مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۱، ص ۱۴۱-۱۳۰

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2023.40976.2045

راه‌کار نظریه‌ی بازی‌ها برای کنترل همه‌گیری ویروس کرونا

آرتا امیر جمشیدی ×، سیدمهدی مظلوم

آزمایشگاه علوم داده و مدل‌سازی، دانشکده‌ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

دبیر مسئول: منصور سراج

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۲/۲۷

چکیده:
همه‌گیری ویروس کرونا حدود سه سال باعث شده بود سلامت جامعه‌ی انسانی و فعالیت‌های اقتصادی به‌شدت مورد تهدید قرار بگیرد به‌گونه‌ای که به‌کارگیری راه‌کار مناسب برای گذر از شرایط حاد ماه‌های شدت همه‌گیری، به دغدغه‌ی مهمی برای مسئولان و مردم جامعه تبدیل شود. با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها، این چالش را به‌صورت یک بازی استکلبرگ مدل می‌کنیم که در آن، ستاد ملی کرونا (ستاد) رهبر بازی است و مردم نقش پیرو را دارند. سپس راه‌کاری بهینه را برای هر کدام از بازی‌کنان پیش‌نهاد می‌دهیم تا علاوه بر حفظ سلامت جامعه، فعالیت‌های اقتصادی نیز ادامه پیدا کنند و مشکلات به‌وجود آمده در این زمینه کاهش یابد. به‌علاوه، با یافتن تعادل‌های نش مخلوط بازی و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر آن، استراتژی‌های مخلوط بهینه‌ای را برای هرکدام از بازی‌کنان جهت کنترل همه‌گیری بیماری معرفی می‌کنیم. سپس تأثیر راه‌کارهای پیش‌نهادی را در مقاطع زمانی مختلف در افزایش یا کاهش همه‌گیری بیماری بررسی می‌کنیم. در نهایت، امکان انحراف در تصمیم‌گیری بازی‌کنان را بررسی کرده و مدلی واقع‌بینانه‌تر ارائه می‌دهیم. راه‌کارهای پیش‌نهادی برای سایر همه‌گیری‌های تنفسی که انتقال آن‌ها از طریق تماس نزدیک انسان‌ها صورت می‌گیرد، می‌تواند مؤثر باشد.

واژه‌های کلیدی: ویروس کرونا، مدل‌سازی، بازی‌های استکلبرگ، فرایند سلسله‌مراتبی و تعادل نش.

رده‌بندی ریاضی: 91A80, 91A18, 91-10

۱ مقدمه

بیماری ناشی از ویروس کرونا علاوه بر به‌خطر انداختن زندگی انسان‌ها، مشاغل آن‌ها را نیز تحت تأثیر قرار داد. با توجه به طولانی بودن روند تولید و در دسترس قرار گرفتن واکسن مؤثر به‌عنوان یکی از ابزار کارآمد در جهت رسیدن به ایمنی جمعی و مهار این بیماری در مقابل سویه‌های متنوع آن، از همان ابتدا، سازمان بهداشت جهانی طرحی را با نام فاصله‌گذاری اجتماعی برای قطع زنجیر انتقال بیماری پیش‌نهاد داد که میزان تأثیرگذاری آن در کاهش اپیدمی در [۶] بررسی شده است. مدل‌سازی انجام‌شده در این کار نشان می‌دهد که ارتباط با افراد بیمار،

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: arta.jamshidi@ut.ac.ir (A. A. Jamshidi)

به‌خصوص برای سویه‌هایی از بیماری که قدرت انتشار بیش‌تری از خود نشان دادند، به‌سرعت آمار مبتلایان را افزایش می‌دهد و با کنترل نرخ ارتباط، مهار کرونا امکان‌پذیر است. ازآن‌جا که این طرح شامل تعطیلی تعداد زیادی از مشاغل است، آسیب‌های اقتصادی فراوانی را به مردم وارد کرد. از یک طرف، ادامه دادن فعالیت‌های اقتصادی باعث افزایش گسترش بیماری می‌شد و از طرف دیگر، تعطیلی آن‌ها منجر به مشکلات اقتصادی می‌گردید.

در این مقاله، با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها و مدل‌سازی با بازی‌های استکلبرگ به دنبال یافتن تعادل استکلبرگ برای تعیین بهترین استراتژی ستاد و مردم‌ایم تا هر دو بتوانند این دوره را با صرف کم‌ترین هزینه از نظر سلامتی و اقتصادی پشت سر بگذارند. در این بازی، ابتدا ستاد به‌عنوان رهبر روی‌کرد خود را درخصوص ادامه یا تعطیلی فعالیت‌ها مشخص می‌کند. سپس، مردم با مشاهده‌ی سیاست‌های وضع‌شده، راه‌کار بهینه‌ی خود را انتخاب می‌کنند. در ادامه، مجموعه عمل بازی‌کنان را به استراتژی‌های مخلوط گسترش می‌دهیم و براساس تعادل نش مخلوط به‌دست‌آمده، راه‌کارهایی را برای کنترل گسترش بیماری به ستاد و مردم پیش‌نهاد می‌دهیم و در قالب دو مثال راه‌کارهای پیش‌نهادی را در دنیای واقعی بررسی کرده و تأثیر آن‌ها را در سه مقطع زمانی در افزایش یا کاهش همه‌گیری ویروس کرونا ارزیابی می‌کنیم. در پایان، امکان انحراف در تصمیم‌گیری بازی‌کنان را که می‌تواند ناشی از عوامل محیطی و یا اشتباهات آن‌ها باشد، به‌ترتیب با استفاده از ابزار پاسخ چندایی و بازی‌های توسعه‌یافته با حرکات تصادفی و هم‌زمان بررسی کرده تا مدلی واقع‌بینانه‌تر نسبت به دنیای واقعی ارائه دهیم.

در بخش ۲، به شرح کامل مسئله می‌پردازیم. مدل بازی در دو حالت خاص و کلی در بخش ۳ بیان می‌شود. به تعادل‌های نش مخلوط بازی در بخش ۴ پرداخته می‌شود. به‌کارگیری مدل پاسخ چندایی و استفاده از حرکات تصادفی برای مدل کردن اشتباهات به‌ترتیب در بخش‌های ۵ و ۶ بررسی می‌شوند. سرانجام، در بخش ۷ به بررسی نتایج و نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

۲ شرح مسئله

نمودار شکل ۱ را در نظر می‌گیریم که آمار روزانه‌ی مبتلایان به کرونا در کشور را نشان می‌دهد. مرکز کنترل بیماری‌ها براساس تعداد موردهای جدید مبتلا به کرونا به‌ازای صد هزار نفر در روز، مناطق را به‌صورت جدول ۱ به چهار رنگ آبی، زرد، نارنجی و قرمز تقسیم می‌کند. طبق این نمودار، ۷ آذر ۱۳۹۹ (۲۵ نوامبر ۲۰۲۰)، ۲۵ فروردین (۱۴ آوریل ۲۰۲۱)، ۲۶ مرداد (۱۷ آگوست ۲۰۲۱)، ۲۰ بهمن سال ۱۴۰۰ (۹ فوریه ۲۰۲۲) و ۴ مرداد سال ۱۴۰۱ (۴ جولای ۲۰۲۲) به‌ترتیب با تعداد ۱۴۰۵۱، ۲۵۵۸۲، ۵۰۲۲۸، ۳۹۰۸۵ و ۱۱۰۳۵ نفر مبتلای جدید روزانه‌ی کرونا در پنج اوج مهم با بیش‌ترین آمار همه‌گیری‌اند. اوج ۲۶ مرداد ۱۴۰۰ با ۵۰۲۲۸ نفر بیش‌ترین تعداد مبتلای جدید در این پاندمی را به‌ثبت رسانده است. شکل ۲ نقشه رنگ‌بندی شهرهای ایران را متناظر با چهار اوج همه‌گیری اخیر، نشان می‌دهد. توجه کنیم که اختلاف زمانی بین ثبت تعداد مبتلایان جدید و اعمال تغییر رنگ‌بندی شهرها وجود دارد. جدول ۱ نحوه‌ی رنگ‌بندی شهرها را بر مبنای تعداد مبتلایان جدید کرونا تعیین می‌کند [۱]. در ادامه، به مدل‌سازی هوش‌مند کنترل این بیماری همه‌گیر برای برقراری تعادلی بین سلامت مردم و وضعیت اقتصادی آن‌ها می‌پردازیم.

