مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۲۴۵-۲۴۹

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.34407.1836

بررسی نگاشت‌های مرکزگرای جردن

فاطمه قومنجانی [۱] [×]، محمد علی بهمنی [۲]

(۱) مرکز آموزش عالی کاشمر، کاشمر، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

دبیر مسئول: امیدعلی شهنی کرم‌زاده

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۴/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۴/۱۰

چکیده: در این مقاله، ساختار نگاشت‌های مرکزگرای جردن که از جبر یکدار A به A- دو مدول یکانی M تعریف می‌شوند را بررسی می‌کنیم. نتایج را روی جبرهای مثلثی به‌کارگرفته و به ویژه ثابت می‌کنیم که هر نگاشت مرکزگرای جردن روی یک جبر مثلثی، یک نگاشت مرکزگرا است.

واژه‌های کلیدی: نگاشت مرکزگرا، نگاشت مرکزگرای جردن، جبر مثلثی.

رده‌بندی ریاضی: 15A78, 16W25, 47B47

۱ مقدمه

در این مقاله، $\mathcal{R}$ یک حلقه جابجایی یکدار و A یک جبر یکدار روی R با مرکز $Z(A)$ و M یک A - دو مدول یکانی است. برای $a \in A$ و $m \in M$، $a \circ m$ و $[a, m]$ به ترتیب نشان دهنده‌ی ضرب جردن $am + ma$ و ضرب لی $am - ma$ هستند. جبر A را ۲- تاب آزاد می‌نامیم هرگاه به ازای $a \in A$ بتوان از تساوی $2a = 0$، تساوی $a = 0$ را نتیجه گرفت. در این مقاله، هر جبر و هر دو مدول، ۲- تاب آزاد هستند.

فرض کنیم $\phi : A \longrightarrow M$ یک نگاشت خطی باشد. یادآوری می‌کنیم که ϕ یک نگاشت مرکزگرای راست (چپ) می‌باشد اگر برای هر $a, b \in A$ $\phi(ab) = a\phi(b)$ $(\phi(ab) = \phi(a)b)$. نگاشت ϕ یک نگاشت مرکزگرا نامیده می‌شود اگر یک نگاشت مرکزگرای راست و چپ باشد. گوییم ϕ یک نگاشت مرکزگرای جردن است، اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$\phi(a \circ b) = a \circ \phi(b).$$

واضح است که ϕ یک نگاشت مرکزگرا است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$\phi(a) = \phi(1)a = a\phi(1).$$

[×] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: fatemeghomanjani@gmail.com (F.Ghomanjani), mohamadalibahmani@gma.com (M.A. Bahmani)

واضح است که هر نگاشت مرکزگرا، یک نگاشت مرکزگرای جردن است. عکس آن، به‌صورت کلی درست نیست (مثال ۶.۲ از [۳] را ببینید). بنابراین پیدا کردن شرایطی که تحت آن یک نگاشت مرکزگرای جردن را تبدیل به یک نگاشت مرکزگرا کند، بسیار جالب و مورد توجه است. لیو در [۴] نشان داد که تحت شرایطی یک نگاشت مرکزگرای جردن روی یک جبر مثلثی تبدیل به یک نگاشت مرکزگرا می‌گردد. زالار در [۶] نشان داد که هر نگاشت مرکزگرای جردن روی یک حلقه شبه‌اول ۲- تاب آزاد، یک نگاشت مرکزگرا است.

در این مقاله، ما به توصیف یک نگاشت مرکزگرای جردن از A به M می‌پردازیم. در یکی از نتایج (قضیه ۲.۲) نشان می‌دهیم که برای نگاشت مرکزگرای جردن $f : A \to M$ اگر A- دو مدول M، ۲- تاب آزاد باشد و همچنین $f(۱)$ متعلق به مرکز M باشد آن‌گاه f به یک نگاشت مرکزگرا تبدیل می‌شود. برای رسیدن به این هدف، لم ۱.۲ بیان و اثبات شده است. هدف دوم در این مقاله، توصیف نگاشت‌های مرکزگرای جردن روی جبرهای مثلثی است. برای این هدف، به قضیه‌ی ۲.۲ و لم ۳.۲ نیاز داریم.

