مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۲، ص ۲۶۹-۲۸۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.43374.2147

شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر-زمانی

سیدمجتبی مشکانی [۱]، سهراب عفتی [۲] ×، عقیله حیدری [۱]

(۱) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران
(۲) قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

دبیر مسئول: علی‌رضا فخارزاده جهرمی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۶/۶

چکیده: در این مقاله شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر- زمانی بررسی می‌شوند. اهمیت این مسأله در آن است که هر دو متغیر کنترل و حالت، تحت تأثیر تأخیرهای وابسته به زمان می‌باشند. هم‌چنین تأخیرها در تابعک هدف نیز اِعمال شده‌اند. وابستگی تأخیرها به زمان، باعث سخت‌شدن اثبات شرایط لازم بهینگی می‌شود. پیچیدگی اثبات این شرایط، در محاسبه تغییراتِ متغیرهای کنترل و حالتِ تحت تأثیر این تأخیرها می‌باشد. برای محاسبه و بررسی این تغییرات در متغیرهای تأخیری کنترل و حالت، از تغییر متغیرِ مناسبی استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب با اِعمال این تغییر متغیر و محاسبه تغییراتِ متغیرهای کنترل و حالت، شرایط لازم بهینگی برای مسأله اثبات می‌شود. در نهایت، با استفاده از این شرایط به حل چند مثال پرداخته و نتایج عددی به‌دست آمده ارائه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: مسائل کنترل بهینه، سیستم‌های تأخیری، شرایط لازم بهینگی، سیستم‌های غیرخطی، تأخیرهای متغیر- زمانی.

رده‌بندی ریاضی: 49Kxx; 93C43

۱ مقدمه

رده‌ای از مسائل کنترل بهینه که در مدل‌سازی مسائل علوم مختلف به‌کار می‌روند، مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی می‌باشند. این مسائل معمولاً با توجه به نوع تأخیر و متغیری که تأخیر روی آن اِعمال می‌شود، دسته‌بندی می‌گردند. در این مسائل اگر تأخیرها وابسته به زمان باشند و طی زمان تغییر کنند، مسأله را کنترل بهینه با تأخیر متغیر- زمانی می‌نامند.
پژوهش‌ها و مطالعات زیادی در زمینه مسائل کنترل بهینه با تأخیر زمانی انجام شده و رده‌های مختلف آن‌ها مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: meshkani.m@pnurazavi.ac.ir (S. M. Meshkani), s-effati@um.ac.ir (S. Effati), a_heidari@pnu.ac.ir (A. Heydari)

و روش‌های مختلفی برای حل و محاسبه جواب بهینه آن‌ها ارائه شده است. در ادامه خلاصه‌ای از تحقیقات انجام شده را مرور می‌کنیم:
اصل بیشینه پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه با تأخیر ثابت در متغیر حالت توسط خاراتیشویلی در سال ۱۹۶۱ اثبات شد [۱۲]. هَلَنی در سال ۱۹۶۸ اصل بیشینه را برای مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای ثابت در متغیرهای کنترل و حالت، ارائه کرد [۸]. نتایج مشابهی توسط سلیمان و رِی در سال ۱۹۷۲ ارائه شد [۱۹]. بَنکس در سال ۱۹۶۸ اصل بیشینه را برای مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر- زمانی در متغیر حالت، اثبات کرد [۲]. هم‌چنین او این نوع تأخیر را روی متغیر کنترل مسائل کنترل بهینه تأخیری با سیستم خطی مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۹۰ اَنجل و کِی روش شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه غیرخطی تأخیری با قیدهای نامساوی در فضای تابعی بررسی کردند [۱]. گُلمان و دیگران شرایط لازم بهینگی را در سال ۲۰۰۹ برای مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای ثابت در متغیرهای کنترل و حالت به همراه قیدهای نامساوی اثبات کردند [۶]. هم‌چنین گلمان و مایرِر اصل بیشینه پونتریاگین را در سال ۲۰۱۴ برای نوع دیگری از مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای ثابت در متغیرهای کنترل و حالت ارائه و مسأله را به همراه قیدهای نامساوی تأخیری در متغیرهای حالت و کنترل بررسی کردند [۷]. میرحسینی و دیگران در سال ۲۰۱۵ روش تکراری تغییراتی را برای حل مسائل کنترل بهینه خطی با تأخیرهای ثابت و با تابعی هدف درجه دوم، به‌کار بردند [۱۵]. در سال ۲۰۱۶، بتس و همکارانش روشی مبتنی بر پارامترسازی روی متغیرهای کنترل برای حل مسائل کنترل بهینه با تاخیرهای ثابت ارائه کردند [۴]. در همان سال، حسینی و مرزبان شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه غیرخطی تأخیری با تأخیرهای قطعه‌ای، ثابت کردند [۹]. هم‌چنین آن‌ها یک روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با سیستم‌های خطی تأخیری چندگانه شامل تأخیرهای قطعه‌ای ثابت ارائه کردند [۱۶]. مرزبان و پیرمرادیان در سال ۲۰۱۸ برای حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی با تأخیرهای ثابت روی متغیرهای کنترل و حالت، یک روش عددی ترکیبی با استفاده از توابع بلوکی و درون‌یابی لاگرانژ به‌کار بردند [۱۷]. روشی عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر- زمانی که فقط روی متغیر حالت اعمال شده است را جاجرمی و حجی‌پور در سال ۲۰۱۷ بررسی کردند [۱۰]. هم‌چنین آن‌ها در همان سال مسأله کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر- زمانی به همراه آشوب‌های پایدار را بررسی و روشی عددی برای حل آن‌ها ارائه کردند [۱۱]. رخشان و عفتی در سال ۲۰۲۰ مسائل کنترل بهینه کسریِ تأخیری را بررسی و معادلات اولر- لاگرانژ را برای این مسائل اثبات کردند [۱۸]. در همین سال اوو و بای با انتقال مقیاس زمان، مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر زمانی یکسان روی هر دو متغیر کنترل و حالت را حل کردند [۲۰]. رده‌ای از مسائل غیرخطی که در آن تابع کنترل وابسته به متغیر حالت با تاخیر متغیر- زمانی است، توسط لئو و همکارانش در سال ۲۰۲۲ بررسی شد [۱۳]. آن‌ها یک روش عددی برای تقریب مسأله در بعد متناهی ارائه کردند. هم‌چنین در همان سال، آن‌ها، یک روش عددی تکراری برای حل مسأله کنترل بهینه غیرخطی کسری تأخیری معرفی کردند [۱۴].

