مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۴، ص ۵۵۷-۵۶۶
شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.40856.2041

بررسی مدول‌های درون‌ریخت کوچک، هم‌ریخت کوچک و هم‌ریخت اساسی

علی‌رضا آل‌هفت‌تن ×، امیر عصاری، حسین کثیری

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران

دبیر مسئول: امیر مافی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۲۸

چکیده: در این مقاله با استفاده از ابزار درون‌ریختی و هم‌ریختی که هرکدام به نوبه‌ی خود در نظریه‌ی مدول‌ها به‌عنوان وسیله‌ای مهم برای انتقال برخی خواص جبری شناخته می‌شود، سه مفهوم مدول درون‌ریخت کوچک، هم‌ریخت کوچک و هم‌ریخت اساسی را معرفی کرده و مورد مطالعه قرار داده‌ایم. همچنین برخی روابط میان این سه مفهوم با یکدیگر و نیز ارتباط آن‌ها با دسته‌های مختلفی از مدول‌ها را بررسی کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: درون‌ریخت کوچک، هم‌ریخت کوچک، هم‌ریخت اساسی.

رده‌بندی ریاضی: 13C05; 13C60

۱ مقدمه

همان‌طور که می‌دانیم، زیرمدول‌های اساسی نقش مهمی در نظریه‌ی مدول‌ها ایفا می‌کنند. همچنین زیرمدول‌های کوچک نیز به‌عنوان دوگان زیرمدول‌های اساسی از اهمیت خاصی برخوردارند. با توجه به این نقش و اهمیت، این دو مفهوم به‌طور گسترده مورد توجه و مطالعه‌ی ریاضی‌دان‌ها قرار گرفته‌اند. همچنین ابزار بدون جایگزین هم‌ریختی به‌عنوان منتقل‌کننده‌ی خواص جبری از اهمیتی بی‌بدیل در نظریه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها برخوردار است. در همین راستا مفهوم تک‌ریختی اساسی (بروریختی کوچک) بین دو $R-$مدول A و B؛ که عبارت است از $R-$هم‌ریختی مانند $f : A \longrightarrow B$ به‌طوری‌که $f(A)$ زیرمدولی اساسی از B ($ker(f)$ زیرمدولی کوچک از A) است، معرفی شده و به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌عنوان مثالی از کاربرد و اهمیت بروریختی کوچک می‌توان مفهوم پوش تصویری -به‌عنوان دوگان پوش تزریقی- اشاره کرد که توسط بروریختی کوچک تعریف می‌شود. برای جزئیات بیش‌تر راجع به این مفاهیم مراجعه شود به [۵]، [۶] و [۱۴]. ما در این مقاله با توجه به جایگاه این مفاهیم و ابزار، با ترکیب کردن آن‌ها ابتدا به معرفی مدول درون‌ریخت کوچک پرداخته و آن را مورد مطالعه و بررسی قرار خواهیم داد. در این بخش نشان می‌دهیم که درون‌ریخت کوچک بودن مدول A معادل است با این‌که برای هر زیرمدول کوچک از A مانند B، هم‌ریختی ناصفر از $\frac{A}{B}$ به A وجود نداشته باشد. همچنین ثابت می‌کنیم که در مدول‌های درون‌ریخت

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: a.r.alehafttan@jsu.ac.ir (A. R. Alehafttan), amirassari@jsu.ac.ir (A. Assari) hossein_kasiry@jsu.ac.ir (H. Kasiry)

کوچک، کوچک بودن توسط هر درون‌ریختی حفظ می‌شود. در بخش سوم به معرفی و بررسی مدول‌های هم‌ریخت کوچک پرداخته و نشان می‌دهیم که روی حلقه‌های نوتری، هم‌ریخت کوچک بودن یک مدول معادل هم‌ریخت کوچک بودن زیرمدول‌هایی از آن است که توسط سه عضو تولید می‌شوند. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر یک مدول ناتکین باشد، هم‌ریخت کوچک بودن و درون‌ریخت کوچک بودن آن باهم معادل‌اند. در بخش پایانی مدول‌های هم‌ریخت اساسی را به‌عنوان دوگان مدول‌های هم‌ریخت کوچک معرفی کرده و برخی از خواص آن‌ها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.
لازم‌به‌ذکر است که در تمام این مقاله حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یک‌دار و مدول‌ها یکانی چپ‌اند.

۲ مدول‌های درون‌ریخت کوچک

در این بخش مدول‌های درون‌ریخت کوچک را معرفی کرده و شرط معادلی برای آن‌ها بیان خواهیم کرد. همچنین مثال‌هایی از مدول‌های درون‌ریخت کوچک ارائه کرده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. $R-$مدول A را درون‌ریخت کوچک می‌نامیم، هرگاه برای هر $0 \neq \varphi \in End(A)$ داشته باشیم، $ker(\varphi) \ll A$. حلقه‌ی R را درون‌ریخت کوچک گوییم، هرگاه به‌عنوان مدول روی خودش درون‌ریخت کوچک باشد.

مثال ۲.۲. هر میدان درون‌ریخت کوچک است. زیرا اگر F یک میدان باشد و $0 \neq \varphi \in End(F)$، آن‌گاه $ker(\varphi) = 0$.

مثال ۳.۲. $\mathbb{Z}_4$ به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول درون‌ریخت کوچک است. زیرا اگر $0 \neq \varphi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$، آن‌گاه $ker(\varphi) = \{\bar{0}\}$ یا $ker(\varphi) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$، بنابراین $ker(\varphi)$ در $\mathbb{Z}_4$ کوچک است.

مثال ۴.۲. $\mathbb{Z}_{10}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول درون‌ریخت کوچک نیست. زیرا اگر $\varphi : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$ را با ضابطه‌ی $\varphi(x) = 5x$ درنظر بگیریم، آن‌گاه $ker(\varphi) = \langle \bar{2} \rangle$، که در $\mathbb{Z}_{10}$ کوچک نیست.

