مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، ص ۳۴۳-۳۳۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2023.43878.2173

ویژگی‌های سایه‌ای و پایداری توپولوژیکی عمل نیم‌گروه‌ها در فضاهای متریک غیرفشرده

زهرا شعبانی سیاهکلده، (۱) [۱] علی برزنونی (۲)

(۱) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دبیر مسئول: فاطمه هلن قانع

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۷/۷

چکیده: در این مقاله، مفاهیم ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای ضعیف و انبساطی بودن برای عمل نیم‌گروه‌های متناهی تولیدشده در فضای متریک غیرفشرده معرفی می‌شود که ویژگی‌های دینامیکی‌اند و با تعریف آن‌ها در فضای متریک فشرده معادل می‌باشند. هم‌چنین، مفهوم پایداری توپولوژیکی برای عمل‌های متناظر با نیم‌گروه‌های آبلی متناهی تولیدشده تعریف می‌گردد و شرط لازم و کافی برای پایداری توپولوژیکی نیم‌گروه‌های آبلی متناهی تولیدشده در فضاهای متریک موضعاً فشرده ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: عمل نیم‌گروه‌ها، ویژگی سایه‌ای، انبساطی، پایداری توپولوژیکی.

رده‌بندی ریاضی: 37B65; 37C20

۱ مقدمه

مدل‌سازی ریاضی به‌عنوان یک ابزار قوی در علوم ریاضی و مهندسی، در حل مسایل پیچیده و تصمیم‌گیری‌های کاربردی به صورت کمّی به کار می‌رود. بسیاری از مدل‌های ریاضی را می‌توان توسط معادلات دیفرانسیل توصیف کرد. در کاربرد معادلات دیفرانسیل در علوم مهندسی، فیزیک، زیست‌شناسی و...، برای تجزیه و تحلیل ویژگی‌های کیفی این پدیده‌ها می‌توان از حل دقیق معادلات دیفرانسیل نظیر استفاده کرد و یکی از اصلی‌ترین نگرانی‌های محققین این عرصه، حل دقیق این معادلات می‌باشد. به‌طور کلی حل دقیق معادلاتی که پدیده‌های طبیعی را توصیف می‌کنند، دشوار و اغلب غیرممکن است و حتی زمانی که راه حل‌های دقیقی پیدا شوند، استخراج ویژگی‌های کیفی پدیده مورد نظر، کار آسانی نیست. در پایان قرن نوزدهم، پوانکاره روش جدیدی را برای درک رفتار طولانی مدت منحنی‌های جواب معادلات دیفرانسیل معمولی بدون نیاز به حل دقیق این معادلات پیدا کرد. در واقع پوانکاره به هر معادله دیفرانسیل معمولی نگاشتی نظیر کرد که سیستم دینامیکی نامیده می‌شود. بنابراین بسیاری از مدل‌های ریاضی را می‌توان توسط سیستم دینامیکی توصیف کرد و از ابزارهای سیستم‌های دینامیکی برای مطالعه

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(A.barzanouni) A.barzanouni@hsu.ac.ir, (Z. Shabani) zshabani@math.usb.ac.ir

این مدل‌ها، استفاده کرد. مفهوم ساختاراً پایدار، از مفاهیم مهم در سیستم‌های دینامیکی، نقشی تاثیرگذار در مدل‌های ریاضی دارند. پایداری ساختاری یک مدل ریاضی، معیار ضروری برای ارزیابی درستی آن می‌باشد. در واقع اگر سیستم دینامیکی ساختاراً پایدار نباشد، آن‌گاه خطاهای کوچک و تغییرات اعمال شده در مدل، شانس تغییرات در ساختار جواب را به‌طور چشمگیر افزایش می‌دهد و این یعنی این‌که راه حل ارائه شده اساساً اشتباه یا ناپایدار است. برای کاربرد مفهوم ساختاراً پایدار در مدل‌های آب و هواشناسی [۱۰، ۱۹] را ببینید. یکی دیگر از ابزارهای مهم سیستم‌های دینامیکی مفهوم سایه‌زنی است. نظریه سایه‌زنی علاوه بر نقش مهمی که در نظریه پایداری ساختاری ایفا می‌کند به‌عنوان ابزاری توانمند در روش‌های عددی برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل می‌باشد. به‌عنوان مثال در مدل‌های آب و هواشناسی، به کمک این ابزار می‌توان به این سوال پاسخ داد که برای چه مدت، مدار یک پیش‌بینی (که از آن به‌عنوان شبه‌مدار سیستم یاد می‌کنیم) نزدیک مدار واقعی خواهد بود؟