در همه تحقیقاتی که در ادبیات موضوع، مورد بررسی قرار گرفت، تأخیرها یا روی متغیر کنترل و یا روی متغیر حالت اعمال شده اند. هم‌چنین در مسائلی که تأخیرها، روی هر دو متغیر کنترل و حالت اعمال شده‌اند، فقط محدودیت‌های مسأله شامل تأخیر بوده و تأثیر آن‌ها در تابع هدف بررسی نشده است. نکته دیگر آن‌که در این تحقیقات، معمولاً تأخیرهای اعمال شده روی همه مؤلفه‌های متغیرهای کنترل و حالت، یکسان می‌باشند.

در این مقاله، در بخش بعد ابتدا به بیان مسأله می‌پردازیم. نکاتی که مسأله مورد مطالعه را متمایز می‌کند، آن است که:

۱) تأخیرهای متغیر- زمانی روی هر دو متغیر حالت و کنترل اعمال شده‌اند. یعنی تأخیرهای وابسته به زمانِ $k(t)$ در متغیر حالت و $r(t)$ در متغیر کنترل می‌باشند.

۲) توابع تأخیر در متغیرهای حالت و کنترل مؤلفه به مؤلفه متفاوت می‌باشند. در این مسأله، بردارهای $x^{[k]}(t)$ و $u^{[r]}(t)$ بردارهای حالت و کنترل تحت تاثیر تأخیر می‌باشند که به‌صورت:

$$x^{[k]}(t) = x(t-k(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t-k_1(t)) \\ x_2(t-k_2(t)) \\ \vdots \\ x_n(t-k_n(t)) \end{pmatrix},$$

و

$$u^{[r]}(t) = u(t-r(t)) = \begin{pmatrix} u_1(t-r_1(t)) \\ u_2(t-r_2(t)) \\ \vdots \\ u_m(t-r_m(t)) \end{pmatrix}$$

تعریف می‌شوند و در آن‌ها $k_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ برای $i = 1, \ldots, n$ و $r_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ برای $j = 1, \ldots, m$.

۳) تابعک هدف مسأله تحت تاثیر تأخیر می‌باشد.

سپس در بخش ۳، شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر– زمانی بیان و اثبات می‌شوند. نکته قابل توجه در اثبات شرایط لازم بهینگی، استفاده از تغییر متغیرِ مناسب و بررسی تغییراتِ متغیرهای تحت تأثیر تأخیر در متغیرهای کنترل و حالت می‌باشد. در بخش ۴، دو مثال را با استفاده از شرایط اثبات شده، حل کرده و نتایج عددی آن‌ها را ارائه می‌کنیم. در نهایت، در بخش ۵، نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲ بیان مسأله

مسأله کنترل بهینه‌ای که در این مقاله مطالعه و بررسی می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$Min\ \ J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_۰}^{t_f} f_۰(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t)dt, \qquad (۱.۲)$$

تحت قیدهایی با معادلات دیفرانسیل تأخیری به‌صورت:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t), \quad t \in [t_۰, t_f], \qquad (۲.۲)$$

$$x(t) = \phi(t), \qquad t_۰ - k(t_۰) \leq t \leq t_۰, \qquad (۳.۲)$$

$$u(t) = \psi(t), \qquad t_۰ - r(t_۰) \leq t \leq t_۰, \qquad (۴.۲)$$

که در آن $x \in (H^۱[t_۰, t_f])^n$ و $u \in U \subseteq (L^۲[t_۰, t_f])^m$ و U مجموعه‌ای محدب می‌باشد. همچنین $t_۰$ و t_f ثابت‌هایی هستند که به‌ترتیب زمان ابتدایی و انتهایی در نظر گرفته می‌شوند و $[t_۰, t_f] \subset \mathbb{R}^+$. به‌علاوه در بردارهای $x^{[k]}(t)$ و $u^{[r]}(t)$ که بردارهای حالت و کنترل تحت تاثیر تأخیر می‌باشند، برای آن‌که توابع $t-k(t)$ و $t-r(t)$ نسبت به زمان صعودی باشند، شرایط $۰ \leq \dot{k}(t) < ۱$ و $۰ \leq \dot{r}(t) < ۱$ را در نظر می‌گیریم.
دیگر توابع مرتبط با این مسأله به‌صورت:

$$\begin{aligned}
&S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\\
&f_۰ : (H^۱[t_۰, t_f])^n \times (H^۱[t_۰, t_f])^n \times (L^۲[t_۰, t_f])^m \times (L^۲[t_۰, t_f])^m \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow L^۲[t_۰, t_f],\\
&f : (H^۱[t_۰, t_f])^n \times (H^۱[t_۰, t_f])^n \times (L^۲[t_۰, t_f])^m \times (L^۲[t_۰, t_f])^m \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow (L^۲[t_۰, t_f])^n,
\end{aligned}$$

که همه این توابع نسبت به متغیرهایشان پیوسته و تا مرتبه دوم مشتق‌پذیر می‌باشند. همچنین $\phi(t)$ و $\psi(t)$ در (۳.۲) و (۴.۲)، توابع معین هستند. یادآور می‌شویم که $(H^۱[t_۰, t_f])^n$ حاصل‌ضرب n– تایی از فضای سوبولف $H^۱[t_۰, t_f]$ و $(L^۲[t_۰, t_f])^m$ حاصل‌ضرب m– تایی از توابع انتگرال‌پذیر $L^۲[t_۰, t_f]$ می‌باشند.

۳ شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر– زمانی

در این بخش شرایط لازم بهینگی، برای مسأله کنترل بهینه تأخیری با تأخیرهای متغیر– زمانی (۱.۲) – (۴.۲) اثبات می‌شود. در اثبات این شرایط، به نوع تغییر متغیر اعمال شده در بررسی تغییرات متغیرهای کنترل و حالت تحت تاثیر تأخیر، دقت می‌کنیم.
ابتدا برخی مفاهیم، تعاریف و قضیه‌هایی که نیاز داریم را بیان می‌کنیم. برای این منظور به مفهوم مشتق گاتئکس و گرادیان می‌پردازیم.
می‌دانیم مشتق یک تابع $f(x)$ نسبت به متغیر حقیقی $x \in \mathbb{R}$ به‌صورت:

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

هرگاه حد فوق موجود و متناهی باشد، تعریف می‌شود. این تعریف برای تابعک‌های $J(v)$ در فضای باناخ قابل تعمیم نیست، زیرا متغیر تصمیم v ممکن است ناپیوستگی‌هایی داشته باشد که منجر به ناهمواری $J(v)$ شود. بنابراین به منظور تعیین شرایط لازم بهینگی در برنامه‌ریزی ریاضی با بعد نامتناهی، مشتق جهتی در فضای باناخ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳. [۵] فرض کنیم X یک فضای برداری و F یک تابعک تعریف شده روی X باشد. در این صورت مقدار حد:

$$\lim_{\theta\to \circ}\frac{F(v+\theta\mu)-F(v)}{\theta}\equiv \delta F(v,\mu),$$

مشتق گاتئکس[۱] (مشتق G) تابعک F در $v\in X$ و در مسیر $\mu\in X$ نامیده می‌شود. اگر برای همه $\mu\in V$ حد فوق موجود باشد، می‌گوییم تابعک F مشتق‌پذیر گاتئکس (G - مشتق‌پذیر) در $v\in V$ است.

