ زیرا هر دو معادله دستگاه غیرخطی (۱.۲) به‌صورت $a^۲ + b^۲ = ۳t$ خواهند بود و ماتریس جواب دارای شکل زیر است؛

$$\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & a \\ ۰ & -۸ & b \\ a & b & -t+۹ \end{bmatrix}$$

با مقادیر دو متغیر a و b که روی محیط دایره $a^۲ + b^۲ = ۳t$ قرار دارند. به‌عنوان مثال برای $t = ۱۸$ خواهیم داشت:

$$R(A) = \{-۸; -۸, -۸; -۱۸, -۸, ۱\},$$

بی‌نهایت جواب وجود دارد؛ زیرا هر دو معادله در دستگاه معادلات غیرخطی (۱.۲) به دایره $a^۲ + b^۲ = ۹۰$ می‌رسند، و ماتریس A و مجموعه مقادیر ویژه آن به‌ترتیب به‌شکل زیرند:

$$\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & a \\ ۰ & -۸ & b \\ a & b & -۹ \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -۸ \\ -۱۷/۲ + ۱/۲\sqrt{۱ + ۴a^۲ + ۴b^۲} \\ -۱۷/۲ - ۱/۲\sqrt{۱ + ۴a^۲ + ۴b^۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ \\ ۱ \\ -۱۸ \end{bmatrix}.$$

همچنین برای مقادیر ریتز

$$R(A) = \{-۸; -۸, -۶; -۸, -۸, ۱\},$$

ما دو جواب خواهیم داشت؛ زیرا دستگاه معادلات غیرخطی (۱.۲) به دایره $a^۲ + b^۲ = ۱۴$ و بیضی $۳a^۲ + ۴b^۲ = ۶۶$ تبدیل شده و آن‌ها در دو نقطه $(a = ۰, b = \pm\sqrt{۱۴})$ یکدیگر را قطع می‌کنند که در این صورت ماتریس جواب به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۶ & \sqrt{۱۴} \\ ۰ & \sqrt{۱۴} & -۱ \end{bmatrix}.$$

حال می‌خواهیم حالت جواب نامتقارن را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنیم برای مجموعه $R_۲ = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۲۲}\}$ یک ماتریس نامتقارن ۲×۲ به‌شکل $A_۲$ را یافته‌ایم و اکنون مجموعه $R_۳ = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۲۲}; \lambda_{۱۳}, \lambda_{۲۳}, \lambda_{۳۳}\}$، داده شده است؛ و قرار است ماتریس نامتقارن ۳×۳ را طوری بیابیم که مجموعه $R_۳$ مجموعه مقادیر ریتز آن باشد. شکل کلی ماتریس جواب چنین است:

$$A_۳ = \begin{pmatrix} A_۲ & & a \\ & & b \\ c & d & \lambda_{۱۳} + \lambda_{۲۳} + \lambda_{۳۳} - (\lambda_{۱۲} + \lambda_{۲۲}) \end{pmatrix}, \tag{۳.۲}$$

حال باید مجهولات ماتریس فوق را با استفاده از چندجمله‌ای مشخصه آن همانند حالت جواب متقارن محاسبه نمود. ایده انجام کار همان است که در حالت متقارت مطرح شد؛ یعنی استفاده از چندجمله‌ای مشخصه برای یافتن ۴ مجهول ماتریس (۳.۲) است. یک دستگاه معادله غیرخطی به‌وجود می‌آید که دارای دو معادله و چهار مجهول است، و با حل آن ماتریس مورد نظر به‌دست می‌آید. حال مثال حالت ۲ × ۲ نامتقارن مطرح‌شده در بخش قبل را تعمیم می‌دهیم؛ یعنی می‌خواهیم یک ماتریس ۳ × ۳ بیابیم که ماتریس (۷.۱) ماتریس گوشه چپ بالایی آن بوده و دارای مقادیر ریتز

$$R_۳ = \{\lambda_{۱۱}; \lambda_{۱۲}, \lambda_{۱۲}; \lambda_{۱۳}, \lambda_{۲۳}, \lambda_{۳۳}\} = \{۳; ۶ \pm i; -۴, ۷ \pm ۲i\}$$

باشد. با جای‌گذاری مقادیر فوق در ماتریس (۳.۲) خواهیم داشت:

$$A_۳ = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & a \\ -۲ & ۹ & b \\ c & d & -۲ \end{bmatrix}$$