قضیه ۵.۲. $R-$مدول A درون‌ریخت کوچک است اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول غیرکوچک B از A داشته باشیم، $Hom(\frac{A}{B}, A) = 0$.

اثبات. فرض کنیم A درون‌ریخت کوچک و زیرمدول غیرکوچک B از A موجود باشد به‌طوری‌که $Hom(\frac{A}{B}, A) \neq 0$، پس هم‌ریختی ناصفر $f : \frac{A}{B} \longrightarrow A$ وجود دارد. حال اگر $g : A \longrightarrow \frac{A}{B}$ بروریختی کانونی باشد، آن‌گاه $0 \neq \varphi = f \circ g \in End(A)$ و درنتیجه $ker(\varphi) \ll A$. اما $B \subseteq ker(\varphi)$ و بنابراین $B \ll A$ که یک تناقض است. به‌عکس؛ فرض کنیم برای هر زیرمدول غیرکوچک B، $Hom(\frac{A}{B}, A) = 0$ و $\psi : A \longrightarrow A$ یک درون‌ریختی ناصفر باشد. اگر $ker(\psi)$ در A کوچک نباشد، هم‌ریختی $h : \frac{A}{ker(\psi)} \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $h(a + ker(\psi)) = \psi(a)$ تعریف می‌کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود که h یک هم‌ریختی ناصفر است، اما $h \in Hom(\frac{A}{ker(\psi)}, A)$ و این امکان‌پذیر نیست. □

گزاره ۶.۲. فرض کنیم R یک حلقه و I ایدالی از آن باشد. اگر M و N دو $R-$مدول باشند و $I \subseteq ann(M)$، آن‌گاه $Hom_R(M, N) = Hom_{\frac{R}{I}}(M, N)$.

اثبات. به صفحه‌ی ۵۱ از [۱۳] مراجعه شود. □

گزاره ۷.۲. اگر A یک $R-$مدول و I ایدالی از R مشمول در پوچساز A باشد، آن‌گاه A یک $R-$مدول درون‌ریخت کوچک است اگر و تنها اگر به‌عنوان $\frac{R}{I}-$مدول درون‌ریخت کوچک باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم A یک $R-$مدول درون‌ریخت کوچک باشد. با توجه به گزاره‌ی ۶.۲، برای هر زیرمدول B از A داریم، $Hom_R(\frac{A}{B}, A) = Hom_{\frac{R}{I}}(\frac{A}{B}, A)$. بنابراین اگر A یک $R-$مدول درون‌ریخت کوچک باشد، آن‌گاه برای هر زیرمدول غیرکوچک B می‌توان گفت، اگر $Hom_R(\frac{A}{B}, A) = 0$، آن‌گاه $Hom_{\frac{R}{I}}(\frac{A}{B}, A) = 0$. لذا با توجه به قضیه‌ی ۵.۲، A به‌عنوان $\frac{R}{I}-$مدول نیز درون‌ریخت کوچک است. به‌عکس؛ مانند حالت رفت اثبات می‌شود. □

گزاره ۸.۲. فرض کنیم A یک مدول درون‌ریخت کوچک، B زیرمدولی از آن باشد و $0 \neq \varphi \in End(A)$. اگر $\varphi(B) \ll \varphi(A)$، آن‌گاه $B \ll A$.

اثبات. فرض کنیم B در A کوچک نباشد. پس زیرمدول سره‌ی C وجود دارد به‌طوری‌که $B + C = A$، بنابراین $\varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(C)$، اما $\varphi(B) \ll \varphi(A)$، پس $\varphi(A) = \varphi(C)$. حال فرض کنیم $a \in A$، بنابراین $\varphi(a) \in \varphi(A) = \varphi(C)$، پس وجود دارد $c \in C$، به‌طوری‌که $\varphi(a) = \varphi(c)$ و درنتیجه $a - c \in ker(\varphi)$. لذا می‌توان نوشت $a = (a - c) + c \in ker(\varphi) + C$؛ یعنی، $A \subseteq ker(\varphi) + C$ و این نتیجه می‌دهد که $A = ker(\varphi) + C$. بنابراین $ker(\varphi)$ در A کوچک نیست و این با درون‌ریخت کوچک بودن A در تناقض است. □

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط درون‌ریخت کوچک بودن مدول در گزاره‌ی قبل ضروری است.

مثال **۹.۲.** اگر $\mathbb{Z}_6$ را به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول درنظر بگیریم، $\langle \bar{۲} \rangle$ یک زیرمدول آن است. حال اگر $\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ را با ضابطه‌ی $\varphi(x) = ۳x$ تعریف کنیم داریم، $\varphi(\langle \bar{۲} \rangle) = \langle \bar{۰} \rangle \ll \{\bar{۰}, \bar{۳}\} = \varphi(\mathbb{Z}_6)$؛ اما $\langle \bar{۲} \rangle$ زیرمدول کوچک $\mathbb{Z}_6$ نیست.

گزاره **۱۰.۲.** فرض کنیم M و N دو $R-$مدول و $f : M \longrightarrow N$ یک برویختی باشد. اگر K یک زیرمدول کوچک M باشد، آن‌گاه $f(K)$ در N کوچک است.

اثبات. به گزاره‌ی ۳.۱.۵ از [۱۳] مراجعه شود. □

با توجه به گزاره‌های ۸.۲ و ۱۰.۲ نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه **۱۱.۲.** اگر A یک مدول درون‌ریخت کوچک و $\varphi : A \longrightarrow A$ یک درون‌ریختی پوشا باشد، آن‌گاه $B \ll A$ اگر و تنها اگر $\varphi(B) \ll \varphi(A)$.

