مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۲۳۳-۲۴۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.42869.2133

وجود جواب‌های تناوبی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل خودگردان مرتبه‌ی پنج به‌کمک نظریه درجه‌ی توپولوژیکی

مرتضی بیات ×

گروه ریاضی، واحد زنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، زنجان، ایران

دبیر مسئول: مهدی نجفی‌خواه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۲۲

چکیده: در این مقاله ما به‌مطالعه وجود جواب‌های تناوبی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی خودگردان مرتبه‌ی پنج می‌پردازیم. ابزار ما برای اثبات وجود جواب تناوبی، استفاده از درجه‌ی توپولوژیکی براوئر و خاصیت پایایی هموتوپی درجه‌ی توپولوژیکی است. در پایان به‌کمک قضایای به‌دست آمده، نتایج عددی حاصل از آنها را برای یافتن جواب تناوبی یک معادله مرتبه‌ی پنج به‌کار می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: جواب‌های تناوبی معادلات دیفرانسیل معمولی، درجه‌ی توپولوژیکی براوئر، خاصیت پایایی هموتوپی، قضیه روشه.

رده‌بندی ریاضی: 34C25; 34A05; 47H11

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل یکی از مهمترین ابزارها در مدلسازی ریاضی هستند. هنگام مطالعه معادلات دیفرانسیل برای یافتن نقاط تعادل آنها، باید وجود یا عدم وجود مدارهای تناوبی آنها را مطالعه کنیم. در مطالعه بسیاری از پدیده‌های دینامیکی، شناسایی مدارهای تناوبی اطلاعات مناسبی از رفتارهای جواب‌های به‌دست می‌دهند. به‌عنوان نمونه، در مطالعه معادلات زیستی در معادله‌ی شکار و شکارچی لوتکا–ولترا و هم‌چنین در معادلات لینارد و واندرپول (معادله رادیو) و غیره به‌این موضوع برخورد می‌کنیم.
به‌طور کلی به‌دست آوردن جواب‌های تناوبی تحلیلی یک معادلات دیفرانسیل، کار بسیار دشواری است که معمولاً غیرممکن است. از طرفی بررسی جواب‌های تناوبی معادلات دیفرانسیل معمولی خودگردان مرتبه‌ی سه و بالاتر در مقایسه با معادلات خودگردان مرتبه دو یک مساله سخت‌تر است زیرا مشخصه‌های توپولوژیکی فضای سه بُعدی و بالاتر با صفحه تا حدودی در تضاد است. در حقیقت به‌عنوان یک تضاد بین حالت دو بُعدی و سه بُعدی وجود جواب‌های تناوبی برای معادلات مرتبه‌ی دو و سه است. قضیه پوانکاره–بندیکسون که برای وجود جواب‌های تناوبی معادلات دیفرانسیل مرتبه دو کارآمد به‌شرح زیر است:

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: baayyaatt@gmail.com (Morteza Bayat), ،

قضیه ۱.۱ (پوانکاره–بندیکسون، [۱۴]). فرض کنیم D یک ناحیه‌ی کراندار بسته در صفحه $x-y$ باشد و

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

یک دستگاه دینامیکی است که f و g توابع با مشتق پیوسته هستند. اگر یک مسیر از دستگاه دینامیکی در داخل ناحیه D برای $t \geq 0$ باقی بماند، آن‌گاه این مسیر بایستی یک مدار بسته باشد، یا به‌یک مسیر بسته میل کند، و یا به‌یک نقطه تعادل برای $t \to \infty$ میل کند.

متاسفانه این قضیه برای بُعد سه و بالاتر کاربردی ندارد و بایستی تعمیم‌هایی از قضیه [۱] را یا روش‌های دیگری مانند نظریه میانگین [۵]، یا از قضیه نقطه ثابت لری–شاودر و یا قضیه تابع ضمنی [۴] و غیره را در نظر گرفت. یک جایگزین مناسب برای این کار استفاده از قضیه درجه‌ی توپولوژیکی براوئر و پایایی هموتوپی آن است. در واقع نظریه درجه‌ی توپولوژیکی به‌معنی بررسی جواب‌های معادله و یافتن اطلاعاتی در مورد وجود و طبیعت جواب‌ها می‌باشد. لازم به‌ذکر است که قضیه نقطه ثابت براوئر و نیز قضیه تابع ضمنی نتایج مستقیم، قضیه درجه‌ی توپولوژیکی هستند، (مراجع [۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۳] را بنگرید).
در مقاله [۱۱] ، مهری با استفاده از ایده‌ی نظریه درجه‌ی توپولوژیکی وجود جواب تناوبی نابدیهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی سه غیرخطی خودگردان زیر را نشان داد:

$$x''' + x' = f(x, x', x''), \tag{۱.۱}$$

که f در شرط زیر صدق می‌کند:

$$f(x, -x', x'') = -f(x, x', x''), \tag{۲.۱}$$

و نیز f از کلاس توابع C^2 در یک همسایگی کراندار مبداء در $\mathbb{R}^3$ است. همچنین، امامی راد و مهری [۸] یک استدلال مشابه برای دستگاه‌های با تعداد فرد معادله خودگردان مرتبه‌ی دوم با کمک نظریه‌ی درجه‌ی توپولوژیکی ارائه نمودند، اما هنوز شرط برابری همانند (۲.۱) وجود دارد. در مقاله دیگری مهری و نیک سیرت [۱۲] استدلال فوق را بدون هیچ شرطی همانند (۲.۱) برای معادله زیر تعمیم دادند:

$$x''' + k^2 x' = \varepsilon f(x, x', x''), \tag{۳.۱}$$

که در آن f از کلاس C^2 در یک همسایگی از مبدا در $\mathbb{R}^3$ است و ε یک عدد مثبت و کوچک است. در ضمن بیات و مهری در [۳] با استفاده از قضیه درجه‌ی توپولوژیکی و ابزار جبرخطی وجود جواب تناوبی دستگاه‌های شبه–خطی از معادلات دیفرانسیل زیر را نشان دادند:

$$x' = Ax + \mu f(x, \mu),$$

که در آن f یک چندجمله‌ای چندمتغیره و $|\mu|$ پارامتری کوچک و مثبت و A یک ماتریس ثابت حقیقی $n \times n$ است که دارای مقدار ویژه‌ی صفر با چندگانگی بیش از یک و یا یک مقدار ویژه به‌صورت iN است که N یک عدد صحیح ناصفر است. همچنین در مقاله دیگری بیات و مهری در [۴] برای دستگاه معادلات مرتبه‌ی سه خودگردان به‌کمک قضیه تابع ضمنی، شرط لازم برای وجود جواب تناوبی دستگاه زیر را نشان دادند:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_3(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} = z + Q_3(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} = -y + R_3(x,y,z), \end{cases}$$

که $P_3(x,y,z)$، $Q_3(x,y,z)$ و $R_3(x,y,z)$ چندجمله‌ای‌های همگن از درجه‌ی سه به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} P_3(x,y,z) &= a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3 + a_4xz^2 + a_5x^2z \\ &\quad + a_6z^3 + a_7yz^2 + a_8y^2z + a_9xyz, \\ Q_3(x,y,z) &= b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + b_4xz^2 + b_5x^2z \\ &\quad + b_6z^3 + b_7yz^2 + b_8y^2z + b_9xyz, \\ R_3(x,y,z) &= c_0x^3 + c_1x^2y + c_2xy^2 + c_3y^3 + c_4xz^2 + c_5x^2z \\ &\quad + c_6z^3 + c_7yz^2 + c_8y^2z + c_9xyz. \end{aligned}$$

همچنین در مقاله [۲]، بیات و خاتمی وجود جواب تناوبی معادله دیفرانسیل خودگردان غیرخطی از مرتبه‌ی چهار زیر را به‌کمک نظریه درجه‌ی توپولوژیکی نشان دادند:

$$x^{(۴)} + f(x, x', x'', x''') = ۰, \tag{۴.۱}$$

که f از کلاس $C^۲$ در یک همسایگی کراندار از مبداء در $\mathbb{R}^۴$، با شرط زیر است:

$$f(-x, x', -x'', x''') = -f(x, x', x'', x'''). \tag{۵.۱}$$

اینک در این مقاله قصد داریم وجود جواب‌های تناوبی معادله زیر را نشان دهیم:

$$x^{(۵)} + f(x, x', x'', x''', x^{(۴)}) = ۰, \tag{۶.۱}$$

که f از کلاس $C^۲$ در یک همسایگی کراندار از مبداء در $\mathbb{R}^۵$، با شرط

$$f(x, -x', x'', -x''', x^{(۴)}) = -f(x, x', x'', x''', x^{(۴)}). \tag{۷.۱}$$

است. به‌این منظور، در ادامه، با استفاده از نظریه درجه‌ی توپولوژیکی برای معادله (۶.۱) وجود عدد مثبتی مانند T را نشان می‌دهیم به‌طوری که (۶.۱) دارای جوابی غیربدیهی باشد که در شرط مرزی زیر صدق کنند:

$$x(۰) = x(T).$$

در ادامه با استفاده از (۷.۱) جواب واقع بر فاصله $[۰, T]$ را به‌فاصله $[۰, ۲T]$ گسترش می‌دهیم و سپس این تابع را به‌تابع متناوب با دوره‌ی تناوب $۲T$ روی $\mathbb{R}$ به‌صورت یک تابع زوج گسترش می‌دهیم.
البته در مقاله [۵] وجود جواب تناوبی معادله دیفرانسیل خودگردان غیرخطی از مرتبه‌ی پنج زیر به‌کمک نظریه میانگین داده شده است:

$$x^{(۵)} - \lambda x^{(۴)} + (p^۲ + ۱)x''' - \lambda(p^۲ + ۱)x'' + p^۲x' - \lambda p^۲ x = \varepsilon F(x, x', x'', x''', x^{(۴)}),$$

که در آن λ و ε پارامترهای حقیقی هستند، و p عددی گویا و مخالف $۱, ۰, -۱$، و ε به‌اندازه کافی کوچک است و $F \in C^۲$.