مشتق G در حالت کلی از ایده مشتق جهتی در فضاهای با بعد متناهی گرفته شده است. توجه می‌کنیم که مشتق G این امکان را به ما می‌دهد که گرادیان یک تابعک در فضاهای باناخ با حاصل‌ضرب داخلی خوش‌تعریف (مثل فضای هیلبرت) را بتوانیم به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف ۲.۳. فرض کنیم X یک فضای هیلبرت با حاصل‌ضرب اسکالر $\langle\cdot,\cdot\rangle$ و F یک تابعک G مشتق‌پذیر روی X باشد. در این صورت $\nabla F(v)\in X$ که:

$$\delta F(v,\mu)=\langle\nabla F(v),\mu\rangle\,,\qquad \forall\mu\in X,$$

گرادیان F در X نامیده می‌شود. طبق قضیه نمایش ریس[۲] برای فضاهای هیلبرت که در ادامه آن را بیان می‌کنیم، مطمئنیم که $\nabla F(v)$ موجود و خوش‌تعریف است.

قضیه ۳.۳. (قضیه نمایش ریس) فرض کنیم V یک فضای هیلبرت و $F\in\mathcal{L}(V)$ نگاشت خطی پیوسته روی V باشد. آن‌گاه $w\in V$ به‌طور یکتا چنان یافت می‌شود که:

$$F(v)=\langle w,v\rangle\,,\qquad \forall v\in V,$$

یادآوری کنیم که $\mathcal{L}(V)$ فضای تمام نگاشت‌های خطی پیوسته روی V است.

برای تشریح شرایط بهینگی مسأله اصلی، جهت یادآوری، برخی مفاهیم مقدماتی از برنامه‌ریزی ریاضی با بعد نامتناهی را ارائه می‌کنیم. فضای برداری V و تابعک $J:V\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. هدف ما کمینه کردن J روی V یا روی زیرمجموعه $U\subseteq V$ است. این مسأله اساسی شامل برنامه‌ریزی ریاضی با بعد متناهی، مسأله حساب تغییرات کلاسیک و مسأله کنترل بهینه می‌شود. برای بهینه‌سازی مقید یک تابعک، قضیه وایراشتراس[۳] که از مشهورترین قضیه‌های آنالیز ریاضی در این زمینه است را بیان می‌کنیم:

قضیه ۴.۳. (قضیه وجودی وایراشتراس) اگر U زیرمجموعه‌ای فشرده از V و J یک تابعک پیوسته روی U باشد، آن‌گاه مسأله:

$$Min\;\; J(v)\quad s.t.\quad v\in U\subseteq V$$

یک جواب بهینه $v^*\in U$ دارد.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۵] مراجعه شود. $\square$

این قضیه در هر دو حالت بعد متناهی و بعد نامتناهی با در نظر گرفتن شرایط خاص معتبر است. به‌خصوص در حالت بعد نامتناهی باید دقت بیشتری داشته باشیم و نسخه ضعیف‌تری از قضیه را داریم. هنگامی که V یک فضای باناخ یا فضای هیلبرت است، کافی است U کراندار و بسته برای فشردگی ضعیف در نظر گرفته شود. در قضیه بعدی مشتق G، در بیان شرایط لازم برای جواب بهینه به‌کار می‌رود. این قضیه به‌صورت زیر است:

قضیه ۵.۳. شرایط لازم مرتبه اول برای بهینه‌سازی نامقید اگر $J(v)$ یک تابعک روی فضای V و G- مشتق‌پذیر در $v^*\in V$، آن‌گاه یک شرط لازم برای آن‌که v^* یک جواب بهینه برای J باشد، آن است که:

$$\delta J(v^*,\phi)=\circ,\qquad \forall\phi\in V. \tag{۱.۳}$$

اثبات. برای هر v^* که یک کمینه موضعی یا سراسری از تابعک J است، باید $J(v^*+\theta\phi)$ به ازای هر متغیر حقیقی θ در رابطه زیر صدق کند:

$$\circ=\left[\frac{d}{d\theta}J(v^*+\theta\phi)\right]_{\theta=\circ}=\lim_{\theta\longrightarrow\circ}\frac{J(v^*+\theta\phi)-J(v^*)}{\theta},\qquad \forall\phi\in V,$$

با توجه به تعریف (۱.۳)، حد بالا مشتق G است. $\square$

اکنون آماده ایم که شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه با تأخیرهای متغیر زمانی، بیان و اثبات کنیم.
ابتدا شاخص عمل‌کرد (۱.۲) را در نظر می‌گیریم:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_\circ}^{t_f} f_\circ(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t)dt, \tag{۲.۳}$$

چون S تابعی مشتق‌پذیر است، پس می‌توان نوشت:

$$S(x(t_f), t_f) = \int_{t_\circ}^{t_f} \frac{d}{dt}\left[S(x(t), t)\right] dt + S(x(t_\circ), t_\circ), \tag{۳.۳}$$

بنابراین داریم:

$$J(u, u^{[r]}) = \int_{t_\circ}^{t_f} \left\{ f_\circ(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t) + \frac{d}{dt}\left[S(x(t), t)\right] \right\} dt + S(x(t_\circ), t_\circ), \tag{۴.۳}$$

توجه داریم $S(x(t_\circ), t_\circ)$ یک مقدار ثابت است. پس بدون آن‌که از کلیت مسأله کاسته شود تابعک زیر را بررسی می‌کنیم:

$$J_۱(u, u^{[r]}) = \int_{t_\circ}^{t_f} \left\{ f_\circ(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t) + \frac{d}{dt}\left[S(x(t), t)\right] \right\} dt, \tag{۵.۳}$$

از طرفی

$$\frac{d}{dt}\left[S(x(t), t)\right] = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T \dot{x}(t) + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

بنابراین:

$$J_۱(u, u^{[r]}) = \int_{t_\circ}^{t_f} \left\{ f_\circ(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T \dot{x}(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} dt. \tag{۶.۳}$$

کمینه کردن و بهینه‌سازی تابعک J در شاخص عمل‌کرد (۱.۲) معادل با کمینه کردن $J_۱$ در (۶.۳) می‌باشد. اکنون با معرفی ضرایب لاگرانژ $\lambda(t)$، شاخص عمل‌کرد افزوده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} J_a(u, u^{[r]}) = \int_{t_\circ}^{t_f} \Big\{ & f_\circ(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^T \dot{x}(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \\ & + \lambda^T(t)\big(f(x, x^{[k]}, u, u^{[r]}, t) - \dot{x}(t)\big) \Big\} dt. \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