در [۱۵]، ثابت شده است که در یک مجموعه‌ی هذلولوی، هر شبه‌مدار سیستم در سایه مدار عضوی از فضای حالت سیستم قرار خواهد گرفت. همه‌ی سیستم‌های به‌قدر کافی نزدیک به یک سیستم ساختاراً پایدار دارای ویژگی سایه‌ای خواهند بود اما سیستم‌هایی با ویژگی سایه‌ای وجود دارند که ساختاراً پایدار نمی‌باشند و این سیستم‌ها انبساطی نیستند. در سال‌های اخیر، تعریف‌های جدید بسیاری از ویژگی سایه‌ای برای سیستم‌های دینامیکی کلاسیک ارائه شده است، مانند ویژگی سایه‌ای ارگودیک [۹]، ویژگی $\underline{d}$-سایه‌ای [۸]، ویژگی سایه‌ای ضعیف [۱]. بنابر قضیه پایداری والتر، در سیستم‌های دینامیکی انبساطی، مفاهیم سایه‌ای و پایداری توپولوژیکی معادلند [۱۵]. برهان استفاده شده در این قضیه نشان می‌دهد که اگر فضای حالت X منیفلدهای فشرده با بعد بزرگتر از دو باشد، آن‌گاه می‌توان ویژگی سایه‌ای را با ویژگی سایه‌ای ضعیف جایگزین کرد.

اخیراً، بسیاری ازکارهای تحقیقاتی به کاربردهای عمل گروه‌ها اختصاص داده شده است. برخی از محققین مفاهیم سایه‌زنی و پایداری را از نگاشت‌های پیوسته به عمل گروه‌ها توسیع داده و روابط بین انواع مختلف ویژگی‌های سایه‌ای و پایداری را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۵، ۷، ۱۴]. در [۶]، ویژگی سایه‌ای عمل گروه‌ها از دیدگاه نظریه اندازه مطالعه می‌شود و ثابت می‌شود که اگر هر اندازه‌ی بورلی غیراتمی با ویژگی سایه‌ای سازگار باشد، آن‌گاه سیستم دینامیکی متناظر با عمل گروه متناهی تولیدشده دارای ویژگی سایه‌ای خواهد بود. هم‌چنین در این مقاله، قضیه پایداری والتر برای عمل گروه‌های پیوسته در فضای متریک موضعاً فشرده توسیع داده می‌شود.

عمل‌های پیوسته متناظر با نیم‌گروه‌های متناهی تولیدشده، سیستم‌های تکرار تابع نامیده می‌شوند. از سیستم‌های تکرار تابع به‌طور گسترده برای ساخت فرکتال‌ها [۴]، فشرده‌سازی تصویر و پردازش تصویر [۳]، رمزنگاری و امنیت شبکه [۱۲] استفاده می‌شود. رودریگز و ورنداس [۱۶]، مفهوم ویژگی مشخصه را برای عمل نیم‌گروه‌ها معرفی کردند. در [۲]، ویژگی سایه‌ای متوسط برای عمل نیم‌گروه‌ها معرفی گردید. فاتحی نیا [۱۳]، ویژگی سایه‌ای متوسط مجانبی را از نگاشت‌های پیوسته به عمل نیم‌گروه‌ها گسترش داد. ویژگی سایه‌ای ارگودیک برای عمل نیم‌گروه‌ها در [۱۷] تعریف شد.

همان‌طور که می‌دانیم برخی ویژگی‌های دینامیکی (یعنی ویژگی‌هایی که تحت مزدوجی پایا می‌باشند) برای همسان‌ریختی‌ها و هم‌چنین عمل نیم‌گروه‌ها در فضاهای متریک فشرده، ممکن است در فضاهای متریک غیرفشرده ویژگی‌های دینامیکی نباشند. به‌عنوان مثال، یک همسان‌ریختی(یا یک نیم‌گروه متناهی تولیدشده) ممکن است نسبت به یک متریک انبساطی باشد ولی نسبت به متریک دیگری که همان توپولوژی را تولید می‌کند انبساطی نباشد([۱۱] مثال ۲.۲ و مثال ۳-۲ را ببینید). لی و نویسندگان در [۱۱]، ویژگی سایه‌ای را برای همسان‌ریختی‌ها در فضای متریک غیرفشرده معرفی کردند که ویژگی دینامیکی است و با تعریف این مفهوم در فضای متریک فشرده معادل می‌باشد. در [۱۸] مفهوم ϵ-زنجیر برای عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک غیرفشرده معرفی گردید و نشان داده شد که این ویژگی مستقل از متریک تعریف شده روی فضا می‌باشد. در این مقاله، مفاهیم ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای ضعیف و انبساطی بودن برای عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک غیرفشرده معرفی می‌گردد و نشان داده می‌شود که این ویژگی‌ها تحت مزدوجی پایا هستند. به‌علاوه، مجموعه‌های بازگشتی عمل نیم‌گروه‌هایی که دارای ویژگی‌های سایه‌ای و سایه‌ای ضعیف می‌باشند بررسی می‌شود. در ادامه مفهوم پایداری توپولوژیکی برای عمل نیم‌گروه‌های متناهی تولیدشده در فضای متریک غیرفشرده تعریف می‌شود و ثابت می‌شود که برای عمل‌های پیوسته متناظر با نیم‌گروه‌های آبلی انبساطی با تعداد متناهی مولد در فضای متریک موضعاً فشرده، ویژگی سایه‌ای ضعیف با مفهوم پایداری توپولوژیکی منطبق می‌باشد.

