مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۱، ص ۱۱۶-۱۲۹

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.41057.2047

کاربرد جبرخطی در رده‌بندی پوشش‌های آبلی‌مقدماتی متقارن گراف نائورو

علی‌اصغر طالبی [×]، نرگس مهدی‌پور

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: سعید علیخانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۸

چکیده: فرض کنید X یک گراف و G زیرگروه $\mathrm{Aut(X)}$ باشد. گراف X را G- متقارن گویند هرگاه G روی کمان‌ها به صورت انتقالی عمل کند. روش پوششی مدت طولانی است که به‌عنوان ابزار نیرومندی در توپولوژی و نظریه‌ی گراف شناخته شده است. در این مقاله با استفاده ازمفاهیم جبرخطی و روش‌های پوششی به رده‌بندی پوشش‌های آبلی‌مقدماتی متقارن گراف نائورو برای یکی از زیرگروه‌های متقارن آن خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: گراف متقارن، گراف پوششی، تخصیص ولتاژ، زیرفضاهای پایا.

رده‌بندی ریاضی: 05C25; 20B25.

۱ مقدمه

در این مقاله همه‌ی گراف‌ها ساده، متناهی و همبندند. مجموعه‌ی رئوس، یال‌ها، کمان‌ها و گروه خودریختی گراف X به‌ترتیب با نمادهای $V(X)$، $E(X)$، $A(X)$ و $\mathrm{Aut(X)}$ نشان داده می‌شود. در این مقاله نماد $\leq$ هم برای زیرگروه و هم برای زیرفضا به‌کار می‌رود. یک گراف X را k - منظم می‌گوییم هرگاه درجه‌ی همه‌ی رئوس آن برابر با عدد k باشد. ضمنا گراف ۳ - منظم را گراف مکعبی گویند.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک گراف و N زیرگروهی غیرانتقالی از $\mathrm{Aut(X)}$ باشد. گراف خارج قسمتی $\dfrac{X}{N}$ یا X_N القایی توسط N به صورت زیر تعریف می‌شود:
۱- مجموعه‌ی رئوس این گراف، مجموعه‌ی همه‌ی مدارهای گراف تحت عمل N روی $V(X)$ است.
۲- فرض کنیم A و B متعلق به $V(\dfrac{X}{N})$ باشند (دو راس از گراف خارج قسمتی)، $\{A, B\}$یک یال در گراف است اگر و تنها اگر $u \in A$ و $v \in B$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که u و v در گراف X مجاور باشند.

[×]نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: a.talebi@umz.ac.ir (A.A. Talebi), n.mehdipour@umz.ac.ir (N. Mehdipoor)

تعریف **۱.۲.** فرض کنیم X و $\overline{X}$ دو گراف باشند. همریختی پوشای $p : \overline{X} \longrightarrow X$ را تصویر پوششی می‌نامند، هرگاه p یک تابع دوسویی موضعی باشد؛ یعنی برای هر راس $\overline{v} \in V(\overline{X})$، تحدید p به همسایگی $N_{\overline{X}}(\overline{v})$ یک تابع دوسویی به توی همسایگی $N_X(p(\overline{v}))$ باشد که $p(\overline{v}) \in V(X)$ است. در این صورت گراف $\overline{X}$ را گراف پوشش و X را گراف پایه گویند.

تعریف **۱.۳.** فرض کنیم X یک گراف و $\overline{X}$ پوششی از گراف X باشد. این پوشش را منظم یا K - پوشش گویند هرگاه زیرگروه نیم منظم K از $\mathrm{Aut(X)}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که گراف X با گراف خارج قسمتی $\dfrac{\overline{X}}{K}$ یک‌ریخت باشد. فرض کنیم $\overline{X}$ پوششی از گراف X باشد، این پوشش را آبلی‌مقدماتی گویند زمانی که K آبلی‌مقدماتی باشد.

گراف X را راس – انتقالی، یال – انتقالی و کمان – انتقالی است هرگاه $\mathrm{Aut(X)}$، به‌ترتیب روی مجموعه‌ی راس‌ها، یال‌ها و کمان‌ها به‌طور انتقالی عمل کند.

تعریف **۱.۴.** فرض کنیم s یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک s - کمان در گراف یک $s+1$ - تایی مانند $(v_0, v_1, \ldots, v_s)$ است به‌طوری‌که v_{i-1} با v_i برای $1 \leq i \leq s$ مجاور و برای هر $1 \leq i < s$، $v_{i-1} \neq v_{i+1}$. گراف X را s - کمان انتقالی می‌گوییم هرگاه $\mathrm{Aut(X)}$ روی مجموعه‌ی s - کمان‌های X به‌طور انتقالی عمل کند. یک گراف ۰ - کمان – انتقالی، گرافی راس – انتقالی است. یک گراف ۱ - کمان – انتقالی، گرافی کمان – انتقالی است.

استفاده از روش‌های پوششی یکی از موضوعات مورد بحث در نظریه‌ی جبری گراف است. این روش کاربرد فراوانی در توپولوژی دارد. تات در سال ۱۹۶۶ اثبات کرد که هر گراف یال – انتقالی و راس – انتقالی از درجه‌ی فرد، متقارن است [۲۵]. کندر و هم‌کارانش در سال ۲۰۰۶ رده‌بندی کاملی از گراف‌های متقارن تا مرتبه ۷۶۸ را ارائه کردند [۵]. تات در [۲۵] نشان داده است که اگر گرافی s–منظم مکعبی باشد، آن‌گاه s حداکثر۵ است. کندر در [۴] گراف‌های s–منظم مکعبی را تا مرتبه ۲۰۴۸ با استفاده از نرم‌افزار مگما [۲] رده‌بندی کرد. در سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ مطالعات توسط فنگ و هم‌کارانش روی گراف s –منظم صورت گرفت [۹]، [۱۰]. کواک، فنگ و ونگ در [۸] گراف‌های متقارن مکعبی از مرتبه‌های $8p$ و $8p^2$ را رده‌بندی کردند. رده‌بندی و مطالعه‌ی گراف‌های s–منظم مکعبی از مرتبه‌های $22p$ و $22p^2$ توسط طالبی و مهدی‌پور [۲۴] انجام شده است. ایز چنگ و اوکسلی در [۳] رده‌بندی گراف‌های ۱– منظم از مرتبه‌ی $2p$ را انجام داده‌اند.

رده‌بندی گراف‌های متقارن از درجه‌ی چهار با در نظر گرفتن گروه خودریختی‌هایشان توسط گاردینر و پراگر در سال ۱۹۹۴ مطرح گردید [۱۱، ۱۲]. قاسمی و همکارش در [۱۴] به رده‌بندی گراف‌های s– انتقالی از درجه‌ی چهار با مرتبه‌ی $4p^2$ پرداختند. قاسمی رده‌بندی گراف‌های ۱ – منظم از درجه‌ی چهار با مرتبه‌ی $3p^2$ را در سال ۲۰۱۲ مورد مطالعه قرار داد [۱۳]. رده‌بندی گراف‌های s–منظم مکعبی از درجه‌ی پنج امروزه بسیار مورد بحث و بررسی قرار گرفته است که در این میان می‌توان به رده‌بندی گراف‌های متقارن از مرتبه‌ی $2pq$ اشاره کرد [۱۷].