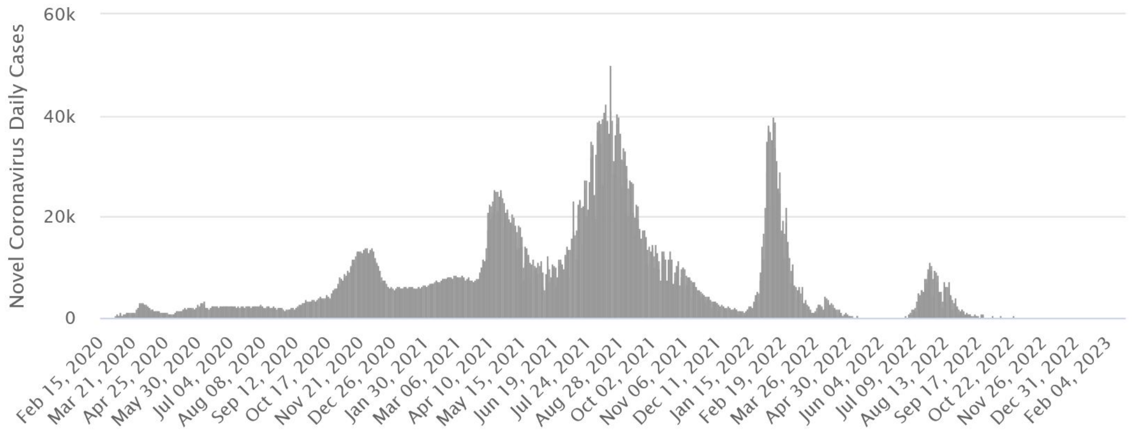
جدول ۱: طبقه‌بندی مناطق از نظر اپیدمی کرونا.

موارد جدید ابتلا به کرونا به‌ازای صد هزار نفر در روز	سطح خطر
$>$ ۱	ناایمن (زرد، نارنجی یا قرمز)
$<$ ۱	ایمن (آبی)

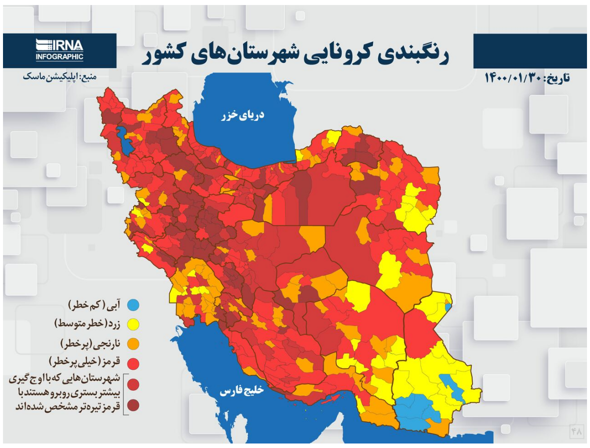
۳ مدل بازی

با توجه به این‌که استراتژی ستاد و مردم از نظر کنترل پروتکل‌های بهداشتی و تعطیلی فعالیت‌ها، در شرایط مختلف، متفاوت است، علاوه بر طبقه‌بندی مناطق که در بخش ۲ صورت گرفت، نیاز به طبقه‌بندی مشاغل نیز داریم. لذا، مشاغل را به چهار سطح تقسیم می‌کنیم [۸]. سطح ۱، مشاغل ضروری شامل بیمارستان‌ها است و سطح‌های ۲ تا ۴ مشاغل غیرضروری را در بر می‌گیرند که بر حسب میزان ریسک در سه سطح قرار گرفته‌اند. مشاغل سطح ۲ شامل مراکز خرید سرباز دارای کم‌ترین خطر و مشاغل سطح ۴ شامل رستوران‌های سرپوشیده دارای بیش‌ترین خطرند.

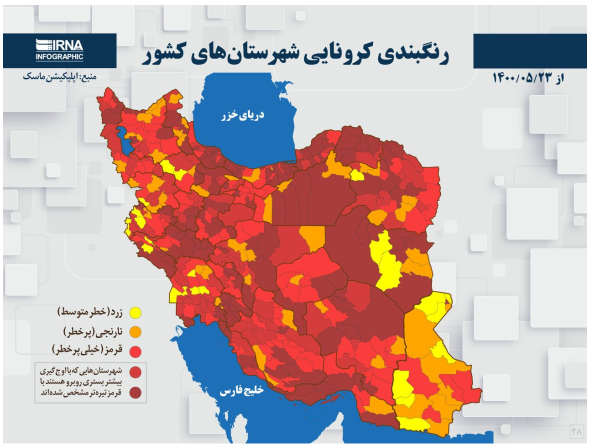
برای برقراری تعادل بین سلامت و شرایط اقتصادی مردم یک بازی توسعه‌یافته را تشکیل داده و به بررسی حالت‌های مختلف آن در مراحل گوناگون شدت همه‌گیری می‌پردازیم. در این بازی توسعه‌یافته مجموعه بازی‌کنان $=$ { ستاد، مردم (هر یک از افراد جامعه) } و مجموعه عمل بازی‌کنان $=$ { ادامه‌ی فعالیت‌ها، تعطیلی فعالیت‌ها } است. این بازی، یک بازی رهبر – پیرو با تعادل استکلبرگ است. در این بازی، ستاد (رهبر) ابتدا سیاست خود را مشخص می‌کند و سپس مردم (پیرو) با آگاهی از اقدامات ستاد، تصمیم می‌گیرند. در این پژوهش، بازی را با



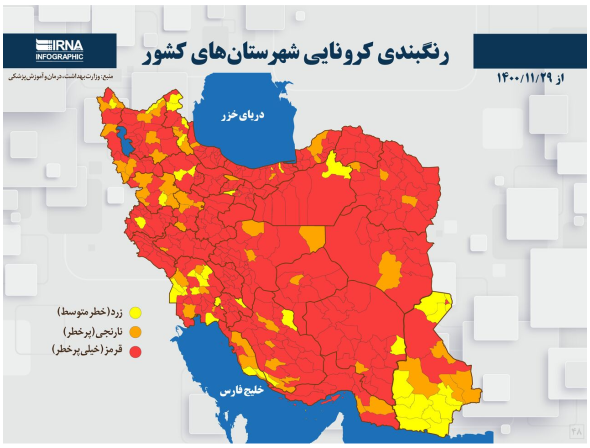
شکل ۱: تعداد روزانه‌ی مبتلایان به کرونا در ایران [۷].



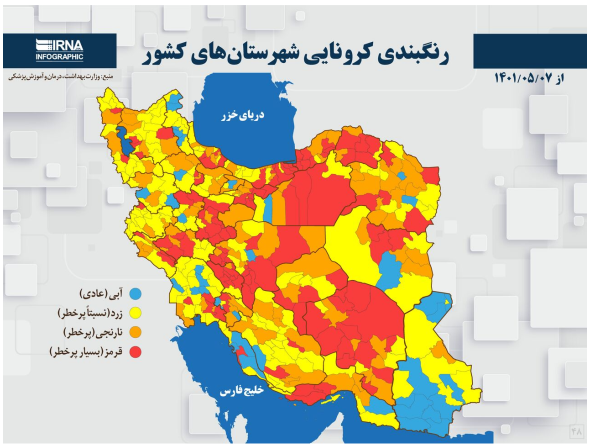
(آ) ۳۰ فروردین ۱۴۰۰ (۱۹ آوریل ۲۰۲۱).