این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، مفاهیم و مقدمات مورد نیاز در مقاله بیان می‌شوند و تعریف‌های برخی مجموعه‌های بازگشتی و ویژگی‌های سایه‌ای و سایه‌ای ضعیف برای عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک فشرده که در [۱۸] معرفی شده‌اند، یادآوری می‌گردند. در بخش ۳، ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای ضعیف و انبساطی بودن برای عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک غیرفشرده تعریف می‌شوند که ویژگی‌هایی دینامیکی هستند(یعنی مستقل از متریک روی فضا می‌باشند) و مجموعه‌های بازگشتی عمل نیم‌گروه‌هایی که دارای ویژگی‌های سایه‌ای‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۴، مفهوم پایداری توپولوژیکی برای عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک غیرفشرده معرفی می‌شود که ویژگی سایه‌ای ضعیف را نتیجه می‌دهد و برای نیم‌گروه‌های آبلی انبساطی در فضای متریک موضعاً فشرده، با ویژگی سایه‌ای ضعیف منطبق می‌باشد.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید $(G, \circ)$ یک نیم‌گروه متناهی تولیدشده باشد که توسط مجموعه متناهی از مولدهای $G_1 = \{id, g_1, \dots, g_n\}$ تولید شده است، در این صورت می‌توانیم بنویسیم $G = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} G_m$، که در آن $G_0 = id$ و

$$\overline{g} \in G_m \Longleftrightarrow \overline{g} = g_{i_m} \cdots g_{i_2} g_{i_1},\ m \geq 1,$$

که در آن $g_{i_j} \in G_1$ و برای سادگی در نمادگذاری از $g_i g_j$ به جای $g_i \circ g_j$ استفاده شده است. در واقع، G_m شامل اعضایی از نیم‌گروه G است که از الحاق حداکثر m عضو از G_1 حاصل شده است. یک روش تفسیر این مطلب، استفاده از نگاشت راه‌نامه

$$\begin{array}{cccc} \tau: & F_n & \to & G \\ & \underline{j} = j_p \cdots j_1 & \mapsto & \overline{g}_{\underline{j}} = g_{j_p} \cdots g_{j_1} \end{array}$$

می‌باشد که در آن F_n یک نیم‌گروه آزاد با n مولد است، و الحاق روی G به‌عنوان تصویرهای مسیرهای روی F_n تحت نگاشت τ در نظر گرفته می‌شود. گوییم نیم‌گروه G یک عمل $\Psi : G \times X \to X$ روی X القا می‌کند هرگاه برای هر $\underline{g}, \underline{h} \in G$ و هر $x \in X$، داشته باشیم $\Psi(\underline{g}\underline{h}, X) = \Psi(\underline{g}, \Psi(\underline{h}, x))$. عمل Ψ را پیوسته نامیم هرگاه برای هر $\underline{g} \in G$ نگاشت $\underline{g} : X \to X$ پیوسته باشد.

فضای Σ_n را فضای دنباله‌های دوطرفه نامتناهی از n نماد $\{1, \dots, n\}$ در نظر بگیرید، یعنی $\Sigma_n = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$. از دینامیک نمادین برای نمایش اعضای نیم‌گروه G استفاده می‌شود: برای هر دنباله $\omega = \cdots \omega_{-2}\omega_{-1}\omega_0\omega_1\omega_2 \cdots \in \Sigma_n$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$، قرار دهید:

$$g_\omega^0 := id, \quad g_\omega^m(x) := g_{\omega_{m-1}} \circ \cdots \circ g_{\omega_0}(x), \quad g_\omega^{-m}(x) := g^{-1}_{\omega_{-m}} \circ \cdots \circ g^{-1}_{\omega_{-1}}(x).$$

فرض کنید Γ_n مجموعه همه کلمات متناهی از نمادهای $\{1, \dots, n\}$ باشد، یعنی، $\Gamma_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{1, \dots, n\}^m$. برای هر $w = w_1 \cdots w_n \in \Gamma_n$، قرار دهید $g_w^0 = id$ و برای هر $i = 1, \dots, n$، $g_w^i := g_{w_i} \circ \cdots \circ g_{w_1}$.