اکنون تغییرات J_a را نسبت به هر یک از متغیرها بررسی می‌کنیم. برای این منظور تغییرات δx، $\delta x^{[k]}$، $\delta \dot{x}$، δu، $\delta u^{[r]}$، $\delta\lambda$ و δt_f را معرفی می‌کنیم. می‌دانیم که اگر $x^*(t)$، $u^*(t)$ و $\lambda^*(t)$ مقادیر بهینه $x(t)$، $u(t)$ و $\lambda(t)$ باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned} x(t) &= x^*(t) + \delta x(t) \to \delta x(t) = x(t) - x^*(t) \\ u(t) &= u^*(t) + \delta u(t) \to \delta u(t) = u(t) - u^*(t) \\ \lambda(t) &= \lambda^*(t) + \delta\lambda(t) \to \delta\lambda(t) = \lambda(t) - \lambda^*(t) \end{aligned}$$

چون t_f مقداری ثابت است بنابراین $\delta t_f = 0$ است و داریم:

$$\begin{aligned}\delta J_a(u,u^{[r]}) = \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ \Big(\Big(\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}\Big)^T - \lambda^T(t)\Big)\delta \dot{x} \\
&+ \Big[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \lambda^T(t)\frac{\partial f}{\partial x} + \Big(\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x^2}\Big)\dot{x}(t) \\
&+ \frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x \partial t}\Big]^T \delta x(t) \\
&+ \Big[\frac{\partial f_0}{\partial x^{[k]}} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial x^{[k]}}\Big)\Big]^T \delta x^{[k]}(t) + \Big[\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)\Big]^T \delta u(t) \\
&+ \Big[\frac{\partial f_0}{\partial u^{[r]}} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial u^{[r]}}\Big)\Big]^T \delta u^{[r]}(t) \\
&+ \Big(f(x,x^{[k]},u,u^{[r]},t) - \dot{x}(t)\Big)^T \delta\lambda(t)\Big\} dt. \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

از طرفی:

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{t_f} \delta\dot{x}(t)dt + \delta x(t_0),$$

و چون $x(t_0)$ مقدار ثابتی است، پس $\delta x(t_0) = 0$ و بنابراین:

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^{t_f} \delta\dot{x}(t)dt, \tag{۹.۳}$$

و با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء و رابطه (۹.۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_f} \Big(\Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^T - \lambda^T(t)\Big)\delta\dot{x}dt =& \Big[\Big(-\lambda(t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}\Big)^T \delta x(t)\Big]_{t=t_f} \\
&- \int_{t_0}^{t_f} \Big\{\frac{d}{dt}\Big(-\lambda^T(t) + \Big(\frac{\partial S}{\partial x}\Big)^T\Big)\delta x(t)\Big\}dt. \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

با جایگذاری رابطه (۱۰.۳) در رابطه (۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\delta J_a(u,u^{[r]}) =& \Big[\Big(-\lambda(t) + \frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}\Big)^T \delta x(t)\Big]_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ \Big[\frac{\partial f_0}{\partial x} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \\
&+ \Big(\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x^2}\Big)\dot{x}(t) + \frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x \partial t} \\
&- \frac{d}{dt}\Big(-\lambda^T(t) + \frac{\partial S}{\partial x}\Big)\Big]^T \delta x(t) \\
&+ \Big[\frac{\partial f_0}{\partial x^{[k]}} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial x^{[k]}}\Big)\Big]^T \delta x^{[k]}(t) + \Big[\frac{\partial f_0}{\partial u} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big)\Big]^T \delta u(t) \\
&+ \Big[\frac{\partial f_0}{\partial u^{[r]}} + \lambda^T(t)\Big(\frac{\partial f}{\partial u^{[r]}}\Big)\Big]^T \delta u^{[r]}(t) \\
&+ \Big(f(x,x^{[k]},u,u^{[r]},t) - \dot{x}(t)\Big)^T \delta\lambda(t)\Big\} dt. \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

چون بنا به فرض مسأله مشتقات مرتبه دوم پیوسته است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x^2}\right)\dot{x}(t)+\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x\partial t}-\frac{d}{dt}\left(-\lambda^T(t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x^2}\right)\dot{x}(t)+\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\lambda^T(t)\right)\\&-\left(\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial x^2}\right)\dot{x}(t)-\frac{\partial^2 S(x(t),t)}{\partial t\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\lambda^T(t)\right).\end{aligned}$$

و با استفاده از آن رابطه (۱۱.۳) را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\delta J_a(u,u^{[r]})=&\left[\left(-\lambda(t)+\left(\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}\right)^T\right)\delta x(t)\right]_{t=t_f}\\&+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial f_0}{\partial x}+\lambda^T(t)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{d}{dt}\lambda^T(t)\right]^T\delta x(t)\right.\\&+\left[\frac{\partial f_0}{\partial x^{[k]}}+\lambda^T(t)\frac{\partial f}{\partial x^{[k]}}\right]^T\delta x^{[k]}(t)\\&+\left[\frac{\partial f_0}{\partial u}+\lambda^T(t)\frac{\partial f}{\partial u}\right]^T\delta u(t)+\left[\frac{\partial f_0}{\partial u^{[r]}}+\lambda^T(t)\frac{\partial f}{\partial u^{[r]}}\right]^T\delta u^{[r]}(t)\\&\left.+\left(f(x,x^{[k]},u,u^{[r]},t)-\dot{x}(t)\right)^T\delta\lambda(t)\right\}dt.\end{aligned}\tag{۱۲.۳}$$

با تعریف تابع همیلتونی به‌صورت:

$$\begin{aligned}&H(x(t),x^{[k]}(t),u(t),u^{[r]}(t),\lambda,t)=\\&\qquad f_0(x(t),x^{[k]}(t),u(t),u^{[r]}(t),t)+\lambda^T f(x(t),x^{[k]}(t),u(t),u^{[r]}(t),t),\end{aligned}$$

رابطه (۱۲.۳) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\delta J_a(u,u^{[r]})=&\left[\left(-\lambda(t)+\frac{\partial S(x(t),t)}{\partial x}\right)^T\delta x(t)\right]_{t=t_f}\\&+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}(t)\right]\delta x(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial x^{[k]}}\right]\delta x^{[k]}(t)\right.\\&+\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]\delta u(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial u^{[r]}}\right]\delta u^{[r]}(t)\\&\left.+\left(f(x,x^{[k]},u,u^{[r]},t)-\dot{x}(t)\right)^T\delta\lambda(t)\right\}dt.\end{aligned}\tag{۱۳.۳}$$