رده‌بندی پوشش‌های آبلی مقدماتی با استفاده از روش‌های جبرخطی در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفت در این میان می‌توان به رده‌بندی پوشش‌های آبلی مقدماتی گراف‌های K_4، Q_3، پترسن، موبیوس–کانتور، پاپوس، اکتاهیدر، گراف دوبخشی کامل $K_{4,4}$ و گراف کامل K_5 اشاره نمود. برای نمونه می‌توان مراجع [۷، ۸، ۱۰، ۱۸، ۲۰، ۲۱] و همچنین [۲۲] را مطالعه نمود. در این مقاله با استفاده ازمفاهیم جبرخطی و روش‌های پوششی به رده‌بندی پوشش‌های آبلی‌مقدماتی متقارن گراف نائورو برای یکی از زیرگروه‌های متقارن آن پرداخته می شود.

۲ تخصیص ولتاژ و گروه همولوژی اول

در این بخش مفهوم جدیدی از نظریه‌ی جبری گراف معرفی می‌شود. این مفهوم تحت عنوان تخصیص ولتاژ است که نقش اساسی در معرفی گراف‌های متقارن دارد. با استفاده از این تخصیص ولتاژ گراف جدیدی معرفی خواهد شد که نشان داده می‌شود این گراف جدید پوششی برای گراف پایه است. فرض کنیم X یک گراف و K گروهی متناهی باشد. معکوس کمان a را با a^{-1} نشان می‌دهند.

تعریف **۲.۱.** یک تخصیص ولتاژ (یا K – تخصیص ولتاژ) از X یک تابع $\phi : A(X) \longrightarrow K$ است با این خاصیت که برای هر $a \in A(X)$، $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$. مقادیر ϕ را ولتاژ و K را گروه ولتاژ گویند.

گراف $X \times_\phi K$ یا $Cov(X, \phi)$ از تابع ولتاژ ϕ، گروه ولتاژ K و گراف X به‌دست می‌آید. مجموعه‌ی رئوس این گراف $V(X) \times K$، $\{(u, g) \mid u \in V(X), g \in K\}$ است.
مجموعه‌ی یال‌های این گراف $E(X) \times K$، به عبارتی $\{(e, g) \mid e \in E(X), g \in K\}$ است. حال دو راس (u, g) و (v, g') در گراف $X \times_\phi K$ با هم مجاورند، هرگاه u و v در گراف X با هم مجاور بوده و $g' = \phi(a)g$ به‌طوری‌که $a = (u, v) \in A(X)$.

به‌وضوح تحت تابع تصویر $p\,:\,X\times_\phi K\longrightarrow X$ ، گراف $X\times_\phi K$ پوششی برای گراف X خواهد بود. اکنون بررسی می‌شود که آیا گراف $X\times_\phi K$، یک K - پوشش برای گراف X است یا خیر؟ با تعریف کردن ضابطه‌ی $(u,g')^g=(u,g'g)$ برای هر $g\in K$ و $(u,g')\in V(X\times_\phi K)$، K زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(\mathrm{X}\times_\phi \mathrm{K})$ می‌شود، به‌طوری‌که روی مجموعه‌ی رئوس $V(X\times_\phi K)$ به صورت نیم‌منظم عمل می‌کند. با تعریف کردن این ضابطه شرایط برای K - پوشش بودن برقرار می‌شود. بنابراین گراف $X\times_\phi K$، یک K - پوشش برای گراف X است.

برای هر $u\in V(X)$ و $uv\in E(X)$، مجموعه‌ی رئوس $\{(u,g)|\ g\in K\}$ یک فیبر از u نامیده می‌شود. مجموعه‌ی یال‌های $\{(u,g)(v,\phi(a)g)\mid g\in K\}$ فیبری از uv است که در آن $a=(u,v)\in A(X)$. همه‌ی خودریختی‌هایی که یک فیبر را به یک فیبر برده‌اند، گروهی را با نام پایدارنده‌ی فیبر ایجاد می‌کند.

به‌عکس برای هر پوشش منظم $\overline{X}$ از X با گروه تبدیل پوششی K، یک K - تخصیص ولتاژ موجود است. (در این‌جا گروه تبدیل پوششی K، گروهی است که هرعضو آن یک فیبر را به یک فیبر می‌برد.)

تعریف **۲.۲**. پوشش منظم $\overline{X}$ از گراف X با تابع تصویر $p\,:\,X\times_\phi K\longrightarrow X$ و درخت فراگیر T از گراف X را در نظر بگیریم. تخصیص ولتاژ ϕ را T - کاهشی گویند هرگاه ولتاژها روی کمان‌های درخت، همانی باشد.

گروس و توکر در [۱۵] اثبات کردند برای درخت فراگیر دلخواه T از گراف X، هر پوشش منظم $\overline{X}$ از گراف X از یک تخصیص ولتاژ ϕ که T - کاهشی است بدست می‌آید. به‌وضوح برای یک تخصیص ولتاژ ϕ که T - کاهشی است، $X\times_\phi K$ هم‌بند است اگر و تنها اگر ولتاژها روی کمان‌های درخت متمم، گروه ولتاژ K را تولید کند [۱۶].

تعریف **۳.۲**. اگر $\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathrm{X})$ و $\overline{\alpha}\in\mathrm{Aut}(\overline{\mathrm{X}})$ موجود باشند به‌طوری‌که $\overline{\alpha}p=p\alpha$ (عمل گروه از چپ در نظر گرفته شده است)، آن‌گاه $\overline{\alpha}$ یک ارتقا از α است و α یک تصویر از $\overline{\alpha}$ است.

مجموعه‌ی ارتقاها زیرمجموعه‌ای از $\mathrm{Aut}(\overline{\mathrm{X}})$ و مجموعه‌ی تصاویر این ارتقاها زیرمجموعه‌ای از $\mathrm{Aut}(\mathrm{X})$ است. هرگاه گراف پوششی $\overline{X}$ هم‌بند باشد آن‌گاه گروه تبدیلات پوششی یک ارتقا از گروه بدیهی است. به‌عبارتی دیگر
$K=\{\overline{\alpha}\in\mathrm{Aut}(\overline{\mathrm{X}})\mid \mathrm{p}=\overline{\alpha}\mathrm{p}\}$. به‌وضوح اگر $\overline{\alpha}$ یک ارتقا از α باشد، آن‌گاه $K\overline{\alpha}$ یک ارتقا از α است [۱۹].

تعریف **۴.۲**. فرض کنیم X یک گراف و $\overline{X}$ پوششی از گراف X باشد. تصویر پوششی $p\,:\,\overline{X}\rightarrow X$ کمان - انتقالی است هرگاه زیرگروه کمان - انتقالی از $\mathrm{Aut}(\mathrm{X})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که این زیرگروه ارتقا یابد.

تعریف **۵.۲**. درخت فراگیر T از گراف X را در نظر بگیریم. هر یال را که در گراف X باشد و در درخت T نباشد، یک وتر گویند. گشت بسته w را که تنها شامل یک وتر از گراف X باشد، گشت بسته بنیادی می‌نامیم. به‌همین ترتیب دور w که تنها شامل یک وتر از گراف هم‌بند از تخصیص ولتاژ T - کاهشی X باشد، دور بنیادی است و با نماد C_{x_i} نشان داده می‌شود، که در آن x_i وتر است.

فرض کنیم $X\times_\phi K\longrightarrow X$ یک K - پوشش هم‌بند از تخصیص ولتاژ ϕ که T - کاهشی است، باشد. به‌طور طبیعی می‌توان تخصیص ولتاژ روی کمان‌ها را به تخصیص ولتاژ روی گشت‌ها تعمیم داد. $\alpha\in Aut(X)$ را در نظر بگیریم. تابع $\widetilde{\alpha}$ از مجموعه‌ی گشت‌های بسته‌ی بنیادی شروع شده از راس v متعلق به $V(X)$، به توی K را که در آن

$$(\phi(C))^{\widetilde{\alpha}}=\phi(C^\alpha),$$

تعریف می‌کنیم. C روی همه‌ی گشت‌های بسته‌ی بنیادی واقع بر راس v تعریف می‌شود و $\phi(C)$ و $\phi(C^\alpha)$ به‌ترتیب ولتاژها روی C و C^α است. توجه کنید اگر K آبلی باشد، $\widetilde{\alpha}$ به انتخاب راس بستگی ندارد و دورهای بنیادی ایجادشده توسط کمان‌های درخت متمم از گراف X را می‌توان با گشت‌های بسته‌ی بنیادی جای‌گزین کرد.