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد و $\mathbb{H}(X)$ گردایه تمام همسان‌ریختی‌ها روی فضای X با C^0-متریک زیر باشد،

$$d_0(f, g) = \max_{x\in X} d(f(x), g(x)) + \max_{x\in X} d(f^{-1}(x), g^{-1}(x)).$$

گردایه‌ی تمام نیم‌گروه‌هایی مانند G در X با مجموعه‌ی متناهی از مولدهای $G_1 = \{id, g_1, g_2, \dots, g_n\}$، که در آن برای هر $i = 1, \dots, n$، $g_i \in \mathbb{H}(X)$، را با نماد $\mathbb{H}_n(X)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $F, G \in \mathbb{H}_n(X)$ به ترتیب دو نیم‌گروه با مجموعه مولدهای $F_1 = \{id, f_1, \dots, f_n\}$ و $G_1 = \{id, g_1, \dots, g_n\}$ باشند. C^0-متریک روی $\mathbb{H}_n(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_0(F, G) = \max_{1\leq i\leq n} d_0(f_i, g_i).$$

همچنین گوییم $G \in \mathbb{H}_n(X)$، ϵ-نزدیک به $F \in \mathbb{H}_n(X)$ است هرگاه $D_0(F, G) < \epsilon$.

برای $G \in \mathbb{H}_n(X)$، $w = w_1 \cdots w_n \in \Gamma_n$ و $\epsilon > 0$، یک (ϵ, w)-زنجیر نیم‌گروه G از x به y، دنباله متناهی $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y\}$ می‌باشد که برای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$، $d(g_{w_i}(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$.

تعریف ۱.۲ ([۱۸]). فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد و $G \in \mathbb{H}_n(X)$ یک نیم‌گروه با مجموعه متناهی از مولدهای $G_1 = \{id, g_1, \dots, g_n\}$ باشد. یک نقطه $x \in X$،

۱. یک نقطه تناوبی از نیم‌گروه G است، اگر کلمه متناهی $w \in \Gamma_n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g_w(x) = x$. مجموعه نقاط تناوبی نیم‌گروه G را با نماد $Per(G)$ نشان می‌دهیم.

۲. یک نقطه تناوبی ضعیف از نیم‌گروه G است، اگر برای هر $\epsilon > 0$، نیم‌گروه $F \in \mathbb{H}_n(x)$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که $D_0(F, G) < \epsilon$ و $x \in Per(F)$. مجموعه نقاط تناوبی ضعیف نیم‌گروه G را با نماد $Per_w(G)$ نشان می‌دهیم.

۳. یک نقطه زنجیری بازگشتی از نیم‌گروه G است، اگر برای هر $\epsilon > 0$، یک ϵ-زنجیر در نیم‌گروه G از x به خودش وجود داشته باشد. مجموعه نقاط زنجیری بازگشتی نیم‌گروه G را با نماد $CR(G)$ نشان می‌دهیم.

۴. یک نقطه ناسرگردان از نیم‌گروه G است، هرگاه برای هر همسایگی U از x، عددی مانند $\ell \in \mathbb{N}$ و $\omega \in \Sigma_n$ موجود باشد به‌طوری‌که $g_\omega^\ell(x) \in U$. مجموعه نقاط ناسرگردان نیم‌گروه G را با نماد $\Omega(G)$ نشان می‌دهیم.

۵. یک نقطه ناسرگردان ضعیف از نیم‌گروه G است، اگر برای هر $\epsilon > ۰$، نیم‌گروه $F \in \mathbb{H}_n(x)$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که $D_۰(F, G) < \epsilon$ و $x \in \Omega(F)$. مجموعه نقاط ناسرگردان ضعیف نیم‌گروه G را با نماد $\Omega_w(G)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه **۲.۲.** از تعریف ۱.۲ واضح است که $Per(G) \subset Per_w(G)$، $\Omega(G) \subset \Omega_w(G)$، $Per(G) \subset \Omega(G)$ و $Per_w(G) \subset \Omega_w(G)$. برای دیدن برخی دیگر از ویژگی‌های پایه‌ای مجموعه‌های بازگشتی تعریف ۱.۲، به مرجع [۱۸] مراجعه کنید.

در ادامه این بخش به یادآوری ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای ضعیف و ویژگی انبساطی عمل نیم‌گروه‌ها در فضاهای متریک فشرده می‌پردازیم.

تعریف **۳.۲.** فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد، $G \in \mathbb{H}_n(X)$ و $\delta > ۰$ دلخواه باشد.

۱. [۲] دنباله $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ برای $\omega = (\ldots, \omega_{-۱}, \omega_۰, \omega_۱, \ldots) \in \Sigma_n$ یک (δ, ω)-شبه‌مدار از G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $d(g_{\omega_i}(x_i), x_{i+۱}) < \delta$.

۲. [۲] G دارای ویژگی سایه‌ای است اگر برای هر $\epsilon > ۰$، عددی مانند $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر (δ, ω)-شبه‌مدار $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ از G، توسط نقطه‌ای مانند $x \in X$، ϵ-سایه‌زنی شود، یعنی $d(g_\omega^i(x), x_i) < \epsilon$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$.