(ب) ۲۳ مرداد ۱۴۰۰ (۱۴ آگوست ۲۰۲۱).



(ج) ۲۹ بهمن ۱۴۰۰ (۱۸ فوریه ۲۰۲۲).

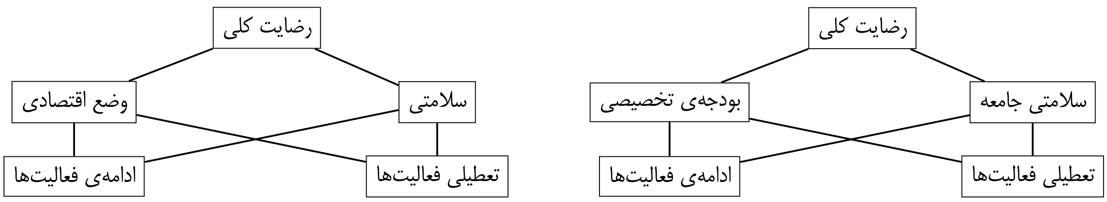


(د) ۷ مرداد ۱۴۰۱ (۲۹ جولای ۲۰۲۲).

شکل ۲: رنگ‌بندی شهرهای ایران از نظر اپیدمی کرونا [۹].

اطلاعات کامل در نظر می‌گیریم؛ زیرا ستاد از قبل موضع خود را در خصوص هر گروه مشخص می‌کند و به اطلاع مردم می‌رساند. هم‌چنین می‌تواند با انجام یک نظرسنجی یا بررسی یک بازه‌ی زمانی قابل‌اعتنا از ارجحیت‌های مردم آگاه باشد.

ازآن‌جا که در تصمیم‌گیری بازی‌کنان، چند معیار با درجه اهمیت متفاوت در تعریف توابع سود بازی‌کنان تأثیرگذارند، برای تعیین ارجحیت‌های بازی‌کنان از فرایند سلسله‌مراتبی (Analytic Hierarchy Process) یا به اختصار AHP استفاده می‌کنیم. این فرایند، روشی برای اندازه‌گیری نسبی پیش‌نهاد می‌کند که ارزش‌های کیفی را به اعداد کمی تبدیل می‌کند. نمودار سلسه مراتبی بازی توسعه‌یافته را در شکل ۳



شکل ۳: نمودار سلسه‌مراتبی ستاد و مردم.

نشان می‌دهیم. دو ملاک "سلامتی" و "وضع اقتصادی" در تصمیم‌گیری مردم بیش‌ترین تأثیر را دارد. فرض کنیم "سلامتی" برای مردم k برابر "وضع اقتصادی" ارزش دارد و از نظر "سلامت" و "وضع اقتصادی" به‌ترتیب "تعطیلی فعالیت‌ها" را نسبت به "ادامه‌ی فعالیت‌ها" k_1 و k_2 برابر ترجیح دهند. از سوی دیگر، برای ستاد "سلامتی جامعه" و "بودجه‌ی تخصیصی" از بیش‌ترین اهمیت برخوردارند. فرض کنیم برای ستاد "سلامتی جامعه" l برابر "بودجه‌ی تخصیصی" اهمیت داشته باشد و l_1 و l_2 میزان ارجحیت "تعطیلی" بر "ادامه‌ی فعالیت‌ها" به‌ترتیب از نظر "سلامت" و "وضع اقتصادی" باشند. به‌عبارت دیگر، پارامترهای k و l به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی میزان اهمیت سلامتی برای مردم و ستادند که با تغییر رنگ از مناطق آبی به قرمز و یا تغییر سطح شغلی از ۲ به ۴ افزایش می‌یابند. قابل‌توجه است که مقدار پارامترهای k و l، به‌ترتیب، با سطح اقتصادی مردم و بودجه‌ی تخصیصی ستاد رابطه‌ی مستقیم دارند. پارامترهای k_1 و k_2 نیز بیان‌گر تأثیر تعطیلی فعالیت‌ها به‌ترتیب بر سلامت و وضع معیشت از دید مردم‌اند در حالی که پارامترهای l_1 و l_2 بیان‌گر تأثیر تعطیلی فعالیت‌ها به‌ترتیب بر سلامت و وضع معیشت از دید ستادند. رتبه‌بندی نهایی اولویت‌های مردم و ستاد پس از مقایسه‌های دوتایی در روابط (۱.۳) نشان داده شده‌اند.

سود خالص ناشی از انتخاب اولویت‌های بازی‌کنان را در فرایند AHP محاسبه می‌کنیم؛ بدین معنی که سود خالص مردم و ستاد از تعطیلی فعالیت‌ها به‌ترتیب K و L، و از ادامه‌ی فعالیت‌ها به‌ترتیب $M-K$ و $N-L$ است. برای مردمی که دارای شغل سطح ۱اند، همواره $2L<N$ است؛ زیرا امکان تعطیلی این دسته از مشاغل برای ستاد وجود ندارد. در ادامه به بررسی حالت‌های خاص این بازی توسعه‌یافته برای مردمی که دارای شغل سطح ۱اند و حالت کلی برای مردمی که دارای سطح شغل ۱ نیستند و در منطقه‌ی آبی قرار ندارند می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}
&\frac{l}{l+1}\begin{bmatrix}\frac{l_1}{l_1+1}\\ \frac{1}{l_1+1}\end{bmatrix}+\frac{1}{l+1}\begin{bmatrix}\frac{l_2}{l_2+1}\\ \frac{1}{l_2+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L\\ N-L\end{bmatrix},\\
&\frac{k}{k+1}\begin{bmatrix}\frac{k_1}{k_1+1}\\ \frac{1}{k_1+1}\end{bmatrix}+\frac{1}{k+1}\begin{bmatrix}\frac{k_2}{k_2+1}\\ \frac{1}{k_2+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K\\ M-K\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

۱.۳ بررسی حالت‌های خاص

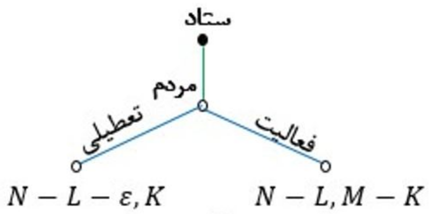
ابتدا مردمی را در نظر می‌گیریم که دارای شغل سطح ۱اند. ازآن‌جا که این دسته از مشاغل جزو مشاغل ضروری‌اند و تحت هیچ شرایطی نمی‌توان آن‌ها را تعطیل کرد؛ درنتیجه، استراتژی غالب ستاد "فعالیت" است و تلاش می‌کند تا تعادل را به سمت نقطه‌ی "فعالیت − فعالیت" سوق دهد. هم‌چنین، اگر ستاد "فعالیت" و مردم "تعطیلی" را انتخاب کنند، ضرری به‌اندازه‌ی ϵ از سود ستاد کم می‌شود؛ زیرا این وضعیت برخلاف مطلوب ستاد در راستای ادامه‌ی فعالیت‌ها است. بنابراین درخت بازی به‌صورت شکل ۴آ در می‌آید. اگر $M>2K$، مطلوب ستاد محقق می‌شود؛ زیرا مردم نیز تمایل به ادامه‌ی فعالیت‌ها دارند. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که k_1 و k_2 به‌ترتیب به ۱ و ۰ نزدیک‌تر شوند؛ به‌عبارت دیگر، رنگ‌بندی غالب نقشه به رنگ آبی نزدیک شود و یا سطح اقتصادی مردم پایین‌تر باشد. اما اگر $M<2K$، یک راه‌کار مناسب این است که ستاد برای این دسته از مردم سودی مانند C را در ازای به‌خطرانداختن سلامتی‌شان در نظر بگیرد تا آن‌ها ترغیب شوند استراتژی خود را تغییر دهند. این سود از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$M-K+C>K \Longleftrightarrow C>2K-M. \tag{2.3}$$