در ادامه‌ی این بخش، ساختار جبرهای مثلثی را یادآوری می‌کنیم. جبرهای مثلثی، در ابتدا در [۱] معرفی شد و سپس مورد مطالعه بسیاری از نویسندگان قرار گرفت ([۲]، [۴]، [۵]). فرض کنید A و B جبرهای یکدار و M یک (A, B)- مدول یکانی باشند، در این‌صورت مجموعه‌ی

$$T = Tri(A, M, B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ ۰ & b \end{pmatrix} : \ a \in A, m \in M, b \in B \right\};$$

همراه با اعمال جبری معمول ماتریس‌ها تشکیل یک جبر می‌دهد که آن را یک جبرمثلثی گویند. اگر M یک A- مدول چپ باوفا و M یک B- مدول راست باوفا باشد، مرکز این جبر به فرم زیر است:

$$Z(T) = \{a \oplus b : \ am = mb, \ \forall\, a \in A, b \in B\}.$$

در این مقاله، هرجا سخن از جبرمثلثی $T = Tri(A, M, B)$ می‌آید فرض بر این است که M یک A- مدول چپ باوفا و M یک B- مدول راست باوفا است. یادآوری کنیم که M را یک A- مدول چپ باوفا گوییم هرگاه به‌توان از تساوی $aM = ۰$، تساوی $a = ۰$ را نتیجه گرفت و M را یک B- مدول راست باوفا گوییم هرگاه به‌توان از تساوی $Mb = ۰$، تساوی $b = ۰$ را نتیجه گرفت.

۲ نتایج اصلی

هدف اصلی ما، مطالعه نگاشت مرکزگرای جردن از یک جبر یکدار مانند A به یک A- دو مدول یکانی مانند M است. نتایج به‌دست آمده روی جبر یکدار، را بر جبر مثلثی به‌کار می‌گیریم. نشان می‌دهیم که هر نگاشت مرکزگرای جردن روی جبر مثلثی، یک نگاشت مرکزگرا است. ابتدا با لم زیر شروع می‌کنیم:

لم ۱.۲. فرض کنید $f : A \to M$ یک نگاشت مرکزگرای جردن باشد. آن‌گاه داریم:

۱. برای هر $x, y \in A$، $[x, [y, f(۱)]] = ۰$،

۲. برای هر $x \in A$، $۲f(x) = f(۱) \circ x$.

اثبات. فرض کنیم $x, y \in A$. با توجه به این‌که f یک نگاشت مرکزگرای جردن است داریم $f(y \circ x) = f(y) \circ x$. با قرار دادن $y = ۱$ در این رابطه نتیجه می‌شود

$$۲f(x) = f(۱) \circ x. \tag{۱.۲}$$

از (۱.۲) داریم

$$f(۱) \circ (x \circ y) = ۲f(x \circ y) = ۲f(x) \circ y = (f(۱) \circ x) \circ y.$$

این نتیجه می‌دهد که $[x, [y, f(۱)]] = f(۱)yx + xyf(۱) - xf(۱)y - yf(۱)x = ۰$. □

یادآوری می‌کنیم که مرکز A- دو مدول M به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$Z(M) = \{m \in M : [m, A] = ۰\}$$

اکنون اولین نتیجه اصلی مقاله را بیان می‌کنیم:

قضیه ۲.۲. فرض کنید $f : A \to M$ یک نگاشت مرکزگرای جردن باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. $f(1) \in Z(M)$،

۲. برای هر $x \in A$، $f(x) = f(1)x = xf(1)$ (یا به طورمعادل f یک نگاشت مرکزگرا است).

اثبات. واضح است که قسمت (۲)، قسمت (۱) را نتیجه می‌دهد. در ادامه نشان می‌دهیم که قسمت (۱)، نیز قسمت (۲) را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $x \in A$ و $f(1) \in Z(M)$. بنابراین داریم $f(1)x = xf(1)$. با ادعای (۲) از لم ۱.۲ داریم $2f(x) = 2f(1)x$. اکنون ۲- تاب آزاد بودن M نتیجه می‌دهد که $f(x) = f(1)x$ و این مطلب اثبات را کامل می‌کند. □

اکنون به هدف دوم برمی‌گردیم. یعنی نگاشت مرکزگرای جردن را روی جبر مثلثی مطالعه می‌کنیم. برای رسیدن به هدف دوم، لم زیر را بیان می‌کنیم:

لم ۳.۲. فرض کنید $f : A \to M$ یک نگاشت مرکزگرای جردن باشد. آن‌گاه داریم:

۱. برای هر $x, y \in A$، داریم $[[x, y], f(1)] = 0$.

۲. برای هر عنصر خودتوان e متعلق به A که $e' = 1 - e$، داریم $f(1) = ef(1)e + e'f(1)e'$.