۲ نمادها و مقدمات

فرض کنیم U زیرمجموعه باز کراندار $\mathbb{R}^n$ باشد. برای $y \in \mathbb{R}^n$ قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{C}^r(\overline{U}, \mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^r(U, \mathbb{R}^n) : d^j f \in \mathcal{C}(\overline{U}, \mathbb{R}^n), ۰ \leqslant j \leqslant r \right\}$$
$$\mathcal{D}^r_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{C}^r(\overline{U}, \mathbb{R}^n) : y \notin f(\partial U) \right\}, \quad \mathcal{D}_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n) = \mathcal{D}^۰_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n).$$

برای $f \in \mathcal{C}^۱(U, \mathbb{R}^n)$ دترمینان ژاکوبی f در $x \in U$ عبارت است از:

$$J_f(x) = \det\left[\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}\right]_{۱ \leqslant i,j \leqslant n}. \tag{۱.۲}$$

در ادامه تعریف درجه‌ی توپولوژیکی براوئر و دو قضیه مورد نیاز زیر را می‌آوریم (مراجع [۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۳] بنگرید).

تعریف ۱.۲. تابع $\deg$ که به‌هر $f \in \mathcal{D}_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ و $y \in \mathbb{R}^n$ یک عدد صحیح $\deg(f, U, y)$ نسبت می‌دهد را درجه (یا درجه توپولوژیکی براوئر) گویند، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$(D_۱)$. (پایایی انتقال) $\deg(f, U, y) = \deg(f - y, U, ۰)$.

$(D_۲)$. (نرمال‌سازی) اگر I تابع همانی بوده و $y \in U$ آن‌گاه $\deg(I, U, y) = ۱$.

$(D_۳)$. (جمع‌پذیری) اگر $U_۱$ و $U_۲$ زیرمجموعه‌های باز و مجزا از U باشند چنان‌که $y \notin f(\overline{U}\backslash(U_۱ \cup U_۲))$ آن‌گاه

$$\deg(f, U, y) = \deg(f, U_۱, y) + \deg(f, U_۲, y).$$

$(D_۴)$. (پایایی هموتوپی) اگر $f, g \in \mathcal{D}_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ و $H(t) = (۱ - t)f + tg \in \mathcal{D}_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ برای $t \in [۰, ۱]$، آن‌گاه

$$\deg(f, U, y) = \deg(g, U, y).$$

قضیه **۲.۲**. فرض کنیم $\deg$ در خواص $(D_۱) - (D_۴)$ صدق کند و فرض کنیم $f, g \in \mathcal{D}_y(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ در آن‌صورت داریم:

(۱). (وجود جواب) اگر $\deg(f, U, y) \neq ۰$ آن‌گاه معادله $f(x) = y$ حداقل یک ریشه در U دارد.

(۲). (قضیه روشه) اگر

$$\max_{\partial U} \|f - g\| \leq \min_{\partial U} \|f(.) - y\|,$$

(یا $|f(x) - g(x)| < \operatorname{dist}(y, f(\partial U))$ و $x \in \partial U$) آن‌گاه

$$\deg(f, U, y) = \deg(g, U, y).$$

معمولا برای محاسبه درجه توپولوژیکی براوئر توابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته از قضیه زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه **۳.۲**. فرض کنیم $f \in \mathcal{D}^۱(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ و y نقطه بحرانی تابع f نباشد، آن‌گاه

$$\deg(f, U, y) = \sum_{x \in f^{-۱}(y)} \operatorname{sgn}(J_f(x)).$$

برای $C \in \mathbb{R}^n$ قرار می‌دهیم $|C|_\infty = \max\{|c_i| : i = ۱, \cdots, n\}$ و $\Omega_c = \{C \in \mathbb{R}^n : |C|_\infty < c\}$ همچنین $\deg(\varphi(C), \Omega_c, ۰)$، برای درجه‌ی توپولوژیکی نگاشت زیر

$$C \longmapsto \varphi(C),$$

نسبت به‌مجموعه Ω_c و $۰ \in \mathbb{R}^n$، به‌کار می‌بریم. برای فاصله بسته I، نرم توابع حقیقی و توابع برداری پیوسته f روی $\mathbb{R}^n$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\| = \max_{t \in I} |f(t)|_\infty. \tag{۲.۲}$$

اگر P یک ماتریس باشد آن‌گاه $\|P\|$ نشانگر نرم معمولی ماتریسی است.

۳ نتایج اصلی

در ابتدا به‌لم زیر نیاز داریم.