۳. [۱۸] G ویژگی سایه‌ای ضعیف دارد اگر برای هر $\epsilon > ۰$، عددی مانند $\delta(\epsilon) > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $F \in \mathbb{H}_n(X)$ که $D_۰(F, G) < \delta$، برای $x \in X$ و $\omega \in \Sigma_n$ عضوی مانند $y \in X$ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$d(g_\omega^i(y), f_\omega^i(x)) < \epsilon, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

۴. [۱۶] G انبساطی است هرگاه عددی مانند $\delta > ۰$ (که ثابت انبساطی نامیده می‌شود) وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر برای هر $\omega \in \Sigma_n$، شرط $d(g_\omega^i(x), g_\omega^i(y)) < \delta$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$ برقرار باشد، آن‌گاه $x = y$.

ملاحظه **۴.۲.** اگر $G \in \mathbb{H}_n(X)$ یک نیم‌گروه با مولدهای $G_۱ = \{id, g_۱, g_۲, \ldots, g_n\}$ باشد آن‌گاه ویژگی سایه‌ای نیم‌گروه G ویژگی سایه‌ای ضعیف را ایجاب می‌کند ولی برعکس آن درست نیست. به‌علاوه اگر G دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف باشد آن‌گاه هر نگاشت g_i، $i = ۱, \ldots, n$، دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف می‌باشد [۱۸].

۳ ویژگی‌های سایه‌ای، سایه‌ای ضعیف و انبساطی بودن عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک غیرفشرده

در این بخش مفاهیم ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای ضعیف و ویژگی انبساطی عمل نیم‌گروه‌ها در فضاهای متریک غیرفشرده تعریف می‌شوند که ویژگی‌های دینامیکی می‌باشند. فرض کنید G یک نیم‌گروه باشدکه توسط خانواده متناهی $G_۱ = \{id, g_۱, \ldots, g_n\}$ از همسان‌ریختی‌ها در فضای X تولید شده است. یک ویژگی P یک ویژگی دینامیکی نامیده می‌شود اگر یک نیم‌گروه G دارای ویژگی P باشد، آن‌گاه هر نیم‌گروه دیگری مانند F که مزدوج توپولوژیکی با G است نیز ویژگی P را داشته باشد. توجه کنید که ویژگی‌های سایه‌ای و سایه‌ای ضعیف و ویژگی انبساطی عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک فشرده، مستقل از متریک‌اند و ویژگی‌های دینامیکی می‌باشند. مثال زیرنشان می‌دهد ویژگی‌های سایه‌ای و سایه‌ای ضعیف در فضاهای متریک غیرفشرده ویژگی‌های دینامیکی نیستند.

مثال **۱.۳.** فرض کنید $\Lambda : \mathbb{R} \to S^۱ \setminus \{(۰, ۱)\}$ نگاشتی باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda(t) = (\frac{۲t}{۱ + t^۲}, \frac{t^۲ - ۱}{t^۲ + ۱})$$

قرار دهید $X = \lambda(\mathbb{Z})$. فرض کنید d متریکی روی X باشد که از متریک ریمانی روی $S^۱$ القا شده است و d' متریک گسسته روی X باشد. به‌وضوح d و d' توپولوژی یکسان روی X القا می‌کنند. فرض کنید $g_۱ : X \to X$ یک همسان‌ریختی باشد که به‌صورت $g_۱(a_i) = a_{i+۱}$ تعریف می‌شود. G را عمل نیم‌گروه تولیدشده توسط $\{id, g_۱, g_۲\}$ در نظر بگیرید که در آن $g_۲$ یک همسان‌ریختی دلخواه روی X است. چون متریک d گسسته است، به‌سادگی می‌توان دید که G نسبت به متریک d ویژگی سایه‌ای دارد. نشان می‌دهیم G

نسبت به متریک d' ویژگی سایه‌ای ضعیف ندارد. به برهان خلف فرض کنید G نسبت به متریک d' دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف باشد. دراین صورت بنابر ملاحظه ۴.۲، نگاشت $g_1 : X \to X$ دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف می‌باشد. برای $\epsilon = 1/2$، فرض کنید $\delta > 0$ عددی باشد که از تعریف ویژگی سایه‌ای ضعیف نگاشت g_1 به‌دست آمده است. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ به‌گونه‌ای باشد که $d'(a_k, a_{-k}) < \delta/2$. همسان‌ریختی $f : X \to X$ با ضابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$f(a_i) = \begin{cases} a_{i+1}, & i \in \{-k, \dots, k-1\}, \\ a_k, & i = k, \\ a_i, & |i| > k. \end{cases}$$

چون برای هر $x \in X$، $d'(f(x), g_1(x)) < \delta$، بنابراین برای $z \in X$ عضوی مانند $y \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$d'(g^n(z), f^n(y)) < \epsilon. \tag{۱.۳}$$

از طرفی چون $X = \{g_1^n(z), n \in \mathbb{Z}\}$، عددی مانند $n \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به‌طوری‌که $d'(g^n(z), f^n(y)) \geq \epsilon$، که در تناقض با رابطه (۱.۳) می‌باشد. بنابراین G نسبت به متریک d دارای ویژگی سایه‌ای است ولی نسبت به متریک d' ویژگی سایه‌ای ضعیف ندارد.