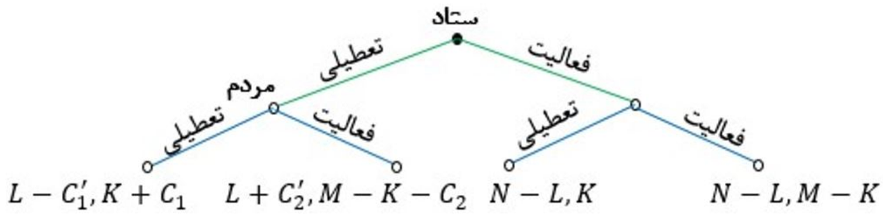
در حالتی که مردم دارای شغل سطح ۱ نیستند ولی در منطقه‌ی آبی قرار دارند، l_1 و k_1 به قدر کافی به ۱ نزدیک‌اند و $k_2, l_2<1$؛ درنتیجه $M>2K$ و استراتژی غالب مردم، "فعالیت" خواهد بود. در این حالت ستاد نیازی نیست برای ترغیب مردم به فعالیت اقدامی انجام دهد و با توجه به این‌که در منطقه‌ی امن‌ایم، تمام فعالیت‌ها می‌توانند مثل سابق ادامه پیدا کنند.

۲.۳ حالت کلی

اگر محل مورد بررسی ما منطقه‌ی آبی نباشد و مردم نیز دارای شغل سطح ۱ نباشند، فرضیاتی را به مدل اضافه می‌کنیم. ستاد برای تشویق مردم به رعایت پروتکل‌های بهداشتی و جبران ضررهای اقتصادی دوران کرونا، می‌تواند مبلغی به‌اندازه‌ی C_1 را به مردمی که مقررات را رعایت



(آ) حالت خاص.



(ب) حالت کلی.

شکل ۴: درخت بازی.

می‌کنند، پرداخت کند. هم‌چنین، برای مردمی که سیاست‌های تعطیلی فعالیت‌های اجتماعی را نادیده می‌گیرند، می‌تواند جریمه‌ای را به‌اندازه‌ی C_2 در نظر بگیرد. درنتیجه درخت بازی به‌صورت شکل ۴ب در می‌آید. لازم به‌ذکر است که اگرچه ستاد با پرداخت C_1 به مردم همان مقدار را از دست می‌دهد، اما با توجه به این‌که ارزش پول پرداختی به مردم با ارزش پول ازدست‌رفته از بودجه‌ی ستاد یکسان نیست، ضرر وارد شده به ستاد را با C_1' نمایش می‌دهیم. در مورد C_2 نیز گزاره‌ای مشابه را می‌توان بیان کرد. در این مرحله به بررسی تعادل‌های استکلبرگ [۳] در بازی پیش‌نهادی فوق می‌پردازیم. اگر ستاد "تعطیلی" را انتخاب کند، مردم "فعالیت" را انتخاب می‌کنند اگر و تنها اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$M-K-C_2 > K+C_1 \iff M > 2K+C_1+C_2. \tag{۳.۳}$$

اگر ستاد "فعالیت" را انتخاب کند، مردم " فعالیت" را انتخاب می‌کنند اگر و تنها اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$M-K > K \iff M > 2K.$$

با توجه به رابطه‌ی (۳.۳)، ستاد می‌تواند با تعیین مقادیر دل‌خواه برای C_1 و C_2 مستقل از بودجه‌ای که در اختیار دارد، مردم را مجاب کند تا مقرراتی را که در راستای محدود کردن فعالیت‌ها وضع‌شده است، رعایت کنند. به‌عنوان نمونه، وضعیتی را در نظر بگیریم که ستاد می‌خواهد در مناطق نارنجی و قرمز که خطر بیماری بیش‌تری دارند، مردم را ترغیب به عدم فعالیت کند. اگر ستاد "تعطیلی" را انتخاب کند، مردم در صورتی "تعطیلی" را انتخاب می‌کنند که $M < 2K+C_1+C_2$ و در این حالت سود ستاد برابر $L-C_1'$ خواهد بود؛ پس بهترین انتخاب ممکن برای (C_1, C_2)، $C_1 = 0, C_2 = C_2^*$ است که C_2^* در شرط $M < 2K + C_2^*$ صدق می‌کند. بنابراین، اگر ستاد بخواهد تعادل را به سمت "تعطیلی − تعطیلی" هدایت کند، می‌تواند در صورت تخطی از مقرارت با اعمال جریمه‌ی نقدی بر مردم، سیاست‌های خود را اجرایی سازد. با توجه به نامعادله‌ی (۳.۳)، هرچه میزان تمایل مردم برای ادامه دادن فعالیت‌ها بیش‌تر باشد، ستاد باید مجموع C_1 و C_2 را بزرگ‌تر انتخاب کند تا بتواند سود مردم را از ادامه‌ی فعالیت‌ها کاهش داده و آن‌ها را متقاعد به پیروی از محدودیت‌های تعیین‌شده کند.

مثال **۱.۳**. فرض کنیم ستاد می‌خواهد در یک روز مشخص راه‌کار خود را برای کنترل همه‌گیری بیماری تعیین کند. حداقل و حداکثر مقدار C و C_2 توسط ستاد به‌ترتیب ۲ و ۲۰ میلیون ریال تعیین شده‌اند. اگر متوسط مردم جامعه به وضع اقتصادی خود ۳ برابر سلامتی‌شان اهمیت دهند و از نظر حفظ سلامتی، تعطیلی فعالیت‌ها را ۳ برابر نسبت به ادامه‌ی فعالیت‌ها مؤثر بدانند و هم‌چنین، اعتقاد داشته باشند که وضع اقتصادی‌شان در صورت ادامه‌ی فعالیت‌ها ۴ برابر بهتر خواهد شد، مقادیر پارامترهای به‌دست‌آمده عبارت‌اند از $k = 3, k_1 = 3, k_2 = \frac{1}{4}$. به‌طور مشابه، مقادیر $l = \frac{2}{3}, l_1 = 2, l_2 = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به روابط (۱.۳)، $K = 49, M = 80$ نتیجه می‌شود. بنابراین، طبق نامعادله‌ی (۳.۳)، مقدار بهینه‌ی C_2 برابر ۱۸ $C_2^* = -$ است و ستاد می‌تواند با متناظر کردن این مقدار به واحد پول، نرخ جریمه‌ی عدم رعایت پروتکل‌های بهداشتی را به گونه‌ای تعیین کند که مردمی که دارای شغل سطح ۱ نیستند، نفع خود را در تعطیلی مشاغل ببینند. حال اگر همان مقادیر بالا را برای K, k_1, k_2 در نظر بگیریم، در صورتی که شغل مردم در هر شهر غیر آبی سطح ۱ باشد، ستاد می‌تواند با دادن مبلغی متناظر با سود C که طبق رابطه‌ی (۲.۳) باید حداقل به‌اندازه‌ی $2K - M = 18$ باشد، از تعطیلی مشاغل پراهمیت جامعه جلوگیری کند. در این مثال، برای به دست آوردن مقادیر بهینه‌ی C و C_2 به واحد پولی، می‌توان از نگاشت $C \longmapsto \frac{C+80}{160} \times (20-2) + 2$

استفاده کرد. بنابراین، C و C_2 به‌ترتیب حدوداً ۱۳ و ۹ میلیون ریال تعیین می‌شوند. راه‌کارهای ستاد برای مقابله با بیماری در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲: راه‌کارهای مقابله با کرونا.