گزاره **۱۲.۲.** فرض کنیم A یک مدول درون‌ریخت کوچک و B زیرمدولی کوچک از $\varphi(A)$ باشد. دراین صورت برای هر $\varphi \in End(A)$، $\varphi^{-۱}(B) \ll A$.

اثبات. همواره داریم $ker(\varphi) \subseteq \varphi^{-۱}(B)$، پس کافی است نشان دهیم $\frac{\varphi^{-۱}(B)}{ker(\varphi)} \ll \frac{A}{ker(\varphi)}$. فرض کنیم زیرمدول $\frac{C}{ker(\varphi)}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\frac{A}{ker(\varphi)} = \frac{\varphi^{-۱}(B)}{ker(\varphi)} + \frac{C}{ker(\varphi)}$، بنابراین $A = C + \varphi^{-۱}(B)$ و درنتیجه $\varphi(A) = \varphi(\varphi^{-۱}(B)) + \varphi(C)$. اما $\varphi(\varphi^{-۱}(B)) \subseteq B \subseteq \varphi(A)$ و $\varphi(C) \subseteq \varphi(A)$؛ پس می‌توان نوشت:

$$B + \varphi(C) \subseteq \varphi(A) = \varphi(\varphi^{-۱}(B)) + \varphi(C) \subseteq B + \varphi(C).$$

ازاین‌رو $B + \varphi(C) = \varphi(A)$. حال با توجه به کوچک بودن B در $\varphi(A)$ داریم، $\varphi(A) = \varphi(C)$. حال فرض کنیم $a \in A$، پس $\varphi(a) \in \varphi(A) = \varphi(C)$. لذا وجود دارد $c \in C$، به‌طوری‌که $\varphi(a) = \varphi(c)$ و درنتیجه $a - c \in ker(\varphi) \subseteq C$. بنابراین $a \in C$ و ازاین‌رو $A = C$. پس $\frac{C}{ker(\varphi)} = \frac{A}{ker(\varphi)}$ و درنتیجه $\frac{\varphi^{-۱}(B)}{ker(\varphi)} \ll \frac{A}{ker(\varphi)}$. اما $ker(\varphi) \ll A$، پس $\varphi^{-۱}(B) \ll A$. □

تعریف **۱۳.۲.** مدول M را شبه‌تزریقی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول N از M، هر تک‌ریختی $\varphi : N \longrightarrow M$ و هر همریختی $h : N \longrightarrow M$، درون‌ریختی $\psi : M \longrightarrow M$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $\psi \circ h = \varphi$.

گزاره **۱۴.۲.** فرض کنیم A یک مدول درون‌ریخت کوچک و شبه‌تزریقی باشد. اگر B یک زیرمدول A باشد به‌طوری‌که برای هر زیرمدول C از B، کوچک بودن C در A نتیجه دهد که C در B نیز کوچک است، آن‌گاه B یک مدول درون‌ریخت کوچک است.

اثبات. فرض کنیم $\varphi : B \longrightarrow B$ یک درون‌ریختی ناصفر باشد، چون A شبه‌تزریقی است، پس درون‌ریختی $\psi : A \longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری‌که $\psi \circ i = i \circ \varphi$ که $i : B \longrightarrow A$ همریختی شمول است. چون $\psi(B) = \varphi(B) \neq ۰$، پس ψ یک درون‌ریختی ناصفر از A است. بنابراین با توجه به این‌که A درون‌ریخت کوچک است، $ker(\psi) \ll A$. اما $ker(\varphi) \subseteq ker(\psi)$، پس $ker(\varphi)$ نیز در A کوچک است و درنتیجه $ker(\varphi) \ll B$؛ یعنی، B درون‌ریخت کوچک است. □

تعریف **۱۵.۲.** زیرمدول B از مدول M را هم‌بسته می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول C از B، $\frac{B}{C} \ll \frac{M}{C}$ نتیجه دهد که $C = B$. همچنین فرض می‌کنیم N و L زیرمدول‌های M باشند. N را متمم L در M گوییم، اگر $N + L = M$ و برای هر زیرمدول سره از N مانند K، $K + L \neq M$؛ یعنی، N با این خاصیت مینیمال باشد.

نتیجه **۱۶.۲.** اگر A یک مدول درون‌ریخت کوچک و شبه‌تزریقی باشد، هر زیرمدول متمم (هم‌بسته) از A نیز درون‌ریخت کوچک است. زیرا اگر B یک زیرمدول متمم (هم‌بسته) از A و C زیرمدولی از B باشد که در A کوچک است، آن‌گاه C یک زیرمدول کوچک از B خواهد بود.

تعریف **۱۷.۲.** زیرمدول N از مدول M را پایا می‌نامیم، هرگاه برای هر درون‌ریختی از M مانند f، داشته باشیم $f(N) \subseteq N$.

قضیه **۱۸.۲.** $R-$مدول A درون‌ریخت کوچک است اگر و تنها اگر یک زیرمدول کوچک و پایا مانند B داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $0 \neq \varphi \in End(A)$، $\varphi(A) \nsubseteq B$ و $\frac{A}{B}$ درون‌ریخت کوچک باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم B یک زیرمدول کوچک و پایا باشد به‌طوری‌که برای هر $0 \neq \varphi \in End(A)$، $\varphi(A) \nsubseteq B$ و $\frac{A}{B}$ درون‌ریخت کوچک است. اگر $B = \langle 0 \rangle$ چیزی برای اثبات وجود ندارد؛ پس B را ناصفر در نظر می‌گیریم. حال فرض کنیم φ یک درون‌ریختی ناصفر روی A باشد؛ در این صورت $\psi : \frac{A}{B} \longrightarrow \frac{A}{B}$ را با ضابطه‌ی $\psi(a+B) = \varphi(a)$ تعریف می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان نشان داد که ψ یک درون‌ریختی ناصفر است، پس با توجه به درون‌ریخت کوچک بودن $\frac{A}{B}$ داریم، $ker(\psi) \ll \frac{A}{B}$. حال اگر قرار دهیم $ker(\psi) = \frac{C}{B}$، با توجه به کوچک بودن B در A، $C \ll A$. اما $ker(\varphi) \subseteq C$، لذا $ker(\varphi)$ در A کوچک است و درنتیجه A درون‌ریخت کوچک خواهد بود. به‌عکس؛ کافی است $B = \langle 0 \rangle$ را درنظر بگیریم. پس $\frac{A}{B}$ درون‌ریخت کوچک است؛ اما $A \simeq \frac{A}{\langle 0 \rangle} = \frac{A}{B}$. پس A نیز درون‌ریخت کوچک است. □