در این مثال نشان می‌دهیم ویژگی انبساطی عمل نیم‌گروه‌ها در فضای متریک غیر فشرده به متریک تعریف‌شده روی فضا وابسته است.

مثال ۲.۳. فرض کنید g_1 و g_2 دو نگاشت در $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $g_1(x) = 2x$ و $g_2(x) = 3x$ باشند. نیم‌گروه G تولیدشده توسط $G_1 = \{id, g_1, g_2\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید d متریک اقلیدسی در $\mathbb{R}$ و d' متریک دیگری در $\mathbb{R}$ باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d'(x, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|.$$

به‌وضوح دو متریک d و d' توپولوژی یکسان در $\mathbb{R}$ تولید می‌کنند. به‌علاوه به‌سادگی دیده می‌شود که نیم‌گروه G نسبت به متریک d دارای ویژگی انبساطی است. نشان می‌دهیم نیم‌گروه G نسبت به متریک d' دارای ویژگی انبساطی نمی‌باشد. به برهان خلف، فرض کنید G انبساطی با ثابت انبساطی $\delta > 0$ باشد. قرار دهید $a = \tan(\pi/2 - \delta)$ و $x = \tan\delta$. فرض کنید $\omega \in \Sigma_n$ دلخواه باشد. در این صورت عددی مانند $N > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_\omega^N(x) > a$. چون نگاشت‌های g_1 و g_2 پیوسته‌اند وجود دارد $y \in \mathbb{R}$ به‌قسمی‌که $x < y$ و برای هر $0 \leq i \leq N$، $d'(g_\omega^i(x), g_\omega^i(y)) < \delta$ و $g_\omega^N(y) > a$. این مطلب نتیجه می‌دهد $d'(g_\omega^N(x), g_\omega^N(y)) < \delta$ و بنابراین برای هر $i \in \mathbb{Z}$ رابطه $d'(g_\omega^i(x), g_\omega^i(y)) < \delta$ برقرار می‌باشد. چون $\omega \in \Sigma_n$ دلخواه بود این مطلب متناقض با ویژگی انبساطی نیم‌گروه G نسبت به متریک d' است.

فرض کنید $\mathcal{C}(X)$ مجموعه همه توابع پیوسته از X به $(0, \infty)$ باشد.

لم ۳.۳. [۱۱، لم ۷.۲ و لم ۸.۲] فرض کنید (X, d) و (Y, ρ) دو فضای متریک باشند.

۱. یک نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(Y)$، وجود داشته باشد $\delta \in \mathcal{C}(X)$ به‌طوری‌که اگر $d(x, y) < \delta$ $(x, y \in X)$، آن‌گاه $d'(f(x), f(y)) < \epsilon(f(x))$.

۲. برای هر $\alpha \in \mathcal{C}(X)$، وجود دارد $\gamma \in \mathcal{C}(X)$ به‌طوری‌که

$$\gamma(X) \leq \inf\{\alpha(z) : z \in B(x, \gamma(x)\}. \tag{۲.۳}$$

ملاحظه ۴.۳. فرض کنید نامساوی (۲.۳) برقرار باشد. می‌توان نشان داد که نامساوی $d(x, y) < \gamma(x)$ نتیجه می‌دهد:

$$\gamma(X) \leq \inf\{\alpha(z) : z \in B(x, \gamma(x))\} \leq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}.$$

و با به‌کاربردن این مطلب به‌دست می‌آید که اگر $d(x, y) < \max\{\gamma(x), \gamma(y)\}$، آن‌گاه

$$d(x, y) = d(y, x) < \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}.$$

اکنون مفهوم جدیدی از ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای ضعیف و ویژگی انبساطی برای عمل نیم‌گروه‌های متناهی تولیدشده در فضای متریک غیرفشرده ارائه می‌شود که مستقل ازمتریک‌های تعریف‌شده روی فضا می‌باشد.

تعریف **۵.۳**. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک‌پذیر باشد و $G \in \mathbb{H}_n(X)$ یک نیم‌گروه با مولدهای $G_1 = \{i, g_1, \dots, g_n\}$ باشد. گوییم

۱. برای $\delta \in \mathcal{C}(X)$، نیم‌گروه $F \in \mathbb{H}_n(X)$، δ-نزدیک به G نسبت به متریک d است و آن را با نماد $\mathcal{D}_0(F,G,d) < \delta$ نشان می‌دهیم هرگاه $d(g_i(x), f_i(x)) < \delta(g_i(x))$ برای هر $1 \leq i \leq n$ و $x \in X$.