فرض کنیم u_i و e_i به‌ترتیب رئوس و یال‌های گراف X باشد. ۰-زنجیرها را جمع رسمی رئوس گراف X، به‌صورت $c_\circ=\sum_{a_i\in Z}a_iu_i$ و ۱- زنجیرها را جمع رسمی یال‌های گراف و به‌صورت $c_۱=\sum_{b_i\in Z}b_ie_i$ در نظر بگیریم. مجموعه‌ی همه‌ی ۰-زنجیرها با $C_\circ$ و مجموعه‌ی همه‌ی ۱-زنجیرها با $C_۱$ نشان داده می‌شوند. عمل‌گر مرزی δ به این‌صورت تعریف می‌شود که روی راس u و یال $e=uv$ داریم $\delta(u)=\circ$ و $\delta(e)=v-u$. اگر $\delta(c_۱)=\circ\in C_\circ$ آنگاه $c_۱$ را ۱-دور می‌نامند. ۱-زنجیری را که مرز زنجیر دیگر باشد، ۱-مرز گویند. زیرگروه دورها و مرزهای واقع در $C_۱$ با $Z_۱$ و $B_۱$ نشان داده می‌شود. گروه همولوژی اول گراف X را به‌صورت $H_۱(X)$ نمایش می‌دهند. این گروه برابر است با $\frac{B_۱}{Z_۱}$.

تعریف **۶.۲**. فرض کنیم X یک گراف باشد. گشت $v_\circ,e_۱,v_۱,\ldots,e_n,v_n$ را تحویل‌یافته گویند هرگاه شامل زیردنباله‌ی $veuev$ نباشد. اگر در گشت فوق همه‌ی زیردنباله‌های $veuev$ را حذف کنیم در انتها به یک گشت تحویل‌یافته می‌رسیم. دو گشت را هوموتوپیک گویند اگر دارای گشت‌های تحویل‌یافته‌ی یکسان باشند.

اگر گشت‌های تحویل‌یافته‌ی $W_۱$ و $W_۲$ در گراف X به این‌صورت باشد که راس انتهایی گشت $W_۱$ و راس ابتدایی $W_۲$ بر هم منطبق باشند در این صورت با قرارگرفتن دو دنباله کنار هم ضرب دو گشت تعریف می‌شود. مجموعه‌ی همه‌ی گشت‌های بسته‌ی تحویل‌یافته بر راس u با عمل ضرب تشکیل گروه اساسی گراف در u می‌دهند و با نماد $\pi(X,u)$ نشان داده می‌شود. فرض کنیم گراف X هم‌بند باشد در این صورت گروه اساسی این گراف یک گروه آزاد است.[۱۶]

فرض کنیم گراف X هم‌بند باشد. درخت فراگیر T و راس دلخواه u را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $\{e_i\}$ را یال‌هایی در نظر بگیریم که روی درخت فراگیر T قرار ندارد. با انتخاب جهت مشخص برای e_i راس‌های آغازین و پایانی آن را با a_i و b_i نمایش می‌دهند. گشت تحویل‌یافته‌ی $s_i \in \pi(X,u)$ به‌صورت $N_i e_i M_i$ است که N_i گشت تحویل‌یافته از u به a_i و M_i گشت تحویل‌یافته از b_i به u است. اگر a_i برابر u و b_i برابر u باشد دراین‌صورت به‌ترتیب N_i و M_i کنار گذاشته می‌شوند.

گشت تحویل‌یافته‌ی یکتای $s_i \in \pi(X,u)$ را متناظر با یال e_i در نظر بگیرید. دراین‌صورت گروه اساسی $\pi(X,u)$ گروهی آزاد با مجموعه‌ی مولد $\{s_i\}$ است. اگر r_e اندازه‌ی مجموعه‌ی مولد باشد، دراین‌صورت $H_۱(X) \cong \mathbb{Z}^{r_e}$ [۲۳]. هم‌ریختی $\pi(X,u) \longrightarrow H_۱(X)$ پوشا است و هسته‌ی آن زیرگروه جابه‌جاگر $\pi(X,u)$ است [۱۶]. گروه همولوژی اول $H۱(X,\mathbb{Z}_p)$ با ضرایب در $\mathbb{Z}_p$ یک‌ریخت با $\mathbb{Z}_p^{r_e}$ است.

۳ مفاهیم مقدماتی جبرخطی

اکنون مفاهیمی از جبرخطی مطرح می‌شود که در رده‌بندی گراف‌های متقارن پرکاربرد است. زیرفضا را با نماد $\langle\rangle$ نشان می‌دهند.

فرض کنیم W یک فضای برداری با بعد متناهی n روی میدان F باشد. هرگاه W دارای پایه $\{w_۱, w_۲, ..., w_n\}$ باشد، هر تبدیل‌خطی $T : W \to W$ با ماتریس مربعی (T_{ij}) از مرتبه n تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم W یک میدان برداری روی F باشد و $T : W \to W$ یک تبدیل خطی باشد. زیرفضای V از W را که با نماد $V \leq W$ نشان داده می‌شود، تحت $T-$ پایا گویند، هرگاه برای هر v متعلق به V، داشته باشیم $Tv \in V$.

در پیدا کردن زیرفضاهای پایا استفاده از قضیه‌ی مشکه (که یکی از قضایای پرکاربرد در جبرخطی است،) بسیار سودمند است. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. $GL(W)$ گروه یک‌ریختی‌های W به W است. دراین‌صورت نمایش خطی G در W، یک هم‌ریختی به‌صورت $G \to GL(W)$ است. در این حالت W را نمایش خطی G می‌نامند.

اکنون قضیه‌ی مشکه [۶] از جبرخطی مطرح می‌شود.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم G یک گروه متناهی روی میدان F باشد، به‌طوری که مشخصه میدان مرتبه گروه را عاد نکند. دراین‌صورت هر نمایش خطی G در W کاملاتحویل‌پذیر است، به‌عبارتی دیگر اگر U زیرفضای $G-$پایا از W باشد، آن‌گاه زیرفضای $G-$پایای V از W وجود دارد به‌طوری‌که $W = U \oplus V$.

فرض کنیم X گرافی هم‌بند و G زیرگروه $\mathrm{Aut(X)}$ مفروض باشند. درخت فراگیر T از گراف X را در نظر بگیرید. مجموعه کمان‌های $\{x_۱, ..., x_r\}$ شامل دقیقا یک کمان از هر یال $E(X \setminus T)$ است. فرض کنیم B_T پایه متناظر با گروه همولوژی اول $H_۱(X,\mathbb{Z}_p)$ باشد که توسط $\{x_۱, ..., x_r\}$ مشخص شده است. همچنین فرض کنیم

$$G^{*h} = \{\alpha^{*h} | \alpha \in G\} \leq GL(H_۱(X,\mathbb{Z}_p))$$

که توسط عمل G روی $H_۱(X,\mathbb{Z}_p)$ القا و $M_G \leq \mathbb{Z}_p^{r\times r}$ را ماتریس نمایش G^{*h} نسبت به پایه B_T در نظر بگیرید. M_G^t مجموعه‌ی همه‌ی ترانهاده‌های ماتریس‌های موجود در M_G است.