برای رسیدن به شرایط لازم بهینگی، باید در رابطه (۱۳.۳)، تغییرات $\delta x^{[k]}$ و $\delta u^{[r]}$ را بر حسب تغییرات δx و δu بنویسیم. ابتدا تغییرات $\delta x^{[k]}$ را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، در بخشی از رابطه (۱۳.۳) که به شکل:

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial H}{\partial x_{k_j}}\left(\delta x^{[k]}\right)_j dt=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial H}{\partial x_j(t-k_j(t))}\left(\delta x_j(t-k_j(t))\right)dt,$$

است، تغییر متغیری به‌صورت زیر اعمال می‌کنیم:

$$z_j=t-k_j(t).\tag{۱۴.۳}$$

چون $k_j(t)$ مشتق‌پذیر است، بنابراین:

$$\frac{dz_j}{dt} = 1 - \dot{k}_j(t) \tag{۱۵.۳}$$

توجه داریم که:

$$z_j(t) = arg\big[z = t - k_j(z)\big]$$

برای $t_\circ \leq t \leq t_f$ و همچنین:

$$t = t_\circ \longrightarrow z_j = t_\circ - k_j(t_\circ); \qquad t = t_f \longrightarrow z_j = t_f - k_j(t_f)$$

پس با اعمال این تغییر متغیر خواهیم داشت:
(۱۶.۳)

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial x_j(t-k_j(t))}\delta x_j(t-k_j(t))dt = \int_{t_\circ - k_j(t_\circ)}^{t_f - k_j(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j} \times \frac{1}{1-\dot{k}_j(t)}\right]_{t=z+k_j(z)} \delta x_j dz_j.$$

با جابجایی و مرتب کردن متغیرهای ظاهری، رابطه (۱۶.۳) معادل رابطه زیر می‌شود:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j}\delta (x^{[k]})_j dt = \int_{t_\circ - k_j(t_\circ)}^{t_f - k_j(t_f)} \left(\frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j} \times \frac{1}{1-\dot{k}_j(t+k_j(t))}\right)\delta x_j dt. \tag{۱۷.۳}$$

چون برای $t < t_\circ$، $x(t) = \phi(t)$ و با توجه به این‌که ϕ یک تابع معین است، پس تغییرات ϕ برابر صفر است. همچنین برای $t \leq t_\circ$، $\delta x_j = \circ$، پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j}\delta (x^{[k]})_j dt = \int_{t_\circ}^{t_f - k_j(t_f)} \left(\frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j} \times \frac{1}{1-\dot{k}_j(t+k_j(t))}\right)\delta x_j dt, \tag{۱۸.۳}$$

از طرفی:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial x_j}\delta x_j dt = \int_{t_\circ}^{t_f - k_j(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial x_j}\right]\delta x_j dt + \int_{t_f - k_j(t_f)}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial x_j}\right]\delta x_j dt. \tag{۱۹.۳}$$

بنابراین از (۱۳.۳) و (۱۸.۳) و (۱۹.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_\circ}^{t_f} \left\{\left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}(t)\right]\delta x(t) + \left[\frac{\partial H}{\partial x^{[k]}}\right]\delta x^{[k]}(t)\right\}dt \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{t_\circ}^{t_f - k_j(t_f)} \left(\dot{\lambda}(t) + \frac{\partial H}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j} \times \frac{1}{1-\dot{k}_j(t+k_j(t))}\right]\right)\delta x_j\, dt \right.\\
&\quad \left. + \int_{t_f - k_j(t_f)}^{t_f} \left(\dot{\lambda}(t) + \frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\delta x_j\, dt\right\}.
\end{aligned} \tag{۲۰.۳}$$

برای بررسی تغییرات $\delta u^{[r]}$، در (۱۳.۳)، به‌طور مشابه با اعمال تغییر متغیر $s_i = t - r_i(t)$ در رابطه زیر:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_{r_i}}(\delta u^{[r]})_i dt = \int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_i(t-r_i(t))}\Big(\delta u_i(t-r_i(t))\Big)dt,$$

داریم:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_{r_i}}(\delta u^{[r]})_i dt = \int_{t_\circ - r_i(t_\circ)}^{t_f - r_i(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial (u^{[r]})_i} \times \frac{1}{1-\dot{r}_i(t+r_i(t))}\right]\delta u_i dt. \tag{۲۱.۳}$$

دقت کنید که برای هر $t \le t_\circ$، $\delta u_i = \circ$ و همچنین با توجه به این‌که $u(t) = \psi(t)$ برای هر $t < t_\circ$ و معین بودن ψ، تغییرات آن برابر صفر است. بنابراین از رابطه (۲۱.۳)، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_{r_i}} \left(\delta u^{[r]}\right)_i dt = \int_{t_\circ}^{t_f - r_i(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial (u^{[r]})_i} \times \frac{۱}{۱ - \dot{r}_i(t + r_i(t))}\right] \delta u_i dt. \qquad (۲۲.۳)$$

از طرفی

$$\int_{t_\circ}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta u_i dt = \int_{t_\circ}^{t_f - r_i(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial u_i}\right] \delta u_i dt + \int_{t_f - r_i(t_f)}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial u_i}\right] \delta u_i dt. \qquad (۲۳.۳)$$

پس از (۱۳.۳) و (۲۲.۳) و (۲۳.۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\int_{t_\circ}^{t_f} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{\partial H}{\partial u^{[r]}} \delta u^{[r]}\right) dt = \\ &\sum_{i=۱}^{m} \left\{ \int_{t_\circ}^{t_f - r_i(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial u_i} + \left(\frac{\partial H}{\partial (u^{[r]})_i} \times \frac{۱}{۱ - \dot{r}_i(t + r_i(t))}\right)\right] \delta u_i dt + \int_{t_f - r_i(t_f)}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta u_i dt \right\}. \end{aligned} \qquad (۲۴.۳)$$

با جایگذاری روابط (۲۰.۳) و (۲۴.۳) در رابطه (۱۳.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} \delta J_a(u) = &\left(- \lambda(t_f) + \frac{\partial S(x(t_f), t_f)}{\partial x}\right)^T \delta x_f + \int_{t_\circ}^{t_f} \left(\dot{x}(t) - \frac{\partial H}{\partial \lambda}\right) \delta \lambda(t) dt \\ &+ \sum_{j=۱}^{n} \left\{ \int_{t_\circ}^{t_f - k_j(t_f)} \left(\dot{\lambda}(t) + \frac{\partial H}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial H}{\partial (x^{[k]})_j} \times \frac{۱}{۱ - \dot{k}_j(t + k_j(t))}\right]\right) \delta x_j dt \right. \\ &\left. + \int_{t_f - k_j(t_f)}^{t_f} \left(\dot{\lambda}(t) + \frac{\partial H}{\partial x_j}\right) \delta x_j dt \right\} \\ &+ \sum_{i=۱}^{m} \left\{ \int_{t_\circ}^{t_f - r_i(t_f)} \left[\frac{\partial H}{\partial u_i} + \left(\frac{\partial H}{\partial (u^{[r]})_i} \times \frac{۱}{۱ - \dot{r}_i(t + r_i(t))}\right)\right] \delta u_i dt \right. \\ &\left. + \int_{t_f - r_i(t_f)}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u_i} \delta u_i dt \right\}. \end{aligned} \qquad (۲۵.۳)$$