لم **۱.۳**. فرض کنیم

$$A = \operatorname{diag}(a_۱, a_۲, \cdots, a_n), \quad a_i > ۰$$

ماتریس قطری مثبت باشد و $a_m = \min\{a_i\}$ و $a_M = \max\{a_i\}$. اگر $۱ < k < ۲$ و $k < \frac{a_M}{a_m} < \frac{۲}{k-۱}$، آن‌گاه

$$\deg\big(\cos(AT_j)C, \Omega_c, ۰\big) = (-۱)^j \quad (j = ۰, ۱), \tag{۱.۳}$$

که

$$T_۰ = \frac{\pi}{a_m + a_M}, \quad T_۱ = \frac{(k + ۱)\pi}{a_m + a_M}. \tag{۲.۳}$$

اثبات. طبق قضیه ۳.۲ داریم:

$$\deg\left(\cos(AT_j)C, \Omega_c, \circ\right) = \operatorname{sgn}\left(\prod_{i=۱}^{n} \cos(a_i T_j)\right), \tag{۳.۳}$$

حال برای اثبات (۱.۳) داریم:

$$\frac{(k-۱)\pi}{k+۱} < a_i T_\circ < \frac{۲\pi}{k+۱} + \frac{\pi}{۲},$$

و

$$\pi < a_i T_۱ < ۲\pi.$$

□

حال با استفاده از لم ۱.۳، قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x''' = -a_۱^۲ x' + f_۱(x, y, x', y', x'', y''), \\ y''' = -a_۲^۲ y' + f_۲(x, y, x', y', x'', y''), \end{cases} \tag{۴.۳}$$

که $f_۱$ و $f_۲$ از کلاس $C^۲$ در یک همسایگی باز و کراندار از $\mathbb{R}^۴$ حول مبداء است. بدون از دست دادن کلیت بحث می‌توانیم، $a_۱ > a_۲ > \circ$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم $k \in (۱, ۲)$ و $c > \circ$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$k < \frac{a_۱}{a_۲} < \frac{۲}{k-۱} \tag{۵.۳}$$

$$(k+۱)\pi M < \delta c a_۲^۲, \tag{۶.۳}$$

که در آن

$$\delta = \min\left\{\left|\cos\left(a_i T_j\right)\right| : i = ۱, ۲, j = \circ, ۱\right\},$$

$$T_\circ = \frac{\pi}{a_۱ + a_۲}, \qquad T_۱ = \frac{(k+۱)\pi}{a_۱ + a_۲},$$

$$M = \max_{\mathcal{B}}\left\{\left|-a_۱^۲ x' + f_۱(x, y, x', y', x'', y'')\right|, \left|-a_۲^۲ y' + f_۲(x, y, x', y', x'', y'')\right|\right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{(x, y, x', y', x'', y'') : |x| \le \frac{۲c}{a_۲}, |y| \le \frac{۲c}{a_۲}, |x'| \le ۲c, |y'| \le ۲c, |x''| \le ۲ca_۱, |y''| \le ۲ca_۱\right\}. \tag{۷.۳}$$

در این صورت عدد T، با شرط $T_\circ < T < T_۱$ و اعداد ناصفر $c_۱, c_۲$، وجود دارند که اگر

$$\begin{aligned} x(\circ) &= -\frac{c_۱}{a_۱}, & y(\circ) &= -\frac{c_۲}{a_۲}, \\ x'(\circ) &= \circ, & y'(\circ) &= \circ, \\ x''(\circ) &= a_۱ c_۱, & y''(\circ) &= a_۲ c_۲, \end{aligned}$$

آن‌گاه $x(\circ) = x(T)$ و $y(\circ) = y(T)$.

اثبات. برای راحتی کار، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad F\big(X,X',X''\big)=\begin{bmatrix}f_1(x,y,x',y',x'',y'')\\f_2(x,y,x',y',x'',y'')\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}.$$

اینک مساله مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}X'''+A^2X'=F\big(X,X',X''\big),\\X(0)=-A^{-1}C,\\X'(0)=0,\\X''(0)=AC.\end{cases}\tag{۸.۳}$$

که X تابع $\mathbb{R}^n$– مقدار از t به $\mathbb{R}$ است و همچنین F تابعی از کلاس $\mathcal{C}^2$ در یک همسایگی از مبدا در $\mathbb{R}^4$ می‌باشد. برای $\lambda=1$ تابع $X(t,C,1)$ به‌عنوان جواب معادله انتگرالی زیر باشد:

$$\begin{cases}X(t,C,\lambda)=-A^{-1}\cos(At)C+\lambda G\big(t,X,X',X''\big),\\[2ex] G\big(t,X,X',X''\big)=A^{-2}\displaystyle\int_0^t\Big(\cos\big(A(t-s)\big)-I_n\Big)F\big(X(s),X'(s),X''(s)\big)ds.\end{cases}\tag{۹.۳}$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $X(t,C,1)$ جواب (۸.۳) با شرایط داده شده است، و این جواب ثابت نیست. همچنین این جواب برای $|t|$ کوچک موجود است، که از قضیه استاندارد وجود جواب معادله دیفرانسیل به‌دست می‌آید. گیریم $|t|$ به‌قدر کافی کوچک باشد، تقریب زیر را داریم:

$$|X(t)|_\infty\le\frac{2c}{a_2},\qquad |X'(t)|_\infty\le 2c,\qquad |X''(t)|_\infty\le 2ca_1.$$