مالنیک و هم‌کارانش در سال ۲۰۰۴ به بیان قضیه زیر پرداختند [۲۱]. این قضیه در رده‌بندی پوشش‌های آبلی مقدماتی متقارن و نیم‌متقارن گراف بسیار سودمند است.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم X گرافی هم‌بند باشد. مجموعه کمان‌های $\{x_۱, x_۲, ..., x_r\} \subseteq A(X)$ شامل دقیقا یک کمان از هر یال $E(X \setminus T)$ است. فرض کنیم $\xi : A(X) \to \mathbb{Z}_p^{d\times ۱}$ تخصیص ولتاژی از گراف X باشد به‌طوری‌که ولتاژها روی درخت فراگیر T بدیهی باشد. قرار می‌دهیم:

$$Z(\xi) = [\xi(x_1), \xi(x_2), ..., \xi(x_r)]^t.$$

بنابراین یک زیرگروه G از $\mathrm{Aut(X)}$ تحت $p_\xi : Cov(X,\xi) \to X$ ارتقا می‌یابد اگر و فقط اگر زیرفضای القایی $\langle Z(\xi)\rangle$ زیرفضاهای M_G^t-پایای d-بعدی باشد.

۴ ساختار گراف نائورو

گراف نائورو دوبخشی، مکعبی و دارای ۲۴ راس و ۳۶ یال است که مجموعه رئوس و یال‌های آن به‌صورت زیر است:

$$V(X)=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲,۲۳\}$$

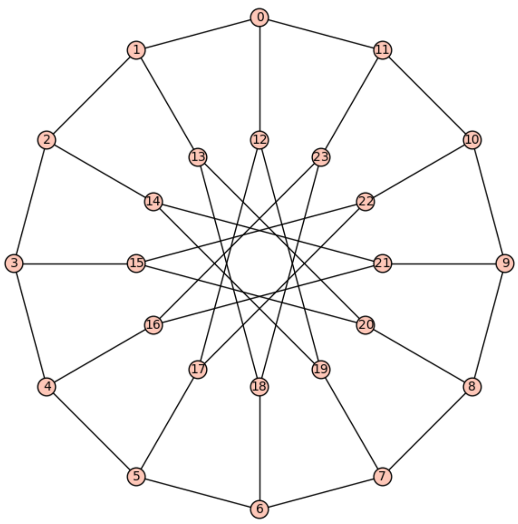
$$E(X)=\{\{۰,۱\},\{۰,۱۱\},\{۰,۱۲\},\{۱,۲\},\{۱,۱۳\},\{۲,۳\},\{۲,۱۴\},\{۳,۴\},\{۳,۱۵\},\{۴,۵\},\{۴,۱۶\},\{۵,۶\},$$
$$\{۵,۱۷\},\{۷,۶\},\{۶,۱۸\},\{۷,۸\},\{۱۹,۷\},\{۸,۹\},\{۲۰,۸\},\{۹,۱۰\},\{۲۱,۹\},\{۱۰,۱۱\},\{۲۲,۱۰\},\{۲۳,۱۱\},$$
$$\{۱۷,۱۲\},\{۱۲,۱۹\},\{۱۳,۱۸\},\{۱۳,۲۰\},\{۱۴,۱۹\},\{۱۴,۲۱\},\{۱۵,۲۰\},\{۱۵,۲۲\},\{۱۶,۲۱\},\{۱۶,۲۳\},\{۱۷,۲۲\},\{۱۸,۲۳\}\}.$$

α، β و γ را به‌عنوان خودریختی‌های این گراف در نظر بگیرید. بنابراین $\mathrm{Aut(X)}=\langle\alpha,\gamma,\beta\rangle$ و مرتبه‌ی آن ۱۴۴ است.

$$\alpha=(۱,۱۱)(۲,۱۰)(۳,۹)(۴,۸)(۵,۷)(۱۳,۲۳)(۱۴,۲۲)(۱۵,۲۱)(۱۶,۲۰)(۱۷,۱۹),$$

$$\beta=(۱,۱۱,۱۲)(۲,۲۳,۱۷)(۳,۱۶,۵)(۶,۱۵,۲۱)(۷,۲۰,۹)(۱۰,۱۹,۱۳)(۱۴,۱۸,۲۲),$$

$$\gamma=(۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱)(۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۲,۲۳).$$



با استفاده از نرم‌افزار سیج [۱] می‌توان دید که این گراف دقیقا دو زیرگروه سره متقارن دارد که مرتبه‌ی آن ۷۲ است. یکی از این زیرگروه‌های متقارن برابراست با $G=\langle\gamma^{۱۱},\beta^{۲}\rangle$. اکنون به‌ترتیب درخت فراگیر و کمان‌های درخت متمم با کمک نرم‌افزار سیج نمایش داده می‌شود.

$$\{۱,۰\},\{۱۱,۰\},\{۱۲,۰\},\{۱,۲\},\{۱,۱۳\},\{۲,۳\},\{۲,۱۴\},\{۳,۴\},\{۳,۱۵\},\{۴,۵\},\{۴,۱۶\},\{۵,۶\},\{۱۷,۵\},\{۶,۷\},\{۶,۱۸\},$$
$$\{۷,۸\},\{۷,۱۹\},\{۸,۹\},\{۸,۲۰\},\{۹,۱۰\},\{۲۱,۹\},\{۲۲,۱۰\},\{۲۳,۱۱\}.$$

$$x_۰=(۱۰,۱۱),x_۱=(۱۴,۲۱),x_۲=(۱۵,۲۰),x_۳=(۱۵,۲۲),x_۴=(۱۶,۲۱),x_۵=(۱۶,۲۳),x_۶=(۱۷,۲۲),x_۷=$$
$$(۱۸,۲۳),x_۸=(۱۲,۱۷),x_۹=(۱۲,۱۹),x_{۱۰}=(۱۳,۲۰),x_{۱۱}=(۱۳,۱۸),x_{۱۲}=(۱۴,۱۹).$$

۵ زیرفضاهای پایای گراف نائورو

در این بخش پوشش‌های p-آبلی‌مقدماتی کمان-انتقالی گراف نائورو برای زیرگروه متقارن G معرفی می‌شود. فرض کنیم X گراف نائورو باشد.

لم ۱.۵. فرض کنیم ترانهاده‌ی ماتریس‌ها تحت تبدیلات خطی γ^{*h} و β^{*h} نسبت به $B_T=\{C_{x_i}|۰\leq i\leq ۱۲\}$، پایه مرتب استاندارد $H۱(X,\mathbb{Z}_p)$ با درخت فراگیر T و کمان‌های درخت متمم $x_i(i=۰,\dots,۱۲)$ به‌ترتیب C و B باشند. دراین‌صورت

$$C=\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right),$$

$$B=\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
0&0&1&0&0&-1&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&-1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&-1&-1&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
-1&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&1&0&-1&0&0&1&-1&0
\end{array}\right).$$

اثبات. سطرهای این ماتریس‌ها با استفاده از اثر خودریختی γ و β روی B_T به‌دست می آید. برای نمونه جایگشت γ دور $[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,0]$ متناظر با x_0 را به دور $[1,0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1]$ می‌نگارد. این دور متناظر با دور پایه‌ی x_0 است. بنابراین سطر اول ماتریس C به‌صورت زیر است:

$$(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0).$$

با ادامه‌ی این روند می‌توان تمامی سطرهای ماتریس‌های C و B را محاسبه نمود. □

با استفاده از نرم افزار سیج می‌توان دید:

لم ۲.۵. چندجمله‌ای مینیمال ماتریس‌های $H=C^{11}$ و $S=B^{2}$ به‌ترتیب به‌صورت زیرند:

$$m_H(x)=x^{12}-1,\qquad m_S(x)=x^{3}-1.$$

فرض کنیم p یک عدد اول باشد و ξ دوازدهمین ریشه‌ی اولیه واحد باشد. دراین‌صورت چندجمله‌ای مینیمال $m_H(x)$ به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

۱) $p=2$. بنابراین $m_H(x)=\left(x^2+x+1\right)^4\left(x+1\right)^4$.