از چندجمله‌ای مشخصه این ماتریس

$$P(\lambda) = \lambda^۳ - ۱۰\,\lambda^۲ - (-۱۳ + ca + db)\,\lambda + ۷۴ + ۹\,ca - ۵\,cb + ۲\,da + ۳\,db = \\ (\lambda - \lambda_{۱۳})(\lambda - \lambda_{۲۳})(\lambda - \lambda_{۳۳}) = \lambda^۳ - ۱۰\,\lambda^۲ + ۲۱۲ - ۳\,\lambda$$

دستگاه معادله غیرخطی زیر را خواهیم داست:

$$f(a,b,c,d) = -۱۳ + ca + db = ۳, \\ g(a,b,c,d) = ۷۴ + ۹\,ca - ۵\,cb + ۲\,da + ۳\,db = ۲۱۲,$$

این دستگاه چهار مجهول دارد و دو معادله است و اگر دو مجهول a و b را براساس دو متغیر دیگر آن بیابیم، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$a = \frac{۱۰(۸\,c + ۹\,d)}{۵\,c^۲ + ۶\,cd + ۲\,d^۲}, \\ b = \frac{۲(۳\,c + ۱۶\,d)}{۵\,c^۲ + ۶\,cd + ۲\,d^۲}.$$

مخرج کسرهای فوق نامنفی است؛ زیرا می‌توان آن را به‌صورت $(c+d)^۲ + (۲c+d)^۲$ نمایش داد و اگر هر دو متغیر مخرج صفر باشند؛ در آن صورت مسئله فاقد جواب است و در غیر این صورت مسئله بی‌نهایت جواب دارد. به‌عنوان مثال اگر قرار دهیم $c = ۲$ و $d = ۴$، در این صورت خواهیم داشت $a = \frac{۲۵}{۷}$ و $b = \frac{۷}{۵}$ و ماتریس جواب به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & \frac{۲۶}{۵} \\ -۲ & ۹ & \frac{۷}{۵} \\ ۲ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}.$$

با یک محاسبه ساده مجموعه مقادیر ویژه این ماتریس عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} -۴ \\ ۷ + ۲\,i \\ ۷ - ۲\,i \end{bmatrix}.$$

۳ حدس و نتیجه‌گیری

ما شرط تداخلی کوشی را برای حالت $n = ۳$ اضافه کرده و نتیجه گرفتیم بدون این‌که ماتریس سه‌قطری متقارن باشد مسئله حالت متقارن می‌تواند حل‌پذیر بوده و حتی جواب‌های متعددی داشته باشد. حال این حدس را به مسئله برای حالت $n \geq ۴$ اضافه می‌کنیم که با شرط اضافه تداخلی کوشی مسئله در حالت متقارن باز جواب خواهد داشت. حدس دیگر جواب به سوال ۲ ابتدای مقاله است که آیا برای یک مجموعه مختلط از مقادیر ریتز ماتریسی حقیقی وجود خواهد داشت که مجموعه مورد نظر مجموعه مقادیر ریتز آن باشد؟ جواب این سوال نیز به‌عنوان یک حدس مثبت است و روش بازگشتی ارائه‌شده در بخش‌های قبل این مطلب، راه به‌دست آوردن آن را نشان می‌دهد.

فهرست منابع

[۱] م. نیکوکار و م. درویشی، محاسبات عددی، انتشارات گسترش علوم پایه، چاپ سی‌وپنجم ، (۱۳۹۸).

[۲] ع.م. نظری و ع. نظامی، تاریخچه مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریس‌های نامنفی، مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال سی‌و نهم شماره ۲ (پیاپی ۶۷، پاییز و زمستان ۱۳۹۹)

[3] A. M. Nazari, E. Afshari, On the construction of symmetric nonnegative matrix with prescribed Ritz values, Journal of Linear and Topological Algebra, Vol. 03, No. 02, 2014, 61- 66.

[4] B. Parlett a, G. Strang, Matrices with prescribed Ritz values, Linear Algebra and its Applications 428 (2008) 1725–1739.

Construction of a matrix with prescribed Ritz values of the order less than or equal to three

Alimohammad Nazari [§] **, Atiyeh Nezami**

Department of Mathematics, Arak University, Arak, Iran. P. O. Box 38156-8943.

Communicated by: M. Namdari

Received: 2022/3/16 Accepted: 2022/12/13

Abstract: The Ritz values of a matrix are the set of all the eigenvalues of the leading principal submatrices. In this paper, assuming that the set of Ritz values is given from the dimension of maximum three, we find a matrix such that the given set is its Ritz values. The conditions for the existing solution are also studied.

Keywords: Ritz values, Symmetrix tridiagonal matrices, Inverse eigenvalue problem.

[§]Corresponding author.

E-mail addresses: a-nazari@araku.ac.ir (A.M. Nazari), firstauthor@email, atiyeh.nezami@gmail.com (A. Nezami).