۳ مدول‌های هم‌ریخت کوچک

این بخش به معرفی و بررسی مدول‌های هم‌ریخت کوچک به‌عنوان یک تعمیم از مدول‌های درون‌ریخت کوچک اختصاص دارد. هم‌چنین در این بخش برخی ارتباط‌های میان این دو مفهوم را نشان خواهیم داد.

تعریف **۱.۳.** $R-$مدول A را هم‌ریخت کوچک می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر B از A و هر $0 \neq \varphi \in Hom(B, A)$، داشته باشیم $ker(\varphi) \ll B$. حلقه‌ی R را هم‌ریخت کوچک گوییم، هرگاه به‌عنوان مدول روی خودش هم‌ریخت کوچک باشد.

تعریف **۲.۳.** فرض کنیم A یک $R-$مدول دارای بعد کرول باشد. در این صورت A را یک مدول بحرانی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول مانند B داشته باشیم، $k-dim(\frac{A}{B}) < k-dim(A)$. هم‌چنین گوییم A تک‌شکل است، هرگاه هر هم‌ریختی از B به توی A یک‌به‌یک باشد.

برای اطلاعات بیش‌تر راجع به بعد کرول یک مدول به [۴] و [۱۰] مراجعه شود.

مثال **۳.۳.** هر مدول تک‌شکل یک مدول هم‌ریخت کوچک است و درنتیجه هر مدول بحرانی نیز باید هم‌ریخت کوچک باشد.

مثال **۴.۳.** اگر p یک عدد اول باشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}_{p^2}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول، هم‌ریخت کوچک است؛ زیرا، زیرمدول‌های ناصفر آن $\langle p \rangle$ و $\mathbb{Z}_{p^2}$ هستند‌اند. تنها هم‌ریختی ناصفر از $\langle p \rangle$ به $\mathbb{Z}_{p^2}$، هم‌ریختی شمول است که هسته‌ی آن $\langle 0 \rangle$ و درنتیجه زیرمدولی کوچک از $\langle p \rangle$ است. هم‌چنین $End(\mathbb{Z}_{p^2}) = \{f_n\}_{n=1}^{p^2-1}$ که در آن $f_n(x) = nx$ و به‌راحتی می‌توان نشان داد که برای هر $1 \leq n \leq p^2 - 1$، $ker(f_i) \ll \mathbb{Z}_{p^2}$.

گزاره **۵.۳.** هر زیرمدول ناصفر از یک مدول هم‌ریخت کوچک، مدولی هم‌ریخت کوچک است.

اثبات. فرض کنیم A یک مدول هم‌ریخت کوچک و هم‌چنین B زیرمدولی ناصفر از A باشد. در این صورت اگر C زیرمدول ناصفر از B، $0 \neq \varphi \in Hom(C, B)$ و $i : B \longrightarrow A$ هم‌ریختی شمول باشد، آن‌گاه $0 \neq i \circ \varphi \in Hom(C, A)$ و از این‌رو داریم، $ker(\varphi) = ker(i \circ \varphi) \ll B$؛ یعنی، B هم‌ریخت کوچک است. □

گزاره **۶.۳.** فرض کنیم A یک $R-$مدول باشد و $S = \frac{R}{ann(A)}$. آن‌گاه A یک $R-$مدول هم‌ریخت کوچک است اگر و تنها اگر به‌عنوان $S-$مدول هم‌ریخت کوچک باشد.

اثبات. فرض کنیم $R-$مدول A هم‌ریخت کوچک باشد. اگر B یک $S-$زیرمدول سره‌ی A و $\varphi : B \longrightarrow A$ یک $S-$هم‌ریختی ناصفر باشد، آن‌گاه B یک $R-$زیرمدول سره از A است و داریم:

$$\forall r \in R, \varphi(rx) = \varphi(r + ann(A)a) = r + ann(A)\varphi(a) = r\varphi(x).$$

پس φ یک $R-$هم‌ریختی نیز است. لذا $ker(\varphi)$ یک $R-$زیرمدول کوچک از A و درنتیجه یک $S-$زیرمدول کوچک از A است. درنتیجه A به‌عنوان $S-$مدول هم‌ریخت کوچک است. به‌عکس؛ به طریق مشابه ثابت می‌شود. □

گزاره **۷.۳.** برای مدول نیم‌ساده‌ی A شرایط زیر معادل هستند‌اند:

۱. A همریخت کوچک است.

۲. A تک‌شکل است.

۳. A ساده است.

اثبات. بدیهی است. $\square$

گزاره ۸.۳. اگر M یک مدول آزاد روی دامنه‌ی ایدال اصلی باشد، هر زیرمدول آن آزاد است.