اینک طبق قضیه پیوستگی می‌توانیم این جواب را برای تمام بازه‌ی $I=\left[0,\frac{(k+1)\pi}{2a_2}\right]$ گسترش دهیم و این جواب در مرزها پیوسته است. حال با در نظر گرفتن (۶.۳) داریم:

$$\big\|G(t,X,X',X'')\big\|\le\frac{2tM}{a_2^2}\le\frac{\pi M(k+1)}{a_2^3}<\frac{\delta c}{a_2}<\frac{c}{a_2},$$

بنابراین $\|X(t,C,1)\|\le\frac{2c}{a_2}$ و نیز با یک محاسبه ساده دیده می‌شود:

$$\|X'(t,C,1)\|\le 2c,\qquad \|X''(t,C,1)\|\le 2ca_1.$$

در ادامه نشان می‌دهیم که عدد T، با شرط $T_0<T<T_1$، و نقطه C وجود دارند به‌طوری که $|C|_\infty=c$ و $X(T,C,1)=0$. حال طبق لم ۱.۳ داریم:

$$\deg\Big(X(T_j,C,0),\Omega_c,0\Big)=(-1)^j,\qquad (j=0,1),\tag{۱۰.۳}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\Big\|X(T_j,C,1)-X(T_j,C,0)\Big\|=\Big\|G(T_j,X,X',X'')\Big\|<\frac{\delta c}{a_2},\tag{۱۱.۳}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}\Big\|X(T_j,C,0)\Big\|=\big|A^{-1}\cos(AT_j)C\big|_\infty&=\max_{i=1,2}\Big\{\big|\cos(a_iT_j)\big|\,|c_i|\Big\}\\&\ge\max_{i=1,2}\Big(\frac{|c_i|}{a_i}\Big)\min_{i=1,2}\big|\cos(a_iT_j)\big|>\frac{\delta c}{a_2}.\end{aligned}\tag{۱۲.۳}$$

حال طبق قضیه روشه (۲.۲) و روابط (۱۲.۳)-(۱۰.۳) نتیجه می‌دهد که

$$\deg\Big(X(T_j,C,1),\Omega_c,0\Big)=(-1)^j\qquad (j=0,1).$$

اینک طبق خاصیت پایایی هموتوپی درجه‌ی توپولوژیکی، نتیجه می‌شود که عدد T، با شرط $T_0<T<T_1$، و نقطه C، وجود دارند به‌طوری که $|C|_\infty=c$ و $X(T,C,1)=0$. □

ملاحظه **۳.۳.** اگر $a_۱$ و $a_۲$ برابر باشند، در این صورت رابطه‌ی (۵.۳) برقرار نیست. برای این منظور ما دستگاه (۴.۳) را در $\mathbb{R}^۳$ به‌صورت زیر گسترش می‌دهیم:

$$\begin{cases} x''' = -a^۲x' + \varepsilon^۲z' - \varepsilon^۲z' + f_۱(x,y,x',y',x'',y''), \\ y''' = -a^۲y + f_۲(x,y,x',y',x'',y''), \\ z''' = -k^۲x'. \end{cases} \tag{۱۳.۳}$$

دستگاه (۱۳.۳) می‌تواند به‌شکل برداری زیر نوشته شود:

$$\widetilde{X}''' = -\widetilde{A}^۲\widetilde{X}' + \widetilde{G}\big(\widetilde{X},\widetilde{X}',\widetilde{X}''\big), \tag{۱۴.۳}$$

که

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}^۲ = \begin{bmatrix} a^۲ & ۰ & -\varepsilon^۲ \\ ۰ & a^۲ & ۰ \\ k^۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{G}\big(\widetilde{X},\widetilde{X}',\widetilde{X}''\big) = \begin{bmatrix} -\varepsilon z^۲ + f_۱(x,y,x',y',x'',y'') \\ f_۲(x,y,x',y',x'',y'') \\ ۰ \end{bmatrix},$$

با به‌کار بردن تبدیل $\widetilde{X} = PU$، که ماتریس $\Lambda = P^{-۱}\widetilde{A}^۲P$ یک ماتریس قطری با مقادیر ویژه $\widetilde{A}^۲$، است. شکل جدید دستگاه معادلات به‌شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\widetilde{U}''' = -\Lambda U' + P^{-۱}\widetilde{G}\big(PU,PU',PU''\big), \tag{۱۵.۳}$$

و عناصر قطری Λ، عبارتند از:

$$\lambda_۱ = \frac{a^۲ + d}{۲}, \qquad \lambda_۲ = a^۲, \qquad \lambda_۳ = \frac{a^۲ - d}{۲},$$