اکنون با توجه به شرایط لازم بهینگی که در قضیه ۵.۳ شرح داده شد، شرط لازم برای آن‌که کنترل $u^* \in U$، یک جواب بهینه برای تابعک J_a باشد، آن است که $\delta J_a(u^*) = \circ$. بنابراین ابتدا ضرایب $\delta \lambda(t)$ در (۲۵.۳) را برابر صفر قرار می‌دهیم. با توجه به شرایط مرزی مسأله داریم:

۱) معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \dfrac{\partial H(x^*(t), x_k^*(t), u^*(t), u_r^*(t), \lambda^*, t)}{\partial \lambda}, \\ x^*(t) = \phi(t), \quad -\alpha \le t \le t_\circ. \end{cases} \qquad (۲۶.۳)$$

برای تعیین ضرایب لاگرانژ $\lambda(t)$، باید ضرایب $\delta x(t)$ را برابر صفر قرار دهیم. بدین ترتیب معادلات الحاقی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۲) معادلات الحاقی(هم حالت):

$$(-۱)\frac{d\lambda^*}{dt} = \begin{cases} \sum_{j=۱}^{n} \left(\dfrac{\partial H^*}{\partial x_j} + \left[\dfrac{\partial H^*}{\partial (x^{[k]})_j} \times \dfrac{۱}{۱ - \dot{k}_j(t + k_j(t))}\right]\right) & if \;\; t \in [t_\circ, t_f - k_j(t_f)], \\ \sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial H^*}{\partial x_j} & if \;\; t \in [t_f - k_j(t_f), t_f], \end{cases}$$

$$\lambda(t_f) = \left[\frac{\partial S(x(t), t)}{\partial x}\right]_{t = t_f}. \qquad (۲۷.۳)$$

در نهایت با صفر قرار دادن ضرایب $\delta u(t)$ در (۲۵.۳) و شرایط مرزی مسأله، داریم:

۳) معادله کنترل :
(۲۸.۳)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial H^*}{\partial u_i} + \left[\frac{\partial H^*}{\partial (u^{[r]})_i} \times \frac{1}{1 - \dot{r}_i(t + r_i(t))} \right] \right) = 0 & if \;\; t \in [t_0, t_f - r_i(t_f)], \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H^*}{\partial u_i} = 0 & if \;\; t \in [t_f - r_i(t_f), t_f], \\ u^*(t) = \psi(t), & -\beta \le t \le t_0. \end{cases}$$

مجموعه معادلات (۲۶.۳)، (۲۷.۳) و (۲۸.۳) شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه تاخیری (۱.۲) - (۴.۲) می‌باشند.

۴ نتایج عددی

در این بخش، با توجه به نتایج به‌دست آمده در قسمت قبل، دو مثال را بررسی و حل می‌کنیم. شایان ذکر است که برای حل معادلات دیفرانسیل تحت تأثیر تأخیر در هر دو مثال، از روش‌های عددی استفاده شده است.

مثال ۱.۴. در این مثال، سیستمی از معادلات دیفرانسیل تحت تأثیر تأخیرهای وابسته به زمان در متغیرهای حالت و کنترل به‌صورت:

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t - k(t)) + u(t - r(t)), \quad 0 \le t \le 2, \tag{۱.۴}$$

با شرایط:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1, & t &= 0, \\ u(t) &= 1.4t - 2.8, & -\frac{1}{3} &\le t \le 0, \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

را بررسی می‌کنیم که در آن $k(t) = \dfrac{t}{1+t}$ و $r(t) = \dfrac{1}{3-t}$ توابع تاخیر در متغیرهای حالت و کنترل هستند. هدف مسأله کمینه کردن تابعک هدف J به‌صورت زیر است:

$$\min \quad J = \int_0^2 \Big(x^2(t) + u^2(t) \Big) dt, \tag{۳.۴}$$

ابتدا تابع همیلتونی را برای این مسأله به‌صورت زیر می‌نویسیم:

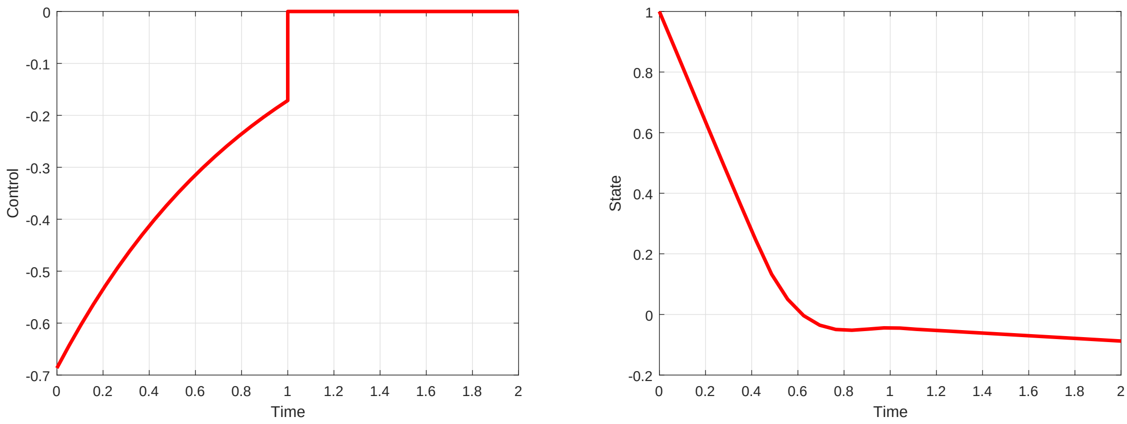
$$H = x^2(t) + u^2(t) + \lambda(t) \Big(x(t - k(t)) + u(t - r(t)) \Big), \tag{۴.۴}$$

با توجه به معادله (۲۶.۳) و شرایط اولیه مسأله، معادله حالت به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t - k(t)) + u(t - r(t)), \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

معادلات الحاقی را با استفاده از معادلات (۲۷.۳) می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} -\frac{d\lambda}{dt} = 2x(t) + \lambda(t) \left(\frac{(t+1)^2}{(t+1)^2 - 1} \right), & 0 \le t \le \frac{4}{3} \\ -\frac{d\lambda}{dt} = 2x(t), & \frac{4}{3} \le t \le 2 \\ \lambda(2) = 0, \end{cases}$$