اثبات. به قضیه‌ی ۶.۱ از [۷] مراجعه شود. $\square$

گزاره ۹.۳. اگر R یک دامنه‌ی ایدال اصلی و A یک $R-$مدول آزاد باشد، آن‌گاه A همریخت کوچک است اگر و تنها اگر تک‌شکل باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم A همریخت کوچک، B یک زیرمدول آن باشد و $0 \neq \varphi \in Hom(B, A)$. پس $ker(\varphi) \ll B$، و چون A آزاد است، نتیجه می‌شود که بنا به گزاره‌ی ۸.۳ B نیز باید آزاد باشد. درنتیجه $\langle 0 \rangle$ تنها زیرمدول کوچک B است. بنابراین $ker(\varphi) = 0$ و A، $R-$مدولی تک‌شکل است. عکس حکم واضح است. $\square$

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم A یک $R-$مدول نوتری باشد. دراین‌صورت A همریخت کوچک است اگر و تنها اگر هر زیرمدول از A که توسط سه عضو تولید شود همریخت کوچک باشد.

اثبات. فرض کنیم هر زیرمدول از A که توسط سه عضو تولید شود، همریخت کوچک، B یک زیرمدول از A باشد و $0 \neq \varphi \in Hom(B, A)$. اگر $ker(\varphi) = 0$، آن‌گاه چیزی برای اثبات وجود ندارد. حال گیریم $ker(\varphi) \neq 0$، پس $0 \neq x \in ker(\varphi)$ وجود دارد. حال فرض کنیم $y \in B$ و $\varphi(y) = z$ قرار می‌دهیم $C = \langle x, y, z \rangle$؛ یعنی، C توسط سه عنصر تولید می‌شود، پس C همریخت کوچک است. حال زیرمدول $D = \langle x, y \rangle$ از C را درنظرگرفته و همریختی $\psi = \varphi|_D : D \longrightarrow C$ را تعریف می‌کنیم، بنابراین $ker(\psi) \ll D \leqslant B$، درنتیجه $ker(\varphi) \ll B$، اما $x \in ker(\psi)$، پس $\langle x \rangle \ll B$. چون A نوتری است، پس $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ وجود دارند، به‌طوری‌که $ker(\varphi) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. ازآن‌جایی که هر $\langle a_i \rangle$ در B کوچک است، نتیجه می‌گیریم که $ker(\varphi) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ نیز در B کوچک است. بنابراین A همریخت کوچک خواهدبود. عکس حکم آشکارا برقرار است. $\square$

تعریف ۱۱.۳. اگر M یک $R-$مدول باشد، زیرمدول تکین آن که با نماد $Z(M)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ی عناصری از M که پوچساز آن‌ها در R اساسی است. به‌عبارت دیگر، $Z(M) = \{m \in M | ann(m) \leqslant_e R\}$. اگر $Z(M) = M$، آن را یک مدول تکین و اگر $Z(M) = \langle 0 \rangle$، آن را یک مدول ناتکین می‌نامیم.

گزاره ۱۲.۳. اگر N یک زیرمدول از M باشد، زیرمدول K از M وجود دارد به‌طوری‌که $N \oplus K \leqslant_e M$.

اثبات. به گزاره‌ی ۷.۵ از [۸] مراجعه شود. $\square$

گزاره ۱۳.۳. فرض کنیم M یک $R-$مدول و N زیرمدول اساسی آن باشد. در این صورت $\frac{M}{N}$ تکین است.

اثبات. به گزاره‌ی ۲۱.۱ از [۹] مراجعه شود. $\square$

گزاره ۱۴.۳. اگر M مدول تکین و N یک مدول ناتکین باشد، در این صورت $Hom(M, N) = 0$.

اثبات. به صفحه‌ی ۳۳ از [۹] مراجعه شود. $\square$

گزاره ۱۵.۳. اگر A یک $R-$مدول ناتکین و همریخت کوچک باشد، آن‌گاه A درون‌ریخت کوچک است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که A یکنواخت است. فرض کنیم B زیرمدولی غیراساسی از A باشد، پس بنا به گزاره‌ی ۱۲.۳ زیرمدول C از A وجود دارد به‌طوری‌که $B \oplus C \leqslant_e A$. حال همریختی $f : B \oplus C \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $f(b + c) = b$ تعریف می‌کنیم که در آن $b + c \in B \oplus C$. اکنون با توجه به همریخت کوچک بودن A داریم، $\langle 0 \rangle \oplus C = ker(f) \ll B \oplus C$ و درنتیجه $C \ll C$ که امکان‌پذیر نیست؛ لذا فرض خلف باطل و $B \leqslant_e A$، و این یعنی A یکنواخت است. پس اگر B زیرمدولی از A باشد، آن‌گاه با استفاده از گزاره‌ی ۱۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{A}{B}$ تکین است و درنتیجه بنابر گزاره‌ی ۱۴.۳ داریم، $Hom(\frac{A}{B}, A) = 0$. $\square$

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط ناتکین بودن در گزاره‌ی بالا ضروری است.

مثال ۱۶.۳. با توجه به مثال ۴.۳، $\mathbb{Z}_4$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$–مدول هم‌ریخت کوچک است، اما به‌راحتی دیده می‌شود که ناتکین نیست (در واقع $Z(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4$). حال اگر زیرمدول $\langle \bar{2} \rangle$ را در نظر بگیریم، $Hom(\frac{\mathbb{Z}_4}{\langle \bar{2} \rangle}, \mathbb{Z}_4) \neq 0$.

با توجه به گزاره‌ی ۱۵.۳ و این نکته که هر مدول روی حلقه‌ی نیم‌ساده ناتکین است، نتیجه‌ی زیر را داریم.

نتیجه ۱۷.۳. اگر A یک مدول هم‌ریخت کوچک روی حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی R باشد، درون‌ریخت کوچک است.

تعریف ۱۸.۳. R–مدول M را کاملاً درون‌برپذیر می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر N و هر هم‌ریختی ناصفر $g : N \longrightarrow M$ داشته باشیم، $Hom(M, N)g \neq \langle 0 \rangle$.

گزاره ۱۹.۳. اگر A یک مدول کاملاً درون‌برپذیر و درون‌ریخت کوچک باشد، آن‌گاه A هم‌ریخت کوچک است.