و $d = \sqrt{a^۴ - ۴\varepsilon^۲k^۲}$. حال اگر $۲\varepsilon k < a^۲ < \frac{۴}{\sqrt{۳}}\varepsilon k$ آن‌گاه این مقادیر ویژه λ_i حقیقی هستند و $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ کمتر از ۴ است. همچنین ماتریس P به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} p & ۰ & q \\ ۰ & r & ۰ \\ \frac{p\lambda_۳}{\varepsilon^۲} & ۰ & \frac{-q\lambda_۱}{\varepsilon^۲} \end{bmatrix} \qquad (p,q,r \neq ۰).$$

ماتریس وارون $P^{-۱}$ عبارت است از:

$$P^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_۱}{pa^۲} & ۰ & \frac{\lambda_۳}{qa^۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ \frac{\varepsilon^۲}{pa^۲} & ۰ & \frac{-\varepsilon^۲}{qa^۲} \end{bmatrix}.$$

اینک باید نشان دهیم:

$$\Big\|P^{-۱}\widetilde{G}\big(PU,PU',PU''\big)\Big\| < \frac{\lambda_۳}{۳}\delta' c$$

که

$$\delta' = \min_{i=۱,۲}\left|\cos\left(\frac{۳\pi\sqrt{\lambda_i}}{a + \sqrt{\lambda_۳}}\right)\right|,$$

$$\widetilde{D} = \Big\{\big(\widetilde{X},\widetilde{X}',\widetilde{X}''\big) \colon |\widetilde{X}|_\infty \le \frac{۲c}{a}, |\widetilde{X}'|_\infty \le ۲c, |\widetilde{X}''|_\infty \le ۲ca\Big\}.$$

از طرفی داریم $\Big\|G\big(X,X',X''\big)\Big\| = M < \frac{a^۲c}{۳}$ و می‌توانیم $\varepsilon^۲$ را آن‌چنان کوچک اختیار کنیم که

$$\Big\|\widetilde{G}\big(\widetilde{X},\widetilde{X}',\widetilde{X}''\big)\Big\| = \widetilde{M} < \frac{a^۲c}{۳}.$$

اینک داریم

$$\left\|P^{-۱}\widetilde{G}\big(PU, PU', PU''\big)\right\| < \|P^{-۱}\|\widetilde{M} < \|P^{-۱}\|\frac{a^۲ c}{۳},$$

با انتخاب $\|P^{-۱}\| < \delta'$، حکم به‌دست می‌آید.

در ادامه، با استفاده از قضیه ۲.۳ وجود جواب تناوبی معادله‌ی مرتبه‌ی پنج (۶.۱) با شرط (۷.۱) را نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۳. معادله‌ی مرتبه‌ی پنج (۶.۱) باشرط (۷.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید $a, b > ۰$ و $۱ < k < ۲$ موجود باشند که

$$k + \frac{۱}{k} < \frac{a}{\sqrt{b}} < \frac{k-۱}{۲} + \frac{۲}{k-۱}, \tag{۱۶.۳}$$

و

$$M = \max_{\mathcal{B}}\left|ax''' + bx' - f\big(x, x', x'', x''', x^{(۴)}\big)\right| \leq \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^۲ - ۴b}}{۲}},$$

آن‌گاه معادله‌ی (۶.۱) با شرط (۷.۱) حداقل یک جواب تناوبی زوج با دوره‌ی تناوب $۲T$ برای $T \in (T_۰, T_۱)$ دارد.

اثبات. فرض کنیم

$$a_۱^۲ = \frac{a + \Delta}{۲}, \qquad a_۲^۲ = \frac{a - \Delta}{۲},$$

که $\Delta = \sqrt{a^۲ - ۴b}$. با یک محاسبه ساده، دیده می‌شود که شرط (۵.۳) شرط (۱۶.۳) را نتیجه می‌دهد. اینک معادله‌ی (۶.۱) را به‌صورت معادل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x''' = -a_۱^۲ x' + \varepsilon y', \\ y''' = -a_۲^۲ y' + \frac{۱}{\varepsilon} g. \end{cases} \tag{۱۷.۳}$$

که در آن $g = ax''' + bx' - f\big(x, x', x'', x''', x^{(۴)}\big)$. حال اگر ε را کوچکتر از $a_۲$ اختیار کنیم، طبق قضیه ۲.۳، دستگاه (۱۷.۳) جواب ناصفر با شرایط زیر دارد:

$$x(۰) = x(T), \qquad y(۰) = y(T).$$

اینک با توجه به‌تساوی (۷.۱)، نشان می‌دهیم معادله (۱۷.۳)، حداقل یک جواب تناوبی با دوره‌ی تناوب $۲T$ برای $T \in (T_۰, T_۱)$ دارد. برای این منظور برای $X(t) = (x(t), y(t))$ قرار می‌دهیم:

$$Z(t) = \begin{cases} X(t) & ۰ \leq t \leq T, \\ X(-t) & -T \leq t \leq ۰, \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که $Z(t) \in \mathcal{C}^۲[-T, T]$، و در معادله‌ی (۱۷.۳)، صدق می‌کند. این نتیجه می‌دهد که

$$Z(-T) = Z(T), \quad Z'(-T) = -Z'(T), \quad Z''(-T) = Z''(T).$$

به‌دلیل ماهیت خودگردانی معادله، جواب می‌تواند روی $\mathbb{R}$ به‌صورت یک تابع زوج گسترش یابد.