۲) $p=3$. بنابراین $m_H(x)$ به‌صورت $\left(x-1\right)^3\left(x^2+1\right)^3\left(x+1\right)^3$ تجزیه می‌شود.

۳) $p\equiv 1\ (mod\ 12)$. بنابراین $\xi\in\mathbb{Z}_p$ و $m_H(x)$ به عامل‌های خطی $\prod_{j=0}^{11}\left(x-\xi^j\right)$ تجزیه می‌شود.

۴) $p\equiv 5\ (mod\ 12)$. چندجمله‌ای $m_H(x)$ به‌صورت زیر است:

$$(x-1)\left(x-\xi^3\right)(x+1)\left(x-\xi^9\right)\left(\left(x-\xi^4\right)\left(x-\xi^8\right)\right)\left(\left(x-\xi^2\right)\left(x-\xi^{10}\right)\right)\left((x-\xi)\left(x-\xi^5\right)\right)\left(\left(x-\xi^7\right)\left(x-\xi^{11}\right)\right).$$

۵) $p\equiv 7\ (mod\ 12)$. بنابراین

$$m_H(x)=\left(x-\xi^2\right)\left(x-\xi^4\right)(x+1)\left(x-\xi^8\right)\left(x-\xi^{10}\right)\left((x-\xi)\left(x-\xi^7\right)\right)\left(\left(x-\xi^3\right)\left(x-\xi^9\right)\right)\left(\left(x-\xi^5\right)\left(x-\xi^{11}\right)\right).$$

۶) $p\equiv 11\ (mod\ 12)$. بنابراین $m_H(x)$ به‌صورت

$$(x-1)(x+1)\left(\left(x-\xi^3\right)\left(x-\xi^9\right)\right)\left(\left(x-\xi^4\right)\left(x-\xi^8\right)\right)\left(\left(x-\xi^2\right)\left(x-\xi^{10}\right)\right)\left(\left(x-\xi^5\right)\left(x-\xi^7\right)\right)\left((x-\xi)\left(x-\xi^{11}\right)\right)$$

تجزیه می‌شود.

برای پیدا کردن $\langle S,H\rangle$-زیرفضاهای پایا روی $\mathbb{Z}_p$، کافی است S و H را ماتریس‌هایی روی میدان شکافنده‌ی $\mathbb{Z}_p(\xi)$ در نظر گرفت. چون هر زیرفضای پایا روی $\mathbb{Z}_p$، مجموع زیرفضاهای پایای مینیمال روی $\mathbb{Z}_p(\xi)$ است.
با استفاده از نرم‌افزار سیج می‌توان دید:

$$\begin{array}{ccc}
ker(H-\xi^{4}I)=\langle u_{3}\rangle, & ker(H-\xi I)=\langle u_{2}\rangle, & ker(H-I)=\langle u_{0},u_{1}\rangle,\\
ker(H-\xi^{5}I)=\langle u_{6}\rangle, & ker(H-\xi^{9}I)=\langle u_{5}\rangle, & ker(H-\xi^{2}I)=\langle u_{4}\rangle,\\
ker(H-\xi^{8}I)=\langle u_{9}\rangle, & ker(H-\xi^{3}I)=\langle u_{8}\rangle, & ker(H-\xi^{11}I)=\langle u_{7}\rangle,\\
ker(H+I)=\langle u_{12}\rangle, & ker(H-\xi^{7}I)=\langle u_{11}\rangle, & ker(H-\xi^{10}I)=\langle u_{10}\rangle,
\end{array}$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}
&u_{0}=[-1,1,0,1,0,0,0,-1,0,1,1,0,0]^{t},\\
&u_{1}=[-1,0,1,0,1,-1,1,0,1,0,0,1,1]^{t},\\
&u_{2}=[0,\xi-\xi^{3},\xi-\xi^{3},1-\xi^{2},1-\xi^{2},-\xi^{3},-\xi^{3},-\xi^{2},\xi^{2},\xi,1,\xi,1]^{t},\\
&u_{3}=[0,\xi^{2},-\xi^{2},\tfrac{1}{\xi^{2}},-\tfrac{1}{\xi^{2}},-1,1,-\xi^{2},-\xi^{2},\tfrac{1}{\xi^{2}},-1,-\tfrac{1}{\xi^{2}},1]^{t},\\
&u_{4}=[0,-\tfrac{1}{\xi^{2}},\tfrac{1}{\xi^{2}},\xi^{2},-\xi^{2},1,-1,-\xi^{2},-\tfrac{1}{\xi^{2}},-\xi^{2},-1,\xi^{2},1]^{t},\\
&u_{5}=[0,-\xi^{3},-\xi^{3},-1,-1,\xi^{3},\xi^{3},1,-1,\xi^{3},1,\xi^{3},1]^{t},\\
&u_{6}=[0,\tfrac{1}{\xi^{3}}-\tfrac{1}{\xi},\tfrac{1}{\xi^{3}}-\tfrac{1}{\xi},1-\tfrac{1}{\xi^{2}},1-\tfrac{1}{\xi^{2}},\tfrac{1}{\xi^{3}},\tfrac{1}{\xi^{3}},-\tfrac{1}{\xi^{2}},\tfrac{1}{\xi^{2}},-\tfrac{1}{\xi},1,-\tfrac{1}{\xi},1]^{t},\\
&u_{7}=[0,\tfrac{\xi^{2}-1}{\xi^{3}},\tfrac{\xi^{2}-1}{\xi^{3}},1-\tfrac{1}{\xi^{2}},1-\tfrac{1}{\xi^{2}},-\tfrac{1}{\xi^{3}},-\tfrac{1}{\xi^{3}},-\tfrac{1}{\xi^{2}},\tfrac{1}{\xi^{2}},\tfrac{1}{\xi},1,\tfrac{1}{\xi},1]^{t},\\
&u_{8}=[0,\xi^{3},\xi^{3},-1,-1,-\xi^{3},-\xi^{3},1,-1,-\xi^{3},1,-\xi^{3},1]^{t},\\
&u_{9}=[0,\tfrac{1}{\xi^{2}},-\tfrac{1}{\xi^{2}},\xi^{2},-\xi^{2},-1,1,-\tfrac{1}{\xi^{2}},-\tfrac{1}{\xi^{2}},\xi^{2},-1,-\xi^{2},1]^{t},\\
&u_{10}=[0,-\xi^{2},\xi^{2},\tfrac{1}{\xi^{2}},-\tfrac{1}{\xi^{2}},1,-1,-\tfrac{1}{\xi^{2}},-\xi^{2},-\tfrac{1}{\xi^{2}},-1,\tfrac{1}{\xi^{2}},1]^{t},\\
&u_{11}=[0,\xi\left(\xi^{2}-1\right),\xi\left(\xi^{2}-1\right),1-\xi^{2},1-\xi^{2},\xi^{3},\xi^{3},-\xi^{2},\xi^{2},-\xi,1,-\xi,1]^{t},\\
&u_{12}=[0,1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,-1,-1,1]^{t}.
\end{aligned}$$

در ادامه‌ی روند اثبات کافی است اثر ماترس S را روی بردارهای u_i، $0 \leq i \leq 12$ بررسی کنیم.