اثبات. فرض کنیم B زیرمدولی از A و $\varphi : B \longrightarrow A$ یک هم‌ریختی ناصفر باشد. ازآن‌جایی که A کاملاً درون‌برپذیر است، یک هم‌ریختی ناصفر $\psi : A \longrightarrow B$ نیز وجود دارد. حال $B \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B$ را درنظر می‌گیریم و داریم، $\psi \circ \varphi \neq 0$. اما $ker(\psi \circ \varphi) \ll B$ و $ker(\varphi) \subseteq ker(\psi \circ \varphi)$، لذا $ker(\varphi) \ll B$ و این نتیجه می‌دهد که A هم‌ریخت کوچک است. $\square$

گزاره ۲۰.۳. فرض کنیم A یک R–مدول شبه‌تزریقی باشد به‌طوری‌که هر زیرمدول آن هم‌بسته است. آن‌گاه A هم‌ریخت کوچک است اگر و تنها اگر درون‌ریخت کوچک باشد.

اثبات. فرض کنیم B یک زیرمدول از A و $\varphi : B \longrightarrow A$ یک هم‌ریختی ناصفر و $i : B \longrightarrow A$ تک‌ریختی شمول باشد. از آن‌جایی که A شبه‌تزریقی است، $\psi \in End(A)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\psi \circ i = \varphi$. بنابراین برای هر $b \in B$ داریم $\psi(b) = \varphi(b)$ و درنتیجه $ker(\varphi) \subseteq ker(\psi)$. اما $ker(\psi) \ll A$، پس $ker(\varphi) \ll A$. حال چون B هم‌بسته است و $ker(\varphi) \ll B$، پس نتیجه می‌گیریم که $ker(\varphi) \ll B$. لذا A هم‌ریخت کوچک است. عکس حکم آشکار است. $\square$

اگر $A \oplus B$ یک R–مدول هم‌ریخت کوچک باشند، آن‌گاه بنابه گزاره‌ی ۵.۳، A و B دو R–مدول هم‌ریخت کوچک هستند، اما مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۲۱.۳. با توجه به مثال ۴.۳، $\mathbb{Z}_4$ یک $\mathbb{Z}$–مدول هم‌ریخت کوچک است. حال اگر قرار دهیم $A = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$، آن‌گاه A هم‌ریخت کوچک نیست. زیرا، اگر زیرمدول $B = \mathbb{Z}_4 \oplus \langle \bar{2} \rangle$ را درنظر گرفته و $\varphi : B \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $\varphi(x, y) = (x, 2y)$ تعریف کنیم، آن‌گاه $ker(\varphi) = \langle \bar{0} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle$ در B کوچک نیست؛ زیرا، $B = (\mathbb{Z}_4 \oplus \langle \bar{0} \rangle) + (\langle \bar{0} \rangle \oplus \langle \bar{2} \rangle)$.

۴ مدول‌های هم‌ریخت اساسی

در این بخش به‌عنوان قسمت پایانی مقاله به معرفی و مطالعه‌ی مدول‌های هم‌ریخت اساسی به‌عنوان دوگان مدول‌های هم‌ریخت کوچک می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴. R–مدول A را هم‌ریخت اساسی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول سره‌ی B از A و هر $0 \neq \varphi \in Hom(A, \frac{A}{B})$ داشته باشیم، $\varphi(A) \leqslant_e \frac{A}{B}$. حلقه‌ی R را هم‌ریخت اساسی گوییم، هرگاه به‌عنوان مدول روی خودش هم‌ریخت اساسی باشد.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم A یک R–مدول دارای بعد نوتری باشد. در این صورت A را یک مدول اتمی می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول B از A داشته باشیم، $n - dim(B) < n - dim(A)$. همچنین مدول A را بروشکل می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول B از A، هر $0 \neq \varphi \in Hom(A, \frac{A}{B})$ پوشا باشد.

گزاره ۳.۴. هر مدول اتمی بروشکل است.

اثبات. به گزاره‌ی ۲.۲ از [۱۱] مراجعه شود. $\square$

برای جزئیات بیش‌تر راجع به بعد نوتری و مدول‌های اتمی به [۱]، [۲]، [۳]، [۱۱] و [۱۲] مراجعه شود.

مثال ۴.۴. هر مدول ساده یک مدول هم‌ریخت اساسی است. زیرا، اگر A یک مدول ساده باشد، آن‌گاه تنها زیرمدول سره‌ی آن زیرمدول $\langle 0 \rangle$ است و بنا به لم شور هر $0 \neq \varphi \in Hom(A, \frac{A}{\langle 0 \rangle})$ یک یک‌ریختی است، بنابراین $\varphi(A) = \frac{A}{\langle 0 \rangle} \leqslant_e \frac{A}{\langle 0 \rangle}$.

مثال **۵.۴.** به‌راحتی دیده می‌شود که هر مدول بروشکل یک مدول هم‌ریخت اساسی است و درنتیجه ازآن‌جایی که هر مدول اتمی بروشکل است، باید هم‌ریخت اساسی باشد.

مثال **۶.۴.** $\mathbb{Z}_۴$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$–مدول، هم‌ریخت اساسی است. زیرا، $\langle ۰\rangle$ و $\langle ۲\rangle$ تنها زیرمدول‌های سره‌ی آن هستاند و اگر $۰ \neq \varphi \in Hom(A, \frac{\mathbb{Z}_۴}{\langle ۰\rangle})$، آن‌گاه φ همانی است و یا $\varphi(x) = ۲x$. بنابراین $\varphi(\mathbb{Z}_۴) = \mathbb{Z}_۴ \leqslant_e \frac{\mathbb{Z}_۴}{\langle ۰\rangle}$ و یا $\varphi(\mathbb{Z}_۴) = \langle \overline{۲}\rangle \leqslant_e \frac{\mathbb{Z}_۴}{\langle ۰\rangle}$ و اگر $۰ \neq \psi \in Hom(\mathbb{Z}_۴, \frac{\mathbb{Z}_۴}{\langle ۲\rangle})$، آن‌گاه $\psi(y) = ۲y$، لذا $\psi(\mathbb{Z}_۴) = \frac{\mathbb{Z}_۴}{\langle ۲\rangle} \leqslant_e \frac{\mathbb{Z}_۴}{\langle ۲\rangle}$.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک مدول یکنواخت لزوماً هم‌ریخت اساسی نیست.