شکل ۱: نتایج به‌دست آمده برای حالت بهینه $x(t)$ و کنترل بهینه $u(t)$ در مثال ۱.۴

با توجه به معادلات (۲۸.۳)، برای $t \in [۰, ۱]$ معادله کنترل، به‌صورت $۲u(t) + \lambda(t)\left(\frac{(t-۳)^۲}{(t-۳)^۲-۱}\right) = ۰$ تعیین می‌شود و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u(t) = -\frac{۱}{۲}\lambda(t)\left(\frac{(t-۳)^۲}{(t-۳)^۲-۱}\right) \tag{۵.۴}$$

و برای $t \in [۱, ۲]$، $u(t) = ۰$ به‌دست می‌آید. توجه داریم که تابع $t - k(t)$ برای $t > ۰$ و تابع $t - r(t)$ برای $t > ۰/۴۵$ دارای مقادیر مثبت هستند، لذا با توجه به شرایط اولیه مسأله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-k(t)) + ۱/۴t - ۲/۸, & ۰ \leq t \leq ۰/۴۵ \\ x(۰) = ۱, \end{cases}$$

همچنین برای $۰/۴۵ \leq t \leq ۱$ معادله حالت به‌صورت $\dot{x}(t) = x(t-k(t)) + u(t-r(t))$ است که در آن $u(t-r(t))$ از رابطه (۵.۴) جایگذاری می‌شود و در نهایت برای $۱ \leq t \leq ۲$ چون $u(t) = ۰$ بنابراین $\dot{x}(t) = x(t-k(t))$ به‌دست می‌آید. نتایج حاصل از حل معادله حالت و همچنین کنترل بهینه، در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به جواب‌های بهینه کنترل و حالت، مقدار بهینه تابعک هدف $J = ۰/۴۱۴۷$ به‌دست می‌آید.

مثال **۲.۴**. مسأله کنترل بهینه تأخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \quad J = \frac{۱}{۲}\left(x_۱^۲(۲) + x_۲^۲(۲)\right) + \frac{۱}{۲}\int_۰^۲ u^۲(t)dt, \tag{۶.۴}$$

مقید به دستگاه دینامیکی

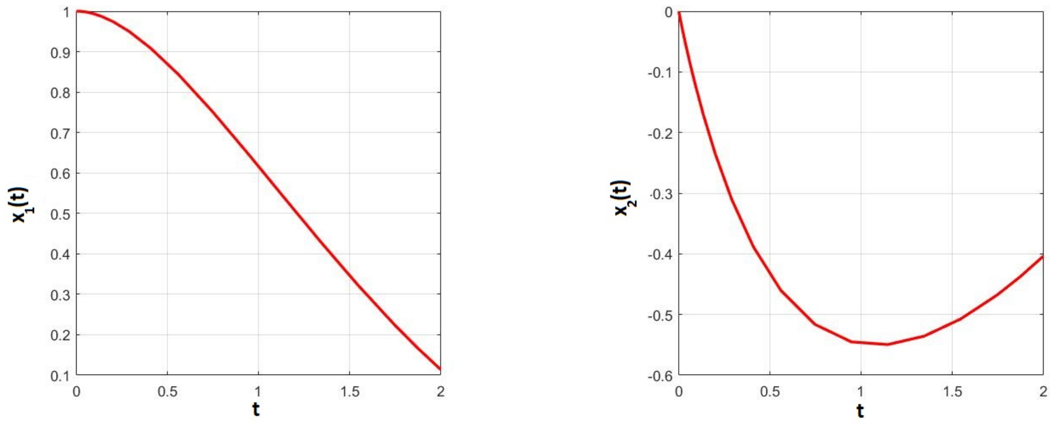
$$\begin{cases} \dot{x}_۱(t) = x_۲(t), & ۰ \leq t \leq ۲ \\ \dot{x}_۲(t) = -x_۲(t) - x_۱(t-k(t)) + u(t), & ۰ \leq t \leq ۲ \end{cases} \tag{۷.۴}$$

با شرایط اولیه

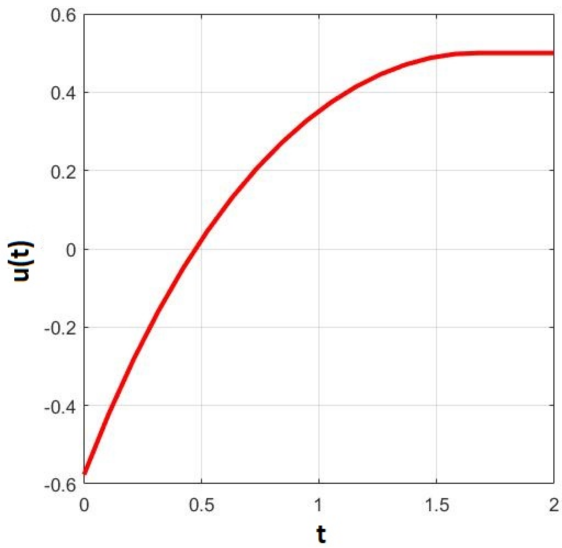
$$\begin{cases} x_۱(t) = ۱, & -۱ \leq t \leq ۰ \\ x_۲(۰) = ۰ \end{cases} \tag{۸.۴}$$

که در آن $k(t) = \frac{t}{۱۸-۶t}$ است. برای حل این مسأله، تابع همیلتونی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H = \frac{۱}{۲}u^۲(t) + \lambda_۱(t)x_۲(t) + \lambda_۲(t)\Big(-x_۲(t) - x_۱(t-k(t)) + u(t)\Big), \tag{۹.۴}$$



شکل ۲: نتایج به‌دست آمده برای حالت بهینه $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ در مثال ۲.۴



شکل ۳: کنترل بهینه $u(t)$ در مثال ۲.۴

با توجه به معادلات (۲۸.۳)، برای $t \in [۰, ۲]$ معادله کنترل به‌صورت $u(t) + \lambda_۲(t) = ۰$ به‌دست می‌آید. همچنین با استفاده از معادلات (۲۷.۳)، معادلات الحاقی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_۱(t) = \lambda_۲(t)\left(\dfrac{۲(۳-t)^۲}{۲(۳-t)^۲-۱}\right), & ۰ \le t \le \dfrac{۵}{۳} \\ \dot{\lambda}_۱(t) = ۰, & \dfrac{۵}{۳} \le t \le ۲ \\ \dot{\lambda}_۲(t) = -\lambda_۲(t), & ۰ \le t \le ۲ \\ \lambda_۱(۲) = x_۱(۲), & \\ \lambda_۲(۲) = x_۲(۲). & \end{cases}$$

پس از حل معادلات فوق و معادلات حالت (۷.۴)، نتایج حاصل برای حالت بهینه در شکل ۲ و برای کنترل بهینه در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین مقدار کمینه تابعک J برابر ۰٫۲۳۳۸ به‌دست آمده است. این مسأله توسط بنکس و بورن برای تأخیر ثابت $k(t) = ۱$، حل شده است [۳].