شغل مردم/ رنگ شهر	سطح ۱	سطح‌های ۲ تا ۴
آبی	ادامه‌ی فعالیت‌ها مطابق روال عادی	ادامه‌ی فعالیت‌ها مطابق روال عادی
زرد و قرمز	پرداخت مبلغ ۱۳ میلیون ریال به مردم	تعیین جریمه‌ی ۹ میلیون ریالی برای مردم

۴ تعادل‌های مخلوط

یافتن تعادل‌های نش مخلوط بازی [۴] به ما کمک می‌کند تا استراتژی‌های مخلوط را نیز به مجموعه عمل‌های بازی‌کنان اضافه کنیم؛ زیرا اگر تعادل نش مخلوطی برای این بازی به‌صورت $((p^*, 1-p^*), (q^*, 1-q^*))$ وجود داشته باشد، ستاد می‌تواند q^* درصد از فعالیت‌های جامعه را براساس طبقه‌بندی انجام‌شده برای مشاغل تعطیل کند و مابقی را ادامه دهد و یا می‌تواند در q^* از روزهای یک بازه‌ی ثابت فعالیت‌ها را تعطیل کند. تعبیرمان از p^* نیز این‌گونه است که مردم می‌توانند p^* درصد از فعالیت‌های خود را بسته به ریسک‌پذیر بودن و عدم اختلال در وضعیت اقتصادی تعطیل کنند و یا این‌که p^* درصد از زمانی مشخص را به تعطیلی فعالیت‌های خود اختصاص دهند تا همه‌گیری بیماری کنترل شود. بدین منظور، ابتدا فرم نرمال بازی را به‌صورت جدول ۳ در نظر بگیریم که در آن، ستاد بازی‌کن سطری و مردم بازی‌کن ستونی‌اند. فرض کنیم هر یک از مردم با احتمال p "فعالیت" و با احتمال $1-p$ "تعطیلی" و ستاد نیز با احتمال q "فعالیت" و با احتمال $1-q$ "تعطیلی" را انتخاب کند. روابط (۱.۴) و (۲.۴) به‌ترتیب توابع بهترین پاسخ مردم و ستاد را نشان می‌دهند.

$$
\begin{aligned}
u_1(\text{فعالیت}) &= q(M-K)+(1-q)(M-K-C_2) = M-C_2-k+qC_2,\\
u_1(\text{تعطیلی}) &= qK+(1-q)(K+C_1) = K+C_1-qC_1.
\end{aligned}
\tag{۱.۴}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(\text{فعالیت}) &= p(N-L)+(1-p)(N-L) = N-L,\\
u_2(\text{تعطیلی}) &= p(L+C'_2)+(1-p)(L-C'_1) = P(C'_1+C'_2)+L-C'_1.
\end{aligned}
\tag{۲.۴}
$$

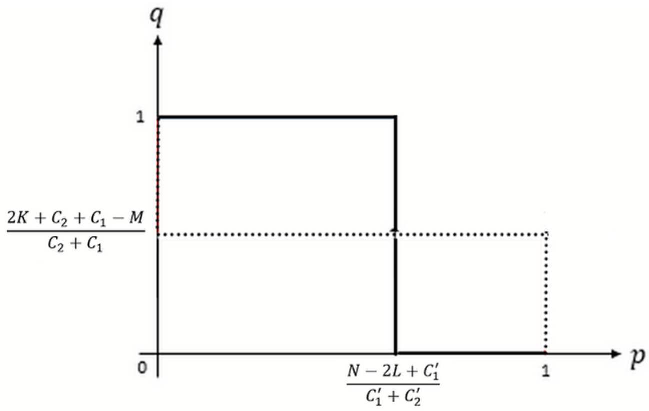
جدول ۳: فرم نرمال بازی.

	فعالیت	تعطیلی
فعالیت	$N-L, M-K$	$L+C'_2, M-K-C_2$
تعطیلی	$N-L, K$	$L-C'_1, K+C_1$

طبق روابط (۱.۴) و (۲.۴)، بهترین پاسخ هر یک از مردم، "فعالیت" خواهد بود اگر $q < \frac{(2K+C_2+C_1-M)}{(C_2+C_1)}$ و "تعطیلی" خواهد بود اگر $q > \frac{(2K+C_2+C_1-M)}{(C_2+C_1)}$. همچنین به‌ازای $q = \frac{(2K+C_2+C_1-M)}{(C_2+C_1)}$ بین دو انتخابشان بی‌تفاوت‌اند. به‌علاوه، بهترین پاسخ ستاد، "فعالیت" است اگر $p < \frac{(N-2L+C'_1)}{(C'_1+C'_2)}$ و "تعطیلی" است اگر $p > \frac{(N-2L+C'_1)}{(C'_1+C'_2)}$. همچنین برای $p = \frac{(N-2L+C'_1)}{(C'_1+C'_2)}$ تفاوتی بین انتخاب‌هایش قائل نیست. بنابراین، همان‌طور که شکل ۴ نشان می‌دهد، تلاقی توابع بهترین پاسخ دو بازی‌کن در نقطه‌ی $(p, q) = (\frac{N-2L+C'_1}{C'_1+C'_2}, \frac{2K+C_2+C_1-M}{C_2+C_1})$ است. درنتیجه، مشروط بر این‌که احتمالات به‌دست‌آمده در بازه‌ی $[0, 1]$ قرار داشته باشند، تعادل نش مخلوط بازی به‌صورت زیر است:

$$
\left(\left(\frac{N-2L+C'_1}{C'_1+C'_2}, \frac{C'_2-N+2L}{C'_1+C'_2}\right), \left(\frac{2K+C_2+C_1-M}{C_2+C_1}, \frac{M-2K}{C_2+C_1}\right)\right).
\tag{۳.۴}
$$

با توجه به رابطه‌ی (۳.۴)، اگر C_2^* افزایش یابد و ستاد جریمه‌ی بیش‌تری برای تخطی از مقررات وضع‌شده برای کرونا در نظر بگیرد، تمایل مردم برای فعالیت کاهش پیدا می‌کند. هم‌چنین، اگر C_1 و C_2 افزایش یابند، تمایل ستاد برای تعطیلی کم و درنتیجه فعالیت افزایش می‌یابد؛ زیرا در این صورت هزینه‌ی کم‌تری را در قبال زیان‌های ناشی از کرونا پرداخت خواهد کرد.



شکل ۵: نمودار تلاقی توابع بهترین پاسخ بازی‌کنان.

مثال ۱.۴. فرض کنیم مقادیر پارامترهای مورد استفاده در محاسبه‌ی تعادل نش مخلوط که قبلاً آن‌ها را در بخش‌های ۲ و ۳ معرفی کرده‌ایم، به‌صورت جدول ۴ باشد. در این‌صورت تعادل نش مخلوط بازی به‌صورت زیر است:

$$((۰.۱۱, ۰.۸۹), (۰.۹۴, ۰.۰۶)).$$

یعنی ستاد می‌تواند حدود ۹۴درصد از فعالیت‌های جامعه را با توجه به میزان خطر آن‌ها در ابتلا به بیماری تعطیل کند و مردم نیز می‌توانند ۱۱درصد از فعالیت‌های غیرضروری خود را کاهش دهند تا در شرایط این مثال، علاوه بر حفظ وضع معیشت مردم جامعه، آمار مبتلایان نیز روند نزولی داشته باشد.

جدول ۴: معرفی پارامترها و مقادیر آن‌ها.