مثال **۷.۴.** $\mathbb{Z}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$–مدول، هم‌ریخت اساسی نیست؛ زیرا، اگر p و q اعداد اول متمایز باشند و $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{\langle pq\rangle}$ را با ضابطه‌ی $\varphi(x) = px + pq\mathbb{Z}$ تعریف کنیم، آن‌گاه $\mathbb{Z}_{pq} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\langle pq\rangle}$ و $\varphi(\mathbb{Z}) = \frac{p\mathbb{Z}}{pq\mathbb{Z}} \simeq \langle \overline{p}\rangle$. ولی $\langle \overline{p}\rangle$ در $\mathbb{Z}_{pq}$ اساسی نیست.

گزاره **۸.۴.** اگر هر مدول خارج‌قسمتی ناصفر از A یکنواخت باشد، آن‌گاه A هم‌ریخت اساسی است.

اثبات. فرض کنیم B یک زیرمدول سره‌ی A و $\varphi : A \longrightarrow \frac{A}{B}$ یک هم‌ریختی ناصفر باشد. چون $\frac{A}{B} \neq ۰$، پس $\frac{A}{B}$ مدولی یکنواخت است و درنتیجه $\varphi(A) \leqslant_e \frac{A}{B}$. □

تعریف **۹.۴.** مدول A را تک–رشته ای می‌نامیم، هرگاه برای هر دو زیرمدول B و C از A داشته باشیم، $B \subseteq C$ یا $C \subseteq B$.

نتیجه **۱۰.۴.** هر مدول تک–رشته ای هم‌ریخت اساسی است.

گزاره **۱۱.۴.** تصویر هم‌ریخت یک مدول هم‌ریخت اساسی، مدولی هم‌ریخت اساسی است.

اثبات. فرض کنیم A یک مدول هم‌ریخت اساسی و $f : A \longrightarrow M$ یک برویختی باشد. حال اگر N یک زیرمدول سره از M باشد، $۰ \neq \varphi \in Hom(M, \frac{M}{N})$ و $g : \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{A}{f^{-۱}(N)}$ را با ضابطه‌ی $g(x + N) = y + f^{-۱}(N)$ تعریف کنیم که در آن $f(y) = x$، آن‌گاه دنباله‌ی $A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\varphi} \frac{M}{N} \xrightarrow{g} \frac{A}{f^{-۱}(N)}$ را داریم. به‌راحتی دیده می‌شود که g یک‌ریختی است و ازآن‌جایی که A هم‌ریخت اساسی است، نتیجه می‌گیریم که $g \circ \varphi \circ f(M) \leqslant_e \frac{A}{f^{-۱}(N)}$. حال ادعا می‌کنیم که $\varphi(M) \leqslant_e \frac{M}{N}$. برای این منظور، $g \circ \varphi \circ f(A) = g \circ \varphi(M) \leqslant_e \frac{A}{f^{-۱}(N)}$. درنتیجه $g^{-۱}(g \circ \varphi(M)) \leqslant_e g^{-۱}(\frac{A}{f^{-۱}(N)})$. لذا با توجه به این‌که g یک‌ریختی است، $\varphi(M) \leqslant_e \frac{M}{N}$ و M هم‌ریخت اساسی است. □

نتیجه **۱۲.۴.** هر مدول خارج قسمتی از یک مدول هم‌ریخت اساسی، یک مدول هم‌ریخت اساسی است.

نتیجه **۱۳.۴.** هر جمع‌وند مستقیم از یک مدول هم‌ریخت اساسی، یک مدول هم‌ریخت اساسی است.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک مدول نیم‌ساده لزوماً هم‌ریخت اساسی نیست. لذا با توجه به مثال ۴.۴، جمع مستقیم مدول‌های هم‌ریخت اساسی لزوماً هم‌ریخت اساسی نیست.

مثال **۱۴.۴.** اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$–مدول هم‌ریخت اساسی نیست.

گزاره **۱۵.۴.** اگر A یک R–مدول هم‌ریخت اساسی باشد، آن‌گاه برای هر $r \in R$، $rA = ۰$ یا $rA \leqslant_e A$.

اثبات. اگر $۰ \neq r \in R$ و $rA \neq ۰$، آن‌گاه $\varphi : A \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $\varphi(x) = rx$ یک هم‌ریختی ناصفر است. بنابراین با توجه به هم‌ریخت اساسی بودن A داریم، $rA = \varphi(A) \leqslant_e A$. □

نتیجه **۱۶.۴.** اگر A یک R–مدول وفادار و هم‌ریخت اساسی باشد، آن‌گاه برای هر $۰ \neq r \in R$ داریم، $rA \leqslant_e A$.

تعریف **۱۷.۴.** با فرض این‌که M یک مدول باشد، زیرمدول N از آن را e–کوچک می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول اساسی مانند E از M، از تساوی $N + E = M$ نتیجه بگیریم که $E = M$. همچنین M را e–پوچ می‌نامیم، هرگاه هر زیرمدول آن e–کوچک باشد.

گزاره **۱۸.۴.** فرض کنیم A یک مدول هم‌ریخت اساسی باشد، آن‌گاه زیرمدول S از A کوچک است اگر و تنها اگر e–کوچک باشد.