۲. دنباله $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ برای $\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \in \Sigma_n$ و $\delta \in \mathcal{C}(X)$ یک (δ,ω)-شبه‌مدار از G است، هرگاه برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $d(g_{\omega_i}(x_i), x_{i+1}) < \delta(g_{\omega_i}(x_i))$.

۳. نیم‌گروه G دارای ویژگی سایه‌ای است اگر برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$، $\delta \in \mathcal{C}(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر (δ,ω)-شبه‌مدار $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ از G، نقطه‌ای مانند $x \in X$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، داشته باشیم $d(g^i_\omega(x), x_i) < \epsilon(g^i_\omega(x))$.

۴. نیم‌گروه G دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف است اگر برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$، $\delta \in \mathcal{C}(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، $\omega \in \Sigma_n$ و هر $F \in \mathbb{H}_n(X)$ که δ-نزدیک به G است، عضوی مانند $y \in X$ وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، داشته باشیم $d(g^i_\omega(y), f^i_\omega(x)) < \epsilon(g^i_\omega(y))$.

۵. نیم‌گروه G انبساطی است اگر $e \in \mathcal{C}(X)$ (که تابع انبساطی نامیده می‌شود) وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\omega \in \Sigma_n$ اگر شرط $d(g^i_\omega(x), g^i_\omega(y)) \leq e(g^i_\omega(x))$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$ برقرار باشد آن‌گاه داشته باشیم $x = y$.

ملاحظه **۶.۳**. فرض کنید G دارای ویژگی سایه‌ای باشد، یعنی برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$، $\delta \in \mathcal{C}(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر (δ,ω)-شبه‌مدار $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ از G، توسط نقطه‌ای مانند $x \in X$، ϵ-سایه‌زنی شود، در این صورت بحثی مشابه آن‌چه در [۱۸] لم ۴.۴ انجام شد، نشان می‌دهد G دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف است.

گزاره **۷.۳**. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و $G \in \mathbb{H}_n(X)$ یک نیم‌گروه متناهی تولیدشده متناظر با $\{id, g_1, \dots, g_n\}$ باشد. در این صورت ویژگی‌های سایه‌ای، سایه‌ای ضعیف و انبساطی بودن نیم‌گروه G که در تعریف ۵.۳ ارائه شد، ویژگی‌های دینامیکی‌اند، به عبارت دیگر تحت مزدوجی پایا می‌باشند.

اثبات. فرض کنید G و F به‌ترتیب نیم‌گروه‌های تولیدشده توسط خانواده‌های $G_1 = \{id, g_1, \dots, g_n\}$ و $F_1 = \{id, f_1, \dots, f_n\}$ در فضاهای متریک (X,d) و (Y,ρ) باشند. فرض کنید G و F مزدوج توپولوژیکی با نگاشت مزدوجی $h : X \to Y$ باشند.
ابتدا نشان می‌دهیم ویژگی سایه‌ای تحت مزدوجی پایا است. فرض کنید G ویژگی سایه‌ای داشته باشد. برای هر $\epsilon' \in \mathcal{C}(Y)$، $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $d(x,y) < \epsilon(x)$، آن‌گاه $\rho(h(x), h(y)) < \epsilon'(h(x))$. فرض کنید $\delta \in \mathcal{C}(X)$ ازتعریف ویژگی سایه‌ای G به‌دست آمده باشد، و $\delta' \in \mathcal{C}(Y)$ به‌گونه‌ای باشد که اگر $\rho(x,y) < \delta'(x)$، آن‌گاه $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta(h^{-1}(x))$. فرض کنید $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset Y$ یک (δ',ω)-شبه‌مدار از F برای $\omega = (\dots \omega_{-2}\omega_{-1}\omega_0\omega_1\omega_2 \dots) \in \Sigma_n$ باشد. نشان می‌دهیم $\{h^{-1}(x_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ یک (δ,ω)-شبه‌مدار از G است. در واقع نامساوی $\rho(f_{\omega_i}(x_i), x_{i+1}) < \delta'(f_{\omega_i}(x_i))$ نتیجه می‌دهد برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$d(g_{\omega_i}(h^{-1}(x_i), h^{-1}(x_{i+1})) = d(h^{-1}(f_{\omega_i}(x_i)), h^{-1}(x_{i+1})) < \delta(g_{\omega_i}(h^{-1}(x_i))).$$