پارامتر	k	$k_۱$	$k_۲$	l	$l_۱$	$l_۲$	$c_۱$	$c_۲$
مقدار	۱.۵	۱.۵	۰.۴	۲	۲	۰.۵	۲۰	۸۰

۵ به‌کارگیری مدل پاسخ چندایی

در بخش ۳، فرض بر این بود که انتخاب بازی‌کنان در دنیای واقعی با نتایج به‌دست‌آمده از مدل‌سازی صورت گرفته، تطابق کامل دارند. اما، ممکن است وجود برخی عوامل در دنیای واقعی باعث شود تا بازی‌کنان در تصمیم‌گیری خود دچار انحراف شوند و قادر نباشند پاسخ بهینه‌ای را که سودشان را بیشینه می‌سازد، با احتمال ۱ انتخاب کنند. در این قسمت، قصد داریم با استفاده از مفهوم پاسخ چندایی (Quantal Response) یک گام رو به جلو برداریم و با نسبت دادن وزن‌هایی به مجموعه عمل بازی‌کنان، برآورد دقیق‌تری از احتمال انتخاب عمل بهینه در مقایسه با آنچه در واقعیت رخ می‌دهد، داشته باشیم.
پاسخ چندایی یک ابزار مهم در نظریه‌ی بازی‌ها است که به‌سبب قابلیتش در مدل‌سازی رفتار انسانی در بازی‌های با حرکات هم‌زمان بسیار مورد توجه قرار گرفته است و مدل پایه‌ی بسیاری از مطالعات بوده است. این ابزار برای اولین بار در [۲] برای بازی‌های استکلبرگ به کار رفته است. در مدل‌سازی با این روش احتمال انتخاب یک استراتژی غیربهینه دیگر صفر نیست و به هر یک از اعضای مجموعه عمل بازی‌کنان احتمال مثبتی طبق رابطه‌ی (۱.۵) نظیر می‌شود که رهبر می‌تواند پس از محاسبه‌ی استراتژی بهینه‌ی پیرو، بهترین پاسخ خود را از رابطه‌ی مذکور به دست آورد.

$$q_i = \frac{e^{(\lambda P_{f(i)})}}{\sum_{j=۱}^{T} e^{(\lambda P_{f(j)})}}. \tag{۱.۵}$$

در این رابطه، پارامتر λ نشان‌دهنده‌ی میزان انحراف در استراتژی پیرو است و می‌تواند از صفر تا بی‌نهایت تغییر کند. مقدار صفر به‌معنای انحراف کامل استراتژی‌های پیرو و مقدار بی‌نهایت بیان‌گر انطباق کامل استراتژی‌های انتخاب‌شده توسط او با خروجی مدل است. q_i بیان‌گر احتمال انتخاب استراتژی محض iام توسط پیرو است. مانند روابط (۱.۴)، $P_f(i)$ متناظر با سود انتظاری پیرو از انتخاب استراتژی iام است.

T تعداد کل استراتژی‌های پیرو است. در ادامه مثال ساده‌ای را برای روشن‌تر شدن مفهوم بیان می‌کنیم.

مثال **۱.۵**. یک بازی استکلبرگ با سودهای جدول ۵ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم رهبر بازی به استراتژی b متعهد شده است. در این

جدول ۵: بازی استکلبرگ با دو بازی‌کن.

	c	d
a	۳, ۱	۵, ۰
b	۲, ۰	۴, ۲

صورت، اگر پیرو، c را انتخاب کند، سود صفر و اگر d را انتخاب کند، سود ۲ را به‌دست می‌آورد. بنابراین، یک بازی‌کن بدون امکان انحراف در تصمیم‌گیری d را بازی می‌کند تا سود خود را بیشینه سازد اما پاسخ چندایی به ما می‌گوید که پیرو به‌ترتیب با احتمال‌های $\frac{e^0}{e^0+e^{2\lambda}}$ و $\frac{e^{2\lambda}}{e^0+e^{2\lambda}}$ هر یک از عمل‌های c و d را انتخاب می‌کند.

با توجه به شکل ۳ و رابطه‌ی (۳.۳)، اگر ستاد "تعطیلی" را انتخاب کند، مردم با احتمال $\frac{e^{\lambda M}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}$ "فعالیت" و با احتمال $\frac{e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}$ "تعطیلی" را انتخاب می‌کنند. هم‌چنین، اگر ستاد "فعالیت" را انتخاب کند، مردم "فعالیت" و "تعطیلی" را به‌ترتیب با احتمال‌های $\frac{e^{M}}{e^{M}+e^{۲K}}$ و $\frac{e^{۲K}}{e^{M}+e^{۲K}}$ انتخاب می‌کنند. در این صورت، سود انتظاری ستاد از انتخاب هر یک از عمل‌هایش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u(\text{تعطیلی}) = \frac{e^{\lambda M}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}(L+C'_۲) + \frac{e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}(L-C'_۱),$$
$$u(\text{فعالیت}) = \frac{e^{\lambda M}}{e^{\lambda M+e^{۲\lambda K}}(N-L)} + \frac{e^{۲\lambda K}}{e^{\lambda M+e^{۲\lambda K}}}(N-L) = N-L.$$

درنتیجه، ستاد در صورتی "تعطیلی" را انتخاب می‌کند که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\frac{e^{\lambda M}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}(L+C'_۲) + \frac{e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}(L-C'_۱) > N-L. \qquad (۲.۵)$$

آن‌گاه

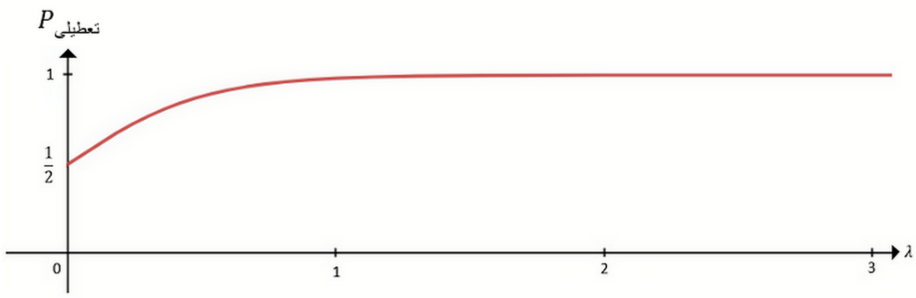
$$۲L + \frac{e^{\lambda M}C'_۲ - e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}C'_۱}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}} > N.$$

ستاد با انجام محاسبات به‌ازای مقادیر مختلف $C_۱$ و $C_۲$ می‌تواند با توجه به رابطه‌ی (۲.۵) استراتژی بهینه‌ی خود را انتخاب کند. در یک حالت خاص، برای حالتی که مردم با بیش‌ترین انحراف ممکن ($\lambda = ۰$) استراتژی خود را انتخاب کنند، رابطه‌ی (۲.۵) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$۲L + \frac{C'_۲ - C'_۱}{۲} > N.$$

مثال **۲.۵**. فرض کنیم می‌خواهیم راه‌کارهای ستاد را براساس مدل پاسخ چندایی برای کنترل همه‌گیری بیماری تعیین کنیم. مقادیر فرض‌شده برای تمام پارامترهای معرفی‌شده در مثال ۱.۳ را در نظر می‌گیریم. در حالتی که $\lambda \neq ۰$، ازآن‌جا که مردم با احتمال $\frac{e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}{e^{\lambda M}+e^{\lambda(۲K+C_۱+C_۲)}}$ "تعطیلی" را انتخاب می‌کنند، حداقل مقدار بهینه‌ی $C_۲$ برای این‌که مردم با احتمال بیش از ۵۰درصد "تعطیلی" را انتخاب کنند، برابر $C^*_۲ = -۱۸$ خواهد بود. اما، ستاد می‌تواند با توجه به بودجه‌ی خود با افزایش مقدار $C_۲$ این احتمال را افزایش دهد. به‌عبارت دیگر، در این مثال که مردم را با امکان انحراف در انتخاب عمل بهینه فرض کردیم، برعکس مثال ۱.۳، به‌جای یک مقدار بهینه برای $C_۲$ یک بازه‌ی بهینه داریم که ستاد هرچه مقدار بزرگ‌تری از آن بازه‌ی بهینه را انتخاب کند، با احتمال بیش‌تری می‌تواند مردم را ترغیب به عدم فعالیت کند. در حالتی که $\lambda = ۰$، مردم کاملاً به‌صورت تصادفی تصمیم می‌گیرند و مستقل از تعیین مقدار $C_۲$، با احتمال‌های برابر $\frac{۱}{۲}$ هرکدام از عمل‌های تعطیلی و فعالیت را انتخاب می‌کنند. هم‌چنین، در مثال ۱.۳ دیدیم که ستاد می‌تواند با دادن مبلغی متناظر با $C = ۱۸$ از تعطیلی مشاغل پراهمیت جلوگیری کند. به‌طور مشابه، در مدل پاسخ چندایی نیز مقدار ذکرشده کم‌ترین مقداری است که مردم دارای شغل سطح ۱ با احتمال بیش از نصف ترغیب می‌شوند تا به فعالیت خود ادامه دهند. در حالتی که $\lambda \neq ۰$، ستاد می‌تواند با افزایش مقدار C این احتمال را