اثبات. فرض کنیم S یک زیرمدول $e-$کوچک و L زیرمدولی دل‌خواه از A باشد به‌طوری‌که $S + L = A$. حال $\varphi : A \longrightarrow \frac{A}{S\cap L}$ را با ضابطه‌ی $\varphi(a) = y + S \cap L$ تعریف می‌کنیم که در آن $a = x + y$، برای $x \in S$ و $y \in L$. به‌راحتی دیده می‌شود که φ یک همریختی است. اگر $\varphi = ۰$، آن‌گاه برای هر $y \in S$ داریم $y \in L$. لذا $L \subseteq S$ و درنتیجه $A = S$ که این یک تناقض است. بنابراین $۰ \neq \varphi \in Hom(A, \frac{A}{S\cap L})$، پس بنا بر همریخت اساسی بودن A داریم، $\varphi(A) \leqslant_e \frac{A}{S\cap L}$. پس داریم، $\frac{L}{S\cap L} \leqslant_e A$. لذا بنابه فرض $L = A$؛ یعنی، S یک زیرمدول کوچک از A است. عکس حکم واضح است. □

نتیجه ۱۹.۴. یک مدول همریخت اساسی پوچ است اگر و تنها اگر $e-$پوچ باشد.

تذکر ۲۰.۴. اگر A یک مدول همریخت اساسی باشد، برای هر درون‌ریختی ناصفر مانند $\varphi : A \longrightarrow A$ داریم، $\varphi(A) \leqslant_e A$؛ اما عکس این مطلب برقرار نیست؛ زیرا، اگر $\mathbb{Q}$ را به‌عنوان $\mathbb{Z}-$مدول در نظر بگیریم، برای هر $۰ \neq \varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$، داریم $\varphi(\mathbb{Q}) \leqslant_e \mathbb{Q}$. اما $\mathbb{Q}$ همریخت اساسی نیست. همچنین با توجه به مثال ۷.۴، می‌توان $\mathbb{Z}$ را نیز به‌عنوان مثال نقض درنظر گرفت.

گزاره ۲۱.۴. فرض کنیم A یک $R-$مدول همریخت اساسی و $End(A)$ یک حلقه‌ی منظم فون نیومن باشد. آن‌گاه برای هر زیرمدول سره‌ی B داریم، $Hom(A, B) = ۰$.

اثبات. فرض کنیم $۰ \neq f \in End(A)$، B یک زیرمدول سره از A و $g : A \longrightarrow \frac{A}{B}$ برریختی کانونی باشد. بنابراین $۰ \neq g \circ f \in Hom(A, \frac{A}{B})$ و با توجه به همریخت اساسی بودن A داریم، $g \circ f(A) \leqslant_e \frac{A}{B}$ و درنتیجه $\frac{f(A)}{B} \leqslant_e \frac{A}{B}$. پس $f(A) \leqslant_e A$؛ اما $End(A)$ منظم فون نیومن است، پس $f(A)$ یک جمعوند مستقیم A است، لذا باید داشته باشیم، $f(A) = A$ و درنتیجه $Hom(A, B) = ۰$. □

نتیجه ۲۲.۴. اگر A یک مدول نیم‌ساده و همریخت اساسی باشد، آن‌گاه برای هر زیرمدول سره‌ی B از A، $Hom(A, B) = ۰$.

سپاس‌گزاری. نویسندگان بر خود لازم می‌دانند از داوران محترم جهت مطالعه‌ی دقیق این مقاله و نظرات ارزشمند ایشان که به بهبود مقاله کمک شایانی کرد کمال تشکر را داشته باشند.

فهرست منابع

[1] T. Albu, S. Rizvi, Chain condition on quotient finite dimensional modules, Comm. Algebra. **29** (2001) 1909-1928.

[2] A.R. Alehafttan, On the countably Noetherian dimension of modules, Comm. Algebra. **50** (2022) 2775-2781.

[3] A.R. Alehafttan, N. Shirali, On the Noetherian dimension of Artinian modules with homogeneous uniserial dimension, Bull. Iranian. Math. Soc. **43** (2017) 2457-2470.

[4] A.R. Alehafttan, N. Shirali, On the small Krull dimension of modules, Comm. Algebra. **46** (2018) 2023-2032.

[5] F.W. Anderson and K.R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Springer, 1992.

[6] R. Damiano, Coflat rings and modules, Pacific Journal of Mathematics. **81** (1979) 349-369.

[7] T.W. Hunggerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 1974.

[8] K.R. Goodearl and R. B. Warfield, *An Introduction to Non-Commutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, 1989.

[9] K.R. Goodearl, *Ring theory, nonsingular rings and modules*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1976.

[10] R. Gordon and J.C. Robson, *Krull dimension*, Amer. Math. Soc, 1973.

[11] O.A.S. Karamzadeh, A.R. Sajedinejad, Atomic modules, Comm. Algebra. **29** (2001) 2757-2773.

[12] O.A.S. Karamzadeh, N. Shirali, On the countability of Noetherian dimension of Modules, Comm. Algebra. **32** (2004), 4073-4083.

[13] F. Kasch, *Modules and rings*, Academic press, London, 1982.

[14] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.

On small endomorphic, small homomorphic and essential homomorphic modules

A. R. Alehafttan [†] , A. Assari, H. Kasiry

Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran

Communicated by: Amir Mafi

Received: 2022/5/18 Accepted: 2022/12/19

Abstract: In this paper we introduce the notions of small endomorphic, small homomorphic and essential homomorphic modules. Afterwards we investigate not only their own properties but also some relations between themselves as well as with some other kinds of modules.

Keywords: small endomorphic, small homomorphic, essential homomorphic.

[†] Corresponding author.

E-mail addresses: a.r.alehafttan@jsu.ac.ir (F. Author), , amirassari@jsu.ac.ir (S. Author), hossein_kasiry@jsu.ac.ir (T. Author).