$$\begin{aligned}
&Su_{0}=\tfrac{1}{2}u_{0}+\tfrac{1}{2}u_{1}-\tfrac{1}{2}u_{12}+\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{8}-\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{5},\\
&Su_{1}=-u_{0}-u_{1}+u_{12}-\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{8}+\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{5},\\
&Su_{2}=-\tfrac{\xi^{-1}}{2}u_{2}+\tfrac{(\xi^{4}-\xi^{3}-\xi+1)}{2}u_{3}+\tfrac{(\xi^{4}-2\xi^{3}+2\xi-1)}{2}u_{11},\\
&Su_{3}=\tfrac{(-\xi^{4}+\xi^{3}-\xi+1)}{2}u_{2}+\tfrac{(-\xi^{4}-\xi^{3}+\xi+1)}{2}u_{11},\\
&Su_{4}=-\xi^{2}u_{4},\\
&Su_{5}=2u_{0}+u_{1}+\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{8}+\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{5},\\
&Su_{6}=\tfrac{\xi}{2}u_{6}+\tfrac{(-2\xi^{4}-4\xi-4)}{4}u_{7}+\tfrac{(-\xi^{4}-2\xi^{3}+\xi)}{2}u_{9},\\
&Su_{7}=\tfrac{(-\xi^{4}-2+2\xi)}{2}u_{6}-\tfrac{\xi}{2}u_{7}+\tfrac{(-\xi^{4}+2\xi^{3}-\xi)}{2}u_{9},\\
&Su_{8}=2u_{0}+u_{1}-\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{8}-\tfrac{\xi^{3}}{2}u_{5},\\
&Su_{9}=\tfrac{(\xi^{4}-\xi+2)}{2}u_{6}+\tfrac{(\xi^{4}+\xi+2)}{2}u_{7},\\
&Su_{10}=-\xi^{-2}u_{10},\\
&Su_{11}=\tfrac{(\xi^{4}+2\xi^{3}-2\xi-1)}{2}u_{2}+\tfrac{(\xi^{4}+\xi^{3}+\xi+1)}{2}u_{3}+\tfrac{\xi^{-1}}{2}u_{11},\\
&Su_{12}=-\tfrac{3}{2}u_{0}-\tfrac{3}{2}u_{1}-\tfrac{1}{2}u_{12}.
\end{aligned}$$

فرض کنیم V یک $\langle S,H\rangle$-زیرفضای پایای مینیمال باشد، $V_{1}=\langle u_{0},u_{1},u_{12}\rangle$ و

$$V_{2}=\langle u_{2},u_{3},u_{4},u_{5},u_{6},u_{7},u_{8},u_{9},u_{10},u_{11}\rangle$$

روی میدان $\mathbb{Z}_p(\xi)$ باشد.
فرض کنیم $V\cap V_{2}=0$. بنابراین $V\leq V_{1}$. علاوه‌براین

$$V\leq\langle u_{0},u_{1},u_{12}\rangle\cap S\langle u_{0},u_{1},u_{12}\rangle.$$

فرض کنیم برای $c_{0},c_{1},c_{2}\in\mathbb{Z}_p(\xi)$، $c_{0}Su_{0}+c_{1}Su_{1}+c_{2}Su_{12}\in\langle u_{0},u_{1},u_{12}\rangle$. بنابراین

$$u_{0}(\tfrac{c_{0}}{2}-c_{1}-\tfrac{3c_{2}}{2})+u_{1}(\tfrac{c_{0}}{2}-c_{1}-\tfrac{3c_{2}}{2})+u_{12}(-\tfrac{c_{0}}{2}+c_{1}-\tfrac{c_{2}}{2})+u_{8}(\tfrac{c_{0}}{2}\xi^{3}-\tfrac{c_{1}}{2}\xi^{3})-u_{5}(\tfrac{c_{0}}{2}\xi^{3}-\tfrac{c_{1}}{2}\xi^{3})\in\langle u_{0},u_{1},u_{12}\rangle.$$

بنابراین $c_{0}=c_{1}$ زیرا u_{5} و u_{8} مستقل خطی‌اند. در نتیجه،

$$\langle u_0, u_1, u_{12}\rangle \cap S\langle u_0, u_1, u_{12}\rangle = \{u_0(-\tfrac{c_0}{2}-\tfrac{3c_2}{2})+u_1(-\tfrac{c_0}{2}-\tfrac{3c_2}{2})+u_{12}(\tfrac{c_0}{2}-\tfrac{c_2}{2}) | c_0, c_2 \in \mathbb{Z}_p(\xi)\}.$$

اگر $\frac{c_0}{2}-\frac{c_2}{2}=0$، آن‌گاه $c_0=c_2$ و $u_0+u_1\in V$. با درنظر گرفتن $S(u_0+u_1)$، داریم $u_{12}\in V$. بنابراین $V=W_1:=\langle u_0+u_1, u_{12}\rangle$. اگر $\frac{c_0}{2}-\frac{c_2}{2}\neq 0$ آن‌گاه $u_{12}\in V$. از رابطه $S(u_{12}), u_0+u_1\in V$ و با در نظر گرفتن $S(u_0+u_1)$، داریم $V=W_1$.

اکنون فرض کنیم که اشتراک V و V_2 غیربدیهی باشد. بنابراین V باید شامل یکی از H-زیرفضاهای پایای مینیمال در V_2 باشد که زیرفضاهای ۱-بعدی از فضاهای $\langle u_2\rangle$، $\langle u_3\rangle$، $\langle u_4\rangle$، $\langle u_5\rangle$، $\langle u_6\rangle$، $\langle u_7\rangle$، $\langle u_8\rangle$، $\langle u_9\rangle$، $\langle u_{10}\rangle$ و $\langle u_{11}\rangle$ اند. بنابراین حالات زیر را در نظر بگیرید.

حالت اول: $u_2\in V$.

فرض کنیم $u_2\in V$. بنابراین $Su_2\in V$، ازاین‌رو $u_2, u_3, u_{11}\in V$. با در نظر گرفتن Su_2، Su_3 و Su_{11}، می‌توان دید

$$V=W_2=\langle u_2, u_3, u_{11}\rangle.$$

حالت دوم: $u_3\in V$.

فرض کنیم $u_3\in V$. بنابراین $Su_3\in V$ بنابراین $u_2\in V$. بنابر حالت اول، $V=W_2$.

حالت سوم: $u_4\in V$.

فرض کنیم $u_4\in V$. بنابراین $Su_4=-\xi^2u_4$. بنابراین $V=W_3=\langle u_4\rangle$.

حالت چهارم: $u_5\in V$.

فرض کنیم $u_5\in V$. بنابراین $Su_5=2u_0+u_1+\frac{\xi^3}{2}u_8+\frac{\xi^3}{2}u_5\in V$ و بنابراین نتیجه می‌دهد $2u_0+u_1, u_5, u_8\in V$. با درنظرگرفتن $S(2u_0+u_1)$، Su_5 و Su_8،

$$V=W_4=\langle 2u_0+u_1, u_5, u_8\rangle.$$

حالت پنجم: $u_6\in V$.

فرض کنیم $u_6\in V$. بنابراین $Su_6\in V$، نشان می‌دهد $u_6, u_7, u_9\in V$. با درنظرگرفتن Su_6، Su_7 و Su_9 می‌توان دید

$$V=W_5=\langle u_6, u_7, u_9\rangle.$$

حالت ششم: $u_7\in V$.

فرض کنیم $u_7\in V$. بنابراین $Su_7=\frac{(-\xi^4-2+2\xi)}{2}u_6-\frac{\xi}{2}u_7+\frac{(-\xi^4+2\xi^3-\xi)}{2}u_9$ و درنتیجه $u_6\in V$. طبق حالت پنجم، $V=W_5$.

حالت هفتم: $u_8\in V$.