اثبات. ابتدا (۱) را اثبات می‌کنیم. فرض کنید $x, y \in A$، از قسمت (۱) لم ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که $[x, [f(1), y]] = 0$ و $[y, [f(1), x]] = 0$. بنابراین تساوی ژاکوبی

$$[y, [f(1), x]] + [f(1), [x, y]] + [x, [y, f(1)]] = 0$$

نتیجه می‌دهد که $[[x, y], f(1)] = 0$. اکنون (۲) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید e عنصر خودتوان متعلق به A باشد که $e' = 1 - e$. واضح است که

$$f(1) = ef(1)e + ef(1)e' + e'f(1)e + e'f(1)e'.$$

بنابه لم ۱.۲ (قسمت اول) داریم $[e, [e, f(1)]] = 0$. بنابراین:

$$-ef(1)e + ef(1) + f(1)e - ef(1)e = 0. \tag{۲.۲}$$

با ضرب رابطه‌ی (۲.۲) از سمت چپ در e و از سمت راست در e' داریم $ef(1)e' = 0$. همچنین، با ضرب رابطه‌ی (۲.۲) از سمت چپ در e' و از سمت راست در e داریم $e'f(1)e = 0$. بنابراین $f(1) = ef(1)e + e'f(1)e'$. □

اکنون، نتیجه اساسی دوم را به‌دست می‌آوریم که نشان می‌دهد یک نگاشت مرکزگرای جردن روی یک جبر مثلثی، یک نگاشت مرکزگرا است.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $T = Tri(A, M, B)$ یک جبر مثلثی باشد. اگر $f : T \to T$ یک نگاشت مرکزگرای جردن باشد، آن‌گاه f یک نگاشت مرکزگرا است.

اثبات. در ابتدا برای راحتی کار، قرارداد می‌کنیم عنصر $\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ متعلق به T را با m نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که $e = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ عنصر خودتوان استاندارد T است که

$$e' = 1 - e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_B \end{pmatrix}.$$

بنا بر لم ۳.۲، داریم $f(1) = ef(1)e + e'f(1)e'$. با گذاشتن $x = e$ و $y = m$ در قسمت (۱) از لم ۳.۲، داریم $emf(1) - mef(1) - f(1)em + f(1)me = 0$. ازآن‌جایی که $me = 0$ و $em = m$ داریم $mf(1) = f(1)m$. اکنون با استفاده از این رابطه و با توجه به این‌که $e'm = 0$ و $me = 0$ خواهیم داشت: $ef(1)em = me'f(1)e'$. بنابراین

$$f(1) = ef(1)e + e'f(1)e' \in Z(T).$$

درنتیجه طبق قضیه ۲.۲، f یک نگاشت مرکزگرا است.

□

یادآوری می‌کنیم که جبر ماتریس‌های بالا مثلثی و جبر ماتریس‌های پایین مثلثی و جبر آشیانه‌ای، مثال‌های مهمی از جبرهای مثلثی هستند. بنابراین قضیه ۴.۲، را می‌توانیم برای رده وسیعی از جبرها به‌کار ببریم.

سپاس‌گزاری

در پایان از تمامی زحمات سردبیر مجله و داوران محترم به دلیل پیشنهادات خوبی که برای بهبود این مقاله داشتند، تشکر و قدردانی می‌نماییم.

فهرست منابع

[1] Cheng, W. S. *Commuting maps of triangular algebras,* J. London Math. Soc. **63** (2001) 117-127.

[2] Cheng, W. S. *Lie derivations of triangular algebras,* Linear Multilinear Algebra **51** (2003) 299-310.

[3] Ghahramani, H. *On centralizers of Banach algebras,* Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **38** (2015) 155-164.

[4] Liu, L. *On Jordan centralizers of triangular algebras,* Banach J. Math. Anal. **10** (2) (2016) 223-234.

[5] Qi X. F. and Hou, J. G. *Characterizing centralizers and generalized derivations on triangular algebras by acting on zero product,* Acta Math. Sin. **29**(7) (2013) 1245-1256.

[6] Zalar, B. *On centralizers of semiprime rings,* Comment. Math. Univ. Carollinae. **32** (1991) 609-614.

On the Jordan Centralizer Maps

F. Ghomanjani[1,†] **, Mohammad Ali Bahmani**[2]

(1) Department of Mathematics, Kashmar higher education institute, Kashmar, Iran
(2) Department of Mathematics, Ferdowsi university of mashhad, Mashhad, Iran

Communicated by: O.A.S. Karamzadeh

Received: 2020/7/20 Accepted: 2023/7/1

Abstract: In this paper, we investigate the structure of Jordan centralizer maps from a unital algebra A into a unital A-bimodule M. We applied our results to triangular algebras. In particular, we prove that every Jordan centralizer map on a triangular algebra is a centralizer map.

Keywords: Centralizer map, Jordan centralizer map, Triangular algebra.

†Corresponding author.
E-mail addresses: fatemeghomanjani@gmail.com (F. Ghomanjani), mohamadalibahmani@gmail.com (M.A.Bahmani).