□

۴ نتایج عددی

یکی از مزایای روش بالا این است که یک روش کارآمد برای پیاده‌سازی عددی است. بر این اساس، یک مثال عددی برای حل معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ی پنج ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۴. معادله مرتبه‌ی پنج زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^{(۵)} + ۵x''' + ۴x' + x'x^{۲} + \frac{۳}{۲}(x''')^{۳}x^{(۴)} = ۰. \tag{۱.۴}$$

برای معادله اخیر داریم:

$$f\big(x, x', x'', x''', x^{(۴)}\big) = ۵x''' + ۴x' + x'x^{۲} + \frac{۳}{۲}(x''')^{۳}x^{(۴)},$$

بنابراین شرط (۷.۱)، برقرار است. حال با استفاده از (۷.۳) و (۱۷.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} &|x'''| \leq ۲c(a_۱^۲ + \varepsilon), \\ &|x^{(۴)}| \leq ۲ca_۱(a_۱^۲ + \varepsilon), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} M &= \Big|ax''' + bx' - f\big(x, x', x'', x''', x^{(۴)}\big)\Big| \\ &= \Big|(a - ۵)x''' + (b - ۴)x' - x'x^{۲} - \frac{۳}{۲}(x''')^{۳}x^{(۴)}\Big| \\ &\leq |a - ۵||x'''| + |b - ۴||x'| + |x'||x|^{۲} + \frac{۳}{۲}\big(|x'''|\big)^{۳}|x^{(۴)}| \\ &\leq ۲c|a - ۵|(a_۱^۲ + \varepsilon) + ۲ca_۱|b - ۴|(a_۱^۲ + \varepsilon) + \frac{۴c^۲}{a_۲} + ۶c^۲a_۱(a_۱^۲ + \varepsilon)^۲. \end{aligned}$$

حال اعداد مثبت a, b, c و $k \in (۱, ۲)$ را چنان جستجو می‌کنیم که نامساوی (۶.۳)، برقرار باشد، پس داریم:

$$۲|a - ۵|(a_۱^۲ + \varepsilon) + ۲a_۱|b - ۴|(a_۱^۲ + \varepsilon) + \frac{۴c}{a_۲} + ۶ca_۱(a_۱^۲ + \varepsilon)^۲ \leq \frac{\delta a_۲^۲}{k}. \tag{۲.۴}$$

برای $a = ۵$ و $b = ۴$ و c به‌اندازه کافی کوچک نامساوی (۲.۴) برقرار خواهد شد. بنابراین، قضیه (۲.۳) نشان می‌دهد که جواب تناوبی وجود دارد. معادله (۱.۴) را با شرایط اولیه زیر در نظر می‌گیریم:

$$x(۰) = -۰/۲, \quad x'(۰) = ۰, \quad x''(۰) = ۰/۵۰۳۰۷, \quad x'''(۰) = ۰, \quad x^{(۴)}(۰) = -۱/۱. \tag{۳.۴}$$

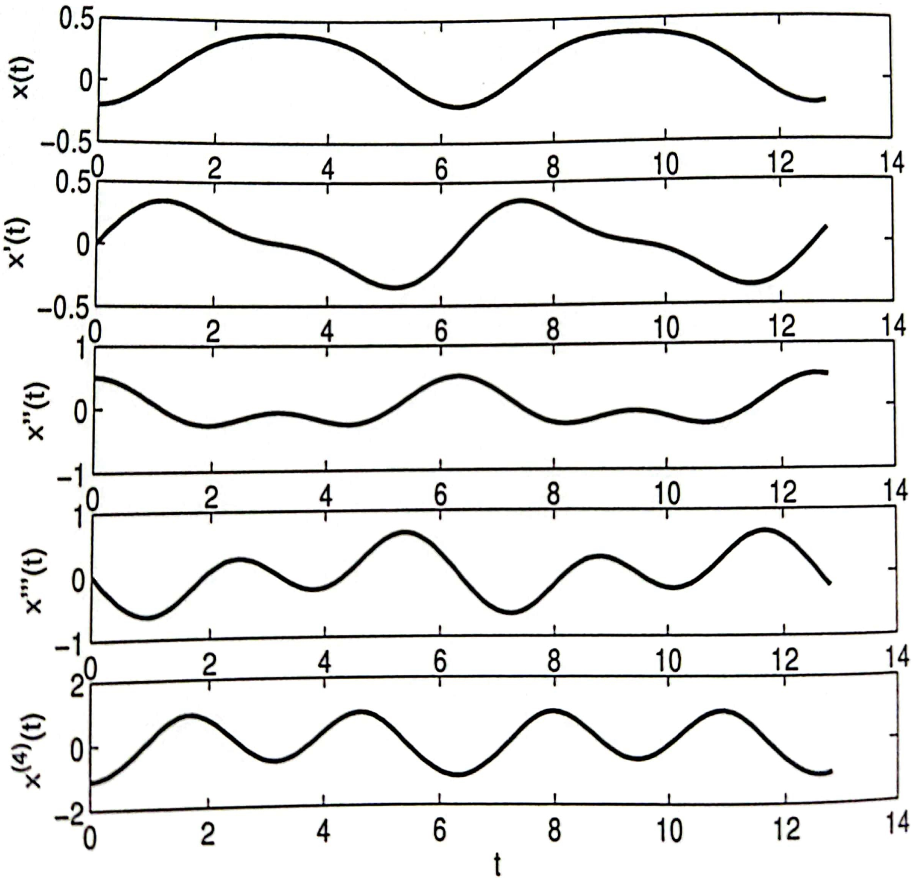
این معادله یک جواب تناوبی با دوره‌ی تناوب $۲T = ۶/۳۰۲۷۷$، دارد که