فرض کنیم $u_8\in V$. بنابراین $Su_8\in V$. با درنظرگرفتن Su_8، $u_5\in V$ و بنابر حالت چهارم $V=W_4$.

حالت هشتم: $u_9\in V$.

فرض کنیم $u_9\in V$. بنابراین $Su_9\in V$ که نتیجه می‌دهد $u_6\in V$. بنابر حالت پنجم، $V=W_5$.

حالت نهم: $u_{10}\in V$.

$u_{10}\in V$ را در نظر بگیرید. بنابراین $Su_{10}=\xi^{-2}u_{10}$. بنابراین

$$V=W_6=\langle u_{10}\rangle.$$

حالت دهم: $u_{11}\in V$. فرض کنیم $u_{11}\in V$. بنابراین $Su_{11}=\frac{(\xi^4+2\xi^3-2\xi-1)}{2}u_2+\frac{(\xi^4+\xi^3+\xi+1)}{2}u_3+\frac{\xi^{-1}}{2}u_{11}\in V$ ، در نتیجه $u_2\in V$. بنابر حالت اول، $V=W_2$.

اکنون با استفاده از قضیه‌ی مشکه لم زیر مطرح می‌شود.

لم ۳.۵. همه ی $\langle S, H\rangle$-زیرفضاهای پایای غیربدیهی روی میدان شکافنده‌ی $\mathbb{Z}_p(\xi)$، به‌صورت زیرند:

$W_1=\langle u_0+u_1, u_{12}\rangle,$
$W_2=\langle u_2, u_3, u_{11}\rangle,$
$W_3=\langle u_4\rangle,$
$W_4=\langle 2u_0+u_1, u_5, u_8\rangle,$
$W_5=\langle u_6, u_7, u_9\rangle,$
$W_6=\langle u_{10}\rangle,$
$W_7=\langle u_0+u_1, u_{12}, u_2, u_3, u_{11}\rangle,$

$$
\begin{aligned}
&W_{8} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{4} \rangle,\\
&W_{9} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{10} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{11} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{10} \rangle,\\
&W_{12} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{4} \rangle,\\
&W_{13} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{14} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{15} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{10} \rangle,\\
&W_{16} = \langle u_{4}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{17} = \langle u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{18} = \langle u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{19} = \langle 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{20} = \langle 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{10} \rangle,\\
&W_{21} = \langle u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{22} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{4}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{23} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{4} \rangle,\\
&W_{24} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{25} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{26} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{10} \rangle,\\
&W_{27} = \langle 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{28} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{4} \rangle,\\
&W_{29} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{30} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{31} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{10} \rangle,\\
&W_{32} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{10}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{33} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{4} \rangle,\\
&W_{34} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{4} \rangle,\\
&W_{35} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{36} = \langle 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{37} = \langle 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{38} = \langle u_{4}, u_{10}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{39} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{40} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{10}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{41} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{10}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{42} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{43} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{44} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{45} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{46} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{47} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{2}, u_{3}, u_{11} \rangle,\\
&W_{48} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{49} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{50} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{10} \rangle,\\
&W_{51} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8} \rangle,\\
&W_{52} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{10}, u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{4} \rangle,\\
&W_{53} = \langle 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{54} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{55} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{12}, u_{6}, u_{7}, u_{9} \rangle,\\
&W_{56} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{57} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, 2u_{0} + u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{10} \rangle,\\
&W_{58} = \langle u_{2}, u_{3}, u_{11}, u_{0}, u_{1}, u_{5}, u_{8}, u_{12}, u_{4}, u_{10} \rangle,\\
&W_{59} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{5}, u_{8}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{10} \rangle,\\
&W_{60} = \langle u_{0} + u_{1}, u_{12}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{4}, u_{10}, u_{2}, u_{3}, u_{11} \rangle,\\
&W_{61} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{8}, u_{4}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{2}, u_{3}, u_{11} \rangle,\\
&W_{62} = \langle u_{0}, u_{1}, u_{12}, u_{8}, u_{10}, u_{6}, u_{7}, u_{9}, u_{2}, u_{3}, u_{11} \rangle.
\end{aligned}
$$

در پایان، پایه‌ها برای زیرفضاهای W_i، $2 \leq i \leq 62$ طوری تغییر می‌کند تا به‌توان ξ را حذف کرد. بنابراین در راستای تحقق این هدف، قضیه‌ی زیر مطرح می‌شود.

قضیه ۴.۵. همه‌ی $\langle S, H\rangle$-زیرفضاهای پایای غیربدیهی روی میدان شکافنده‌ی $\mathbb{Z}_p$، به‌صورت زیرند:

$$\begin{aligned}
&W_1,\\
&S_1 = \langle 2u_0 + u_1, k_1, k_2\rangle,\\
&S_2 = \langle u_0, u_1, u_{12}, k_1, k_2\rangle,\\
&S_3 = \langle k_3, k_4\rangle,\\
&S_4 = \langle u_0 + u_1, u_{12}, k_3, k_4\rangle,\\
&S_5 = \langle 2u_0 + u_1, k_3, k_4, k_1, k_2\rangle,\\
&S_6 = \langle u_0, u_1, u_{12}, k_1, k_2, k_3, k_4\rangle,
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
&k_1 = [0, -2, -2, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 2, 0, 2, 0]^t,\\
&k_2 = [0, 2, 2, -2, -2, -2, -2, 2, -2, -2, 2, -2, 2]^t,\\
&k_3 = [0, -1, 1, 0, 0, 1, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1]^t,\\
&k_4 = [0, 1, -1, 2, -2, 1, -1, -2, 1, -2, -1, 2, 1]^t.
\end{aligned}$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم W_4، W_9، W_{18}، W_{27}، W_{29} و W_{43}، $\langle H, S\rangle$-زیرفضاهای پایا روی $\mathbb{Z}_p$ هستند. $k_1 = (-\xi^3 + 1)u_8 + (\xi^3 + 1)u_5$، $k_2 = \xi^3 u_8 - \xi^3 u_5$، $k_3 = \frac{1}{3}((-\xi^2 + 2)u_4 + (\xi^2 + 1)u_{10})$ و $k_4 = \xi^2 u_4 + (1 - \xi^2)u_{10}$ را در نظر بگیرید. چون $\langle k_1, k_2\rangle = \langle u_5, u_8\rangle$ و $\langle k_3, k_4\rangle = \langle u_4, u_{10}\rangle$، S_1، S_2، S_3، S_4، S_5 و S_6، $\langle H, S\rangle$ زیرفضاهای پایا روی $\mathbb{Z}_p$ هستند. اکنون نشان داده می‌شود اگر $p \not\equiv 1 \ (mod\ 12)$ آن‌گاه W_2، $\langle H, S\rangle$-پایا روی $\mathbb{Z}_p$ است. فرض کنیم برای $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_p(\xi)$، $0 \leq i \leq 3$، به‌طوری‌که

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

قرار می‌دهیم $\sum_{i=0}^{3} a_i\xi^i u_2 + b_i\xi^i u_3 + c_i\xi^i u_{11} \in \mathbb{Z}_p^{13}$. با در نظرگرفتن مؤلفه‌های $\sum_{i=0}^{3} a_i\xi^i u_2 + b_i\xi^i u_3 + c_i\xi^i u_{11}$، می‌توان دید $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}_p$ به‌طوری‌که $\sum_{i=0}^{3} a_i\xi^i u_2 + b_i\xi^i u_3 + c_i\xi^i u_{11} \in \mathbb{Z}_p^{13}$ وجود ندارد. با روشی مشابه می‌توان نشان داد بقیه‌ی زیرفضاها روی $\mathbb{Z}_p$ $\langle H, S\rangle$- پایا نیستند. $\square$

یادآوری می‌شود که برای $p = 2, 3$، قضیه‌ی مشکه را نمی‌توان به‌کار برد، در این حالت می‌توان با استفاده از الگوریتم یافتن زیرفضاهای پایا در نرم افزار سیج، زیرفضاهای پایا را بدست آورد. البته بدلیل زیاد بودن، این زیرفضاها در مقاله معرفی نشد. اکنون با توجه به توضیحات بالا قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۵.۵. فرض کنیم p یک عدد اول باشد و $\overline{X}$ یک پوشش کمان - انتقالی از گراف نائورو (وقتی که G ارتقا می‌یابد) باشد. دراین‌صورت پوشش‌های p-آبلی مقدماتی کمان - انتقالی از گراف نائورو مطابق جدول ۱ است.