نیز افزایش دهد. در حالت $\lambda = ۰$ نیز، مقدار C تأثیری در تصمیم‌گیری مردم ندارد و آن‌ها با حداکثر انحراف ممکن عمل خواهند کرد. همان‌طور که در ابتدای این بخش توضیح داده شد، هرچه λ افزایش یابد، از انحراف بازی‌کنان در تصمیم‌گیری کاسته می‌شود و درنتیجه، ستاد با احتمال بیش‌تری می‌تواند نتیجۀ مطلوب خود را حاصل کند. به‌عبارت دیگر، با افزایش λ نیاز دارد تا به میزان کم‌تری مقدار $C_۲$ را افزایش دهد تا به نتیجۀ دل‌خواه برسد. به‌عنوان نمونه، برای دو مقدار $\lambda_۱ = ۲$ و $\lambda_۲ = ۵$، به‌ترتیب مقادیر $C_۲$ را متناظر با $C_{۲۱}$ و $C_{۲۲}$ در نظر بگیریم. این مقادیر در رابطه‌ی $C_{۲۱} < C_{۲۲} < -۱۸$ صدق می‌کند که با انتظار ما از دنیای واقعی نیز هم‌خوانی دارد؛ چرا که هرچه مردم با انحراف کم‌تری تصمیم بگیرند، ستاد با احتمال بیش‌تری به مطلوب خود می‌رسد و بنابراین برای رسیدن به هدف خود، نیاز دارد تا مقدار $C_۲$ را کم‌تر افزایش دهد. شکل ۶ میزان تأثیرات λ را در احتمال انتخاب عمل "تعطیلی" توسط مردم نشان می‌دهد.



شکل ۶: نمودار احتمال انتخاب تعطیلی توسط مردم بر حسب λ.

۶ استفاده از حرکات تصادفی برای مدل کردن اشتباهات

در این بخش امکان اشتباه در تصمیم‌گیری را به مدل ساخته‌شده در بخش ۴ اضافه می‌کنیم؛ یعنی بازی‌کنان ممکن است با احتمال کمی دچار انحراف شده و استراتژی غیربهینه‌ای را انتخاب کنند. هدف ما یافتن حداکثر مقدار انحرافی است که در صورت وجود، هم‌چنان تعادل‌های نش بازی حفظ می‌شوند. ابتدا، مثال ساده‌ای مطرح می‌کنیم تا هدف‌مان را تبیین کند.

مثال ۱.۶. فرض کنیم دو بازی‌کن به‌طور هم‌زمان عمل‌هایی را انتخاب کنند. هر بازی‌کن می‌تواند A یا B را انتخاب کند. در صورت عدم امکان اشتباه، این وضعیت توسط بازی استراتژیکی با جدول ۶ مدل می‌شود. که در آن، اعداد در جدول نشان‌دهنده‌ی سودهای بازی‌کنان‌اند.

جدول ۶: بازی استراتژیک با دو بازی‌کن.

	A	B
A	۱, ۱	۰, ۰
B	۰, ۰	۰, ۰

این بازی دارای دو تعادل نش (A, A) و (B, B) است. حال فرض کنیم هر بازی‌کن ممکن است اشتباه بکند و بازی‌کن i عمل مورد نظرش را با احتمال $\frac{۱}{۲} < ۱ - p_i$ انتخاب کند. این وضعیت را می‌توان به‌عنوان یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات هم‌زمان و تصادفی مدل کرد که با تبدیل آن به یک بازی استراتژیک، به جدول ۷ می‌رسیم.
حال اگر حداقل یکی از احتمالات مثبت باشد، آن‌گاه براساس محاسبات انجام گرفته در [۴] فقط (A, A) یک تعادل نش است؛ به‌عبارت

جدول ۷: جدول بازی با در نظر گرفتن امکان اشتباه بازی‌کنان.

	A	B
A	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲), (۱ - p_۱)(۱ - p_۲)$	$(۱ - p_۱)p_۲, (۱ - p_۱)p_۲$
B	$p_۱(۱ - p_۲), p_۱(۱ - p_۲)$	$p_۱p_۲, p_۱p_۲$

دیگر، فقط این تعادل نش نسبت به این احتمال که بازی‌کنان اشتباه کمی مرتکب شوند، مستحکم $(robust)$ است.

مثال ۲.۶. می‌خواهیم امکان اشتباه بازی‌کنان را برای بازی استراتژیک مدل‌شده در جدول ۳ بررسی کنیم. فرض کنیم هر بازی‌کن ممکن است اشتباه بکند و بازی‌کن i عمل مورد نظرش را با احتمال $۱ - p_i > \frac{۱}{۲}$ انتخاب کند. این وضعیت را می‌توان به‌عنوان یک بازی توسعه‌یافته با اطلاعات کامل و حرکات هم‌زمان و تصادفی مدل کرد و با تبدیل آن به فرم نرمال، جدول‌های ۸ تا ۱۱ به‌دست می‌آیند.

جدول ۸: سودهای بازی‌کن سطری (ستاد).

	A
A	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)(N - L) + (۱ - p_۱)p_۲(L + C'_۲ + p_۱(۱ - p_۲)(N - L) + p_۱p_۲(L - C'_۱)$
B	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)K + (۱ - p_۱)p_۲(L - C'_۱) + p_۱(۱ - p_۲)(N - L) + p_۱p_۲(L + C'_۲)$

جدول ۹: سودهای بازی‌کن سطری (ستاد).

	B
A	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)(L + C'_۲) + (۱ - p_۱)(p_۲)(N - L) + p_۱(۱ - p_۲)(L - C'_۱) + p_۱p_۲(N - L)$
B	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)(L - C'_۱) + (۱ - p_۱)p_۲(N - L) + p_۱(۱ - p_۲)(L + C'_۲) + p_۱p_۲K$

جدول ۱۰: سودهای بازی‌کن ستونی (مردم).

	A
A	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)(M - K) + (۱ - p_۱)p_۲(M - K - C_۲) + p_۱(۱ - p_۲)K + p_۱p_۲(K + C'_۱)$
B	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)K + (۱ - p_۱)p_۲(K + C'_۱) + p_۱(۱ - p_۲)(M - K) + p_۱p_۲(M - K - C_۲)$

جدول ۱۱: سودهای بازی‌کن ستونی (مردم).