$$x(۲T) = -۰/۲, \quad x'(۲T) = -۰/۰۰۲, \quad x''(۲T) = ۰/۵۲, \quad x'''(۲T) = ۰/۰۰۴, \quad x^{(۴)}(۲T) = -۱/۱۵.$$

نمودار توابع $x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), x^{(۴)}(t),$ با شرایط اولیه (۱.۴)، در شکل ۱ برای $t \geq ۰$ داده شده است.

۵ نتیجه‌گیری

به‌طور اساسی ارائه روش مناسب و به‌کاربستن آن برای شناسایی جواب‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی یک مزیت محسوب می‌شود. در اینجا به‌کمک روش درجه توپولوژیکی، وجود جواب تناوبی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه پنج (۶.۱) تحت شرط (۷.۱) ارائه گردیده است. همچنین به‌کمک این روش جواب‌های تقریبی و به‌ویژه دوره‌ی تناوب جواب‌ها قابل شناسایی است.



شکل ۱: توابع $x(t), x'(t), x''(t), x'''(t), x^{(۴)}(t)$ برای $t \geq ۰$

فهرست منابع

[۱] م.ر. یاحقی، قضیه پوانکاره–بندیکسون در $\mathbb{R}^n$ $(n > ۳)$ ، (پایان نامه کارشناسی ارشد) دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۱.

[2] M. Bayat and Z. Khatami, The Existence of Periodic Solutions in a Certain Class of Nonlinear Fourth Order Autonomous ODE's , Caspian Journal of Applied Sciences Research **2** (2013), 46–51.

[3] M. Bayat and B. Mehri, Periodic Solutions of First-order Autonomous Quasi-linear Systems, Linear Algebra and its Applications **432** (2010), 485–492.

[4] M. Bayat and B. Mehri, A Necessary Condition for the Existence of Periodic Solutions of Certain Three Dimensional Autonomous Systems, J. Appl. Math. Letters **22** (2009), 1292–1296.

[5] C.E. Berrehail and A. Makhlouf, Periodic Solutions for a Class of Perturbed Fifth-order Autonomous Differential Equations via Averaging Theory, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 1 **13** (2022), 2479-–2491.

[6] J. Cronin, *Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis*, Math. Survey II, American Math. Society, Providence, R.I. (1964).

[7] G. Dinca and J. Mawhin , *Brouwer Degree*, The Core of Nonlinear Analysis-Birkhäuser (2021).

[8] H.A. Emamirad and B. Mehri, On The Existence of Periodic Solutions for Autonomous Second Order Systems, Nonlinear Analysis **9** (1979), 577–582.

[9] M. Fčkan, *Topological Degree Approach to Bifurcation Problems*, Springer, (2008).

[10] N.G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1978).

[11] B. Mehri, A Note on Periodic Solution for Certain Nonlinear Third Order Autonomous Differential Equation, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **26** (1981), 1211–1215.

[12] B. Mehri and M. Niksirat, On the Existence of Periodic Solutions for The Quasi-Linear Third-Order Differential Equation, J. Math. Anal. Appl., **261** (2001), 159–167.

[13] D. O'Regan, Y.J. Cho and Y. Chen, *Topological Degree Theory and Applications* , Chapman & Hall/CRC, (2006).

[14] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.

On the Existence of Periodic Solutions of a Certain Fifth-order Autonomous Differential Equations via Topological Degree Theory

Morteza Bayat †

Department of Mathematics, Zanjan Branch, Islamic Azad University, Zanjan, Iran

Communicated by: Mehdi Najafikhah

Received: 2023/1/22 Accepted: 2023/7/13

Abstract: In this paper, we study the existence of periodic solutions a certain autonomous non-linear ordinary differential equations (ODE's) of fifth order. Our method is based on the evaluation of Brouwer's degree theory and making use of the homotopy invariance property of the topological degree. Finally, we present some numerical results obtained by using the analytical methods.

Keywords: Periodic solutions, Topological Brouwer degree theory, Homotopy invariance property, Rouchè's Theorem.

†Corresponding author.

E-mail addresses: (Morteza Bayat), baayyaatt@gmail.com,