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله شرایط لازم بهینگی برای مسأله کنترل بهینه غیرخطی با تأخیرهای متغیر– زمانی مورد بررسی قرار گرفت. در اثبات شرایط لازم بهینگی، از تغییر متغیرِ مناسب برای بررسی تغییراتِ متغیرهای تأخیری کنترل و حالت، استفاده شد. با استفاده از این شرایط، مثال‌هایی را حل کرده و نتایج عددی آن‌ها را ارائه کردیم.
اهمیت مسأله مورد بررسی در این مقاله، آن است که هر دو متغیر کنترل و حالت، تحت تأثیر تأخیرهای وابسته به زمان می‌باشند. هم‌چنین تأخیرها در شاخص عمل‌کرد نیز اعمال شده‌اند. نکته دیگری که در این مسأله اهمیت دارد آن است که تأخیرهای اِعمال شده در متغیرهای کنترل و حالت، علاوه بر آن که با زمان تغییر می‌کنند و توابعی وابسته به زمان می‌باشند، از مؤلفه‌ای به مؤلفه دیگر در بردارهای کنترل و حالت تغییر کرده و این باعث پیچیدگی مسأله مطرح شده در این مقاله می‌شود. به همین دلیل بیان و اثبات این شرایط، بسیار مهم است و برای حل مسأله و به‌دست آوردن جواب بهینه آن، بررسی می‌شوند.

پانوشت‌ها

[1] Gateaux derivative
[2] Riesz representation theorem
[3] Weierstrass theorem

فهرست منابع

[1] Angell T. S. and Kirsch A., *On the necessary conditions for optimal control of retarded systems,* Applied Mathematics and Optimization, 22, (1990), 117–145.

[2] Banks H. T., *Necessary condition for control problems with variable time lags,* SIAM Journal on Control, 8 (1), (1968), 9–47.

[3] Banks H. T. and Burns J. A., *Hereditary control problem: Numerical methods based on averaging approximations,* SIAM Journal on Control and Optimization, 16 (2), (1978), 169–208.

[4] Betts J. T, Campbell S. L. and Thompson K. C., *Solving optimal control problems with control delays using direct transcription,* Applied Numerical Mathematics, 108, (2016), 185-203.

[5] Friesz T. L., *Dynamic Optimization and Differential Games,* Springer: New York, 2010.

[6] Gollmann L, Kern D. and Maurer H., *Optimal control problems with delays in state and control variables subject to mixed control-state constraints,* Optim. Control Appl. Meth, 30 (4), (2009), 341–365.

[7] Gollmann L. and Maurer H., *Theory and applications of optimal control problems with multiple time-delays,* Journal of Industrial & Management Optimization, 10 (2), (2014), 413-441.

[8] Halanay A., *Optimal controls for systems with time lag,* SIAM Journal on Control, 6, (1968), 215–234.

[9] Hoseini S. M. and Marzban H. R., *Costate Computation by an Adaptive Pseudospectral Method for Solving Optimal control problems with piecewise constant Time Lag,* Journal of Optim Theory Appl, 170 (3), (2016), 735–755.

[10] Jajarmi A. and Hajipour M., *An efficient finite difference method for the time-delay optimal control problems with time-varying delay,* Asian Journal of Control, 19 (2), (2017), 554–563.

[11] Jajarmi A., Hajipour M. and Baleanu D., *A new approach for the optimal control of time-varying delay systems with external persistent matched disturbances,* Journal of Vibration and Control, 24 (19), (2018), 4505–4512.

[12] Kharatishvili GL, *Maximum Principle in the theory of Optimal time-delay Processes,*, Doklady Akademii Nauk, USSR, 136 (1), (1961), 39-42.

[13] Liu C., Loxton R., Teo K. L. and Wang S., *Optimal state-delay control in nonlinear dynamic systems,* Automatica, 135, (2022), 109981.

[14] Liu C., Gong Z., Teo K. L. and Wang S., *Optimal control of nonlinear fractional-order systems with multiple time-varying delays*, Journal of Optimization Theory and Applications, 193 (1), (2022), 856-876.

[15] Mirhosseini-Alizamini S. M., Effati S. and Heydari A., *An iterative method for suboptimal control of linear time-delayed systems,* Systems and Control Letters, 82, (2015), 40–50.

[16] Marzban H. R. and Hoseini S. M., *Optimal control of linear multi-delay systems with piecewise constant delays,* IMA Journal of Mathematical Control and Information, 00, (2016), 1–30.

[17] Marzban H. R., Pirmoradian H., *A direct approach for the solution of nonlinear optimal control problems with multiple delays subject to mixed state-control constraints,* Applied Mathematical Modelling, 53, (2018), 189-213.

[18] Rakhshan S. A. and Effati S., *Fractional optimal control problems with time- varying delay: A new delay fractinal Euler-Lagrange equations,* Science Direct Journal of the Franklin Institute, 357 (10), (2020): 5954-5988.

[19] Soliman M. A. and Ray W. H., On the optimal control of systems having pure time delay and singular arcs, International Journal of Control, 16 (5),(1972): .963-976

[20] Wu D. and Bai Y., *Time- scaling transformation for optimal control problem with time- varying delay,* Discrete and continuous dynamical systems series s, 13 (6), (2020), 1683–1695.

Necessary Optimality Conditions for Optimal Control Problems with Time-Varying Delays

Seyed Mojtaba Meshkani[1], **Sohrab Effati**[2] †, **Aghileh Heydari**[1]

(1) Department of Mathematics, Payame Noor University, 19395-4697, Tehran, Iran
(2) Department of Applied Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
(2) Center of Excellence on Soft Computing and Intelligent Information Processing, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Communicated by: Ali Reza Fakharzadeh Jahromi

Received: 2023/4/11 Accepted: 2023/8/28

Abstract: In this paper, necessary optimality conditions for a class of optimal control problems containing time-varying delays in control and state variables are discussed. There is an important aspect of these problems in that time-varying delays are applied to both state and control variables. Also, the cost functional of problems is influenced by the time-varying delays in state and control. We prove necessary optimality conditions in this study. A key aspect of the proof is calculating the variations of control and state variables when there are time-dependent delays. we make use of appropriate changing variables to derive these variations. In order to illustrate the use of these conditions, several examples are solved and numerical results are presented. At the end, some conclusions are drawn.

Keywords: Optimal control problems, Time delay systems, Necessary optimality conditions, Nonlinear systems, Time-varying delay.

†Corresponding author.
E-mail addresses: meshkani.m@pnurazavi.ac.ir (S. M. Meshkani), s-effati@um.ac.ir (S. Effati), a_heidari@pnu.ac.ir (A. Heydari).