	B
A	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)(M - K - C_۲) + (۱ - p_۱)(p_۲)(M - K) + p_۱(۱ - p_۲)(K + C'_۱) + p_۱p_۲(K)$
B	$(۱ - p_۱)(۱ - p_۲)(K + C'_۱) + (۱ - p_۱)p_۲K + p_۱(۱ - p_۲)(M - K - C_۲) + p_۱p_۲(M - K)$

در بازی بالا، اگر احتمالات $p_۱$ و $p_۲$ را صفر در نظر بگیریم، به همان بازی مدل‌شده در جدول ۳ می‌رسیم که دارای یک تعادل نش به‌صورت رابطه‌ی (۳.۴) بود. حال اگر حداقل یکی از احتمالات $p_۱$ و $p_۲$ به‌ترتیب حداقل به‌اندازه‌ی $\frac{۱}{۴\sqrt{۳}}$ و $\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}$ باشند، آن‌گاه این بازی تعادل نش نخواهد داشت و نمی‌توانیم حالت ایستایی را برای تصمیم‌گیری بازی‌کنان معرفی کنیم. بدین ترتیب، اولاً، تعادل نش رابطه‌ی (۳.۴) در صورت وجود یک تعادل نش مستحکم نیست و ثانیاً، ستاد و مردم می‌توانند به‌ترتیب حداکثر به‌اندازه‌ی تقریباً ۱۵ و ۱۷درصد در تصمیم‌گیری اشتباه داشته باشند تا از استراتژی‌های تعادلی خود فاصله نگیرند.

۷ بررسی نتایج و نتیجه‌گیری

در این مقاله، چالشی را که ستاد ملی کرونا و مردم برای حفظ تعادل بین سلامتی فعالیت‌های اقتصادی با آن مواجه بودند، به کمک نظریه‌ی بازی‌ها و با استفاده از بازی‌های استکلبرگ مدل کردیم و راه‌کارهایی را به بازی‌کنان بازی ارائه می‌دهیم. با آگاهی از رنگ‌بندی منطقه‌ی جغرافیایی، نوع شغل افراد و اولویت‌های نسبی مردم و ستاد در خصوص اهمیت وضعیت سلامت و وضع اقتصادی با استفاده از بازی استکلبرگ، تعادلی بین فعالیت‌های اقتصادی مردم و حفظ سلامت آن‌ها در مقابل بیماری ناشی از همه‌گیری ویروس کرونا ارائه شده است. این نقاط تعادل متناسب با رنگ مربوط به هر منطقه‌ی جغرافیایی در هر زمان قابل‌محاسبه‌اند. با در نظر گرفتن فرم نرمال بازی، مجموعه عمل بازی‌کنان را به استراتژی‌های مخلوط گسترش دادیم و با یافتن تعادل‌های نش مخلوط و میزان تأثیر پارامترهای وابسته، پیش‌نهادهایی را متناسب با هر منطقه‌ی جغرافیایی در زمان دل‌خواه به ستاد و مردم ارائه کردیم. همان‌طور که در شکل‌های ۱ و ۲ ملاحظه شد، کم‌رنگ شدن توجه

به سیاست‌های مقابله با کرونا و آزاد کردن ترددها و فعالیت‌های پرخطر در فاصله‌ی زمانی اردیبهشت تا مرداد ۱۴۰۰ و شدت همه‌گیری سویه‌ی دلتا باعث افزایش بیش از ۱۰۰درصدی مبتلایان در مقایسه با نقطه‌ی اوج قبلی در ۲۳ فروردین سال ۱۴۰۰ شد. بعد از آن، توجه بیش‌تر به کنترل محدودیت‌ها باعث کاهش تعداد مبتلایان و تغییر رنگ اکثر شهرها از قرمز به زرد پس از ۲۶ مرداد ۱۴۰۰ شد. ازآن‌جا که ستاد تمرکز بیش‌تری را روی بخشی از راه‌کارهای پیش‌نهادی در این مقاله یعنی تعیین جریمه برای ترددها و فعالیت‌های غیرمجاز قرار داده بود و توجه کم‌تری به جبران ضررهای اقتصادی ناشی از کرونا داشته است، انتظار می‌رفت هرچه راه‌کارهای ستاد در مقابله با همه‌گیری کرونا به راه‌کارهایی که در بخش‌های ۳ تا ۶ ارائه شد نزدیک‌تر باشد، نه تنها آمار مبتلایان جامعه کاهش بیش‌تری پیدا می‌کرد، بلکه به توانمندسازی مشاغل آسیب‌دیده کمک می‌شد. در نهایت، با فرض این‌که مدل‌های پیش‌نهادی ممکن است به‌سبب وجود برخی عوامل محیطی پیش‌بینی‌نشده و یا اشتباهات خود بازی‌کنان در تصمیم‌گیری با نتایج تجربی انطباق کامل نداشته باشند، مدل خود را با بهره‌گیری از ابزار پاسخ چندایی و بازی‌های با حرکات تصادفی به دنیای واقعی نزدیک‌تر کرده و امکان انحراف در انتخاب بهینه را برای بازی‌کنان قائل شدیم. قابل‌توجه است که راه‌کارهای پیش‌نهادی را می‌توان برای سایر بیماری‌های همه‌گیر که فاصله‌گذاری اجتماعی در کاهش انتشار بیش‌تر بیماری مؤثر است، به‌کار برد.

فهرست منابع

[1] A. Adams, W. Li and C. Zhang, *The disguised pandemic: the importance of data normalization in COVID-19 web mapping*, Public Health, 183 (2020), 36-37.

[2] B. An, E. Shieh, R. Yang, M. Tambe, C. Baldwin, J. DiRenzo, B. Maule, G. Meyer, *PROTECT —A Deployed Game-Theoretic System for Strategic Security Allocation for the United States Coast Guard*, AI MAGAZINE, 2012, 96-110.

[3] M. Breton, A. Alj and A. Haurie, *Sequential Stackelberg equilibria in two-person games*, Journal of Optimization Theory and Applications, 59 (1988), 71-97.

[4] M. J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2011, 99-152.

[5] R. W. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process-What it is and How it is used*, Mathl Modeling, 9 (1987), 161-176.

[6] A. Zeb, E. Alzahrani, V. S. Erturk and G. Zaman, *Mathematical Model for Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class*, BioMed Research International, 2020, 23-33.

[7] Worldometer real time world statistics, Coronavirus Updates, Retrieved on 23rd February 2023, https://www.worldometers.info/.

[۸] اتاق اصناف ایران، فهرست مشاغل و رسته‌های صنفی براساس گروه‌های شغلی محدودیت‌های کرونایی، به‌دست‌آمده در تاریخ ۴ اسفند ۱۴۰۱، https://otaghasnafeiran.ir/.

[۹] خبرگزاری جمهوری اسلامی ایران، رنگ‌بندی کرونایی شهرستان‌های کشور، به‌دست‌آمده در تاریخ ۴ اسفند ۱۴۰۱، https://www.irna.ir/.

A Game Theoretic Approach to Control Coronavirus Pandemic

Arta Amir Jamshidi [†] **, Seyed Mahdi Mazloum**

Data Science and Modeling Laboratory, School of Mathematics, Statistics and Computer Science,
College of Science, University of Teran, Tehran, Iran

Communicated by: Mansour Seraj

Received: 2022/5/30 Accepted: 2023/5/7

Abstract: Public health and most economic activities have been affected by the coronavirus pandemic. This has caused a lot of difficulties for the public and the governance. A suitable solution that balances public health and economic activities is essential. In this paper, we provide a game-theoretic approach to find this balance, given a desired priority ratio between the two. We propose a Stackelberg game where Corona National Headquarters is the leader, and the people are the followers. We find an optimal solution to the proposed game for different color zones based on the number of patients in a given region. We also find the mixed Nash equilibria of the proposed game and explain the effects of different model parameters on the equilibria. We introduce the optimal mix strategies for each player to control the outbreak. We illustrate the performance of the proposed model for different color zones at different stages of the total deaths curve of the outbreak. Finally, we incorporate the possibility of having inaccurate decisions in the model for real world applications. The proposed strategy could also be used to control other possible respiratory pandemics that spread through close human contacts.

Keywords: coronavirus, modeling, Stackelberg games, analytic hierarchy process, Nash equilibrium.

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: arta.jamshidi@ut.ac.ir (A. A. Jamshidi)