۶ نتیجه گیری

گراف‌های کمان - انتقالی در شبکه‌های کامپیوتری استفاده می‌شوند، بنابراین مطالعه این گراف‌ها بسیار سودمند است. محققان نظریه گراف در سال‌های اخیر به‌طور جدی به بررسی خواص این نمودارها پرداخته‌اند. در رده‌بندی این نمودارها مفاهیم جبر خطی مانند گروه همولوژی، زیرفضاهای پایا، نمایش خطی خودریختی‌ها، گروه ماتریس‌ها، ... بسیار مفید است. البته برای ارائه این مقاله از نرم افزار سیج استفاده کردیم. در این مقاله روی پوشش‌های p-آبلی مقدماتی کمان - انتقالی گراف نائورو بحث کردیم. در آینده قصد داریم پوشش‌های منظم کمان - انتقالی نمودارهای پنج ظرفیتی را مطالعه کنیم.

زیرفضای پایا	$\xi(x_0)$	$\xi(x_1)$	$\xi(x_2)$	$\xi(x_3)$	$\xi(x_4)$	$\xi(x_5)$	$\xi(x_6)$
W_1	$\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
S_1	$\begin{bmatrix}-3\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$
S_2	$\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\\-2\end{bmatrix}$
S_3	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$
S_4	$\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$
S_5	$\begin{bmatrix}-3\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\-2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-2\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\2\\-2\end{bmatrix}$
S_6	$\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-2\\2\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-2\\2\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\-2\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\2\\-2\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\\-2\\-1\\-1\end{bmatrix}$
زیرفضای پایا	$\xi(x_7)$	$\xi(x_8)$	$\xi(x_9)$	$\xi(x_{10})$	$\xi(x_{11})$	$\xi(x_{12})$	
W_1	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	
S_1	$\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$	
S_2	$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$	
S_3	$\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	
S_4	$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	
S_5	$\begin{bmatrix}-2\\0\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\0\\-2\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$	
S_6	$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\2\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\-2\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\\-2\\0\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\2\\-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\2\\-2\\0\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\2\\1\\1\end{bmatrix}$	

جدول ۱: پوشش‌های p-آبلی مقدماتی کمان - انتقالی گراف نائورو

فهرست منابع

[1] R.A. Beezer, *Sage for linear algebra; A supplement to a first course in linear algebra*, Sage web site http://www.sagemath.org. 2011.

[2] W. Bosma and J. Cannon, *Handbook of Magma Function*, Sydney University Press, Sydney, 1994.

[3] Y. Cheng and J. Oxley, *On weakly symmetric graphs of order twice a prime*, J. Combin. Theory Ser. B **42** (1987), 196–211.

[4] M. Conder, *Trivalent (cubic) symmetric graphs on up to 2048 vertices*, http://www.math.auckland.ac.nz conder/symmcubic2048list.txt, J (2006).

[5] M. Conder and P. Dobcsanyi, *Trivalent symmetric graphs on up to 768 vertices*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **40** (2002), 41–63.

[6] D.S. Dumit and R.M. Foote, *Abstract algebra*, 2003.

[7] Y.Q. Feng and J. H. Kwak, *Classifying cubic symmetric graphs of order 10p or 10*p^2, Sci. China Ser. A **49** (2006), 300–319.

[8] Y.Q. Feng, J. H. Kwak and K. Wang, *Classifying cubic symmetric graphs of order 8p or 8*p^2, European J. Combin. **26** (2005), 1033–1052.

[9] Y.Q. Feng, J.H. Kwak and M.Y. Xu, *Cubic s-regular graphs of order 2*p^3, J. Graph Theory **52** (2006), 341–352.

[10] Y.Q. Feng and J.H. Kwak, *Cubic symmetric graphs of order a small number times a prime or a prime square*, J. Combin. Theory B **94** (2007), 627–646.

[11] A. Gardiner and C.E. Praeger, *On 4-valent symmetric graphs*, European. J. Combin, **15** (1994), 375–381.

[12] A. Gardiner and C.E. Praeger, *A characterization of certain families of 4-valent symmetric graphs*, European. J. Combin, **15** (1994), 383–397.

[13] M. Ghasemi, *A classification of tetravalent one-regular graphs of order 3*p^2, Colloq.Math, **128** (2012), 15–24.

[14] M. Ghasemi and J.X. Zhou, *Tetravalent s-transitive graphs of order 4*p^2, Graphs Combin, **29** (2012), 87–97.

[15] J.L. Gross and T.W. Tucker, *Generating all graph covering by permutation voltages assignment*, Discrete Math. **18** (1977), 273–283.

[16] P.J. Hilton and S. Wylie, *Homology theory, an introduction to algebraic topology*, cambridge university, 1960.

[17] X.H. Hua, Y.Q. Feng and J. Lee, *Pentavalent symmetric graphs of order 2pq*, Discrete Math. **311** (2011), 2259–2267.

[18] J.H. Kwak and J.M. Oh, *Arc transitive elementary abelian covers of the octahedron graph*, Linear algebra and its applications, **429** (2008), 2180–2198.

[19] A. Malnič, *Group actions, covering and lifts of automorphisms*, Discrete Math. **182** (1998), 203–218.

[20] A. Malnič, D. Marusič, S. Miklavič and P. Potočnik, *Semisymmetric elementary abelian covers of the Mobius-Kantor graph*, Discrete Math. **307** (2007), 2156–2175.

[21] A. Malnič , D. Marusič and P. Potočnik , *Elementary abelian covers of graphs*, J. Algebraic Combin. **20** (2004), 71–97.

[22] A. Malnič and P. Potočnik, *Invariant subspaces, duality, and covers of the Petersen graph*, European J. Combin. **27** (2006), 971–989.

[23] W.S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, 1976.

[24] A.A. Talebi and N. Mehdipoor, *Classifying cubic s-regular graphs of orders 22p, 22*p^2, Algebra Discrete Math. **16** (2013), 293–298.

[25] W.T. Tutte, *Connectivity in graphs*, Toronto University Press, 1966.

ON APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA IN CLASSIFICATION SYMMETRIC ELEMENTARY ABELIAN COVERS OF THE NAURU GRAPH

A.A. Talebi † **, N. Mehdipoor**

Department of Mathematics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Communicated by: Saeid Alikhani

Received: 2022/6/20 Accepted: 2023/5/29

Abstract: Let X be a graph and $G \leqslant \mathrm{Aut(X)}$. A graph X can be called G -symmetric if G acts transitively on its arcs. The covering technique has long been known as a powerful tool in topology and graph theory. In this paper, by using the concepts of linear algebra and covering techniques, we will classify the symmetric elementary abelian covers of the Nauru graph for one of its symmetric subgroup

Keywords: Symmetric graph, Covering graph, Voltage assignment, Invariant subspaces.

†Corresponding author.
E-mail addresses: a.talebi@umz.ac.ir (a.talebi), n.mehdipour@umz.ac.ir (n.mehdipoor).