بنابراین $h^{-1}(x_i)$ یک δ-شبه‌مدار از G است. چون G ویژگی سایه‌ای دارد، عضوی مانند $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $d(g^i_\omega(x), h^{-1}(x_i)) < \epsilon(g^i_\omega(x))$. این مطلب نتیجه می‌دهد برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$\rho(h(g^i_\omega(x)), x) = \rho(f^i_\omega(h(x), x_i) < \epsilon'(f^i_\omega(h(x))).$$

و این به آن معناست که F ویژگی سایه‌ای دارد.
اکنون فرض کنید G ویژگی سایه‌ای ضعیف داشته باشد. برای هر $\epsilon' \in \mathcal{C}(Y)$، $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$ را طوری در نظر بگیرید که نامساوی $d(x,y) < \epsilon(x)$، نامساوی $\rho(h(x), h(y)) < \epsilon'(h(x))$ را نتیجه دهد. فرض کنید $\delta \in \mathcal{C}(X)$ متناظر با ϵ مانند تعریف ویژگی سایه‌ای ضعیف G باشد، $\delta' \in \mathcal{C}(Y)$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که اگر $\rho(x,y) < \delta'(x)$ آن‌گاه $d(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \delta(h^{-1}(x))$. فرض کنید F' نیم‌گروه تولیدشده توسط $\{id, s_1, \dots, s_n\}$، δ-نزدیک به نیم‌گروه F باشد و $y \in Y$ و $\omega \in \Sigma_n$ را دلخواه در نظر بگیرید. قرار دهید $t_i := h^{-1} \circ s_i \circ h$. به‌سادگی دیده می‌شود که نیم‌گروه G' با مجموعه مولد $\{id, t_1, \dots, t_n\}$، δ-نزدیک به G است. بنابراین برای $h^{-1}(y) \in X$، $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(g^i_\omega(x), t^i_\omega(h^{-1}(y))) < \epsilon(g^i_\omega(x))$. بنابر فرض داریم $\rho(h(g^i_\omega(x)), h(t^i_\omega(h^{-1}(y)))) < \epsilon'(h(g^i_\omega(x)))$. از طرفی، چون $h(t^i_\omega(h^{-1}(y)) = s^i_\omega(y)$ و $h(g^i_\omega(x)) = f^i_\omega(h(x))$، پس برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $\rho(f^i_\omega(h(x)), s^i_\omega(y)) < \epsilon'(f^i_\omega(h(x))$. از این مطلب ویژگی سایه‌ای ضعیف F نتیجه می‌شود. بحثی مشابه آن‌چه در بالا انجام شد نشان می‌دهد ویژگی انبساطی بودن یک ویژگی دینامیکی می‌باشد. □

در ادامه این بخش، برخی مجموعه‌های بازگشتی عمل نیم‌گروه‌ها که دارای ویژگی سایه‌ای و سایه‌ای ضعیف هستند را مطالعه می‌کنیم.

گزاره ۸.۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $G \in \mathbb{H}_n(X)$ نیم‌گروه تولیدشده توسط خانواده متناهی $\{id, g_1, \ldots, g_n\}$ باشد. در این‌صورت

۱. اگر نیم‌گروه G ویژگی سایه‌ای ضعیف داشته باشد، آن‌گاه $\Omega_w(G) = \Omega(G)$،

۲. اگر نیم‌گروه G ویژگی سایه‌ای داشته باشد، آن‌گاه $CR(G) = \Omega_w(G) = \Omega(G)$.

اثبات. ۱. بنابر ملاحظه ۲.۲ کافی است نشان دهیم $\Omega_w(G) \subset \Omega(G)$. فرض کنید $p \in \Omega_w(G)$ و فرض کنید U یک مجموعه‌ی باز و ناتهی از X شامل p باشد. عدد ثابت $\epsilon_0 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $B(p, \epsilon_0) \subset U$. $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که $\epsilon(p) < \frac{\epsilon_0}{2}$. با توجه به ویژگی سایه‌ای ضعیف G، وجود دارد $\delta \in \mathcal{C}(X)$ متناظر با $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$ به‌قسمی‌که $\delta(p) < \inf\{\epsilon(z)/4 : z \in B(p, \delta(p))\}$. چون $p \in \Omega_w(G)$، نیم‌گروه F تولیدشده توسط مجموعه $\{id, f_1, \ldots, f_n\}$ وجود دارد که δ–نزدیک به G است و $p \in \Omega(F)$. بنابراین عدد $\ell \in \mathbb{N}$ و دنباله $\omega \in \Sigma_n$ وجود دارند به‌طوری‌که $f_\omega^\ell(B(p, \delta(p))) \cap B(p, \delta(p)) \neq \emptyset$. فرض کنید $y, f_\omega^\ell(y) \in B(p, \delta(p))$. چون G ویژگی سایه‌ای ضعیف دارد، عضوی مانند $z \in X$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $d(g_\omega^i(z), f_\omega^i(y)) < \epsilon(g_\omega^i(z))$. این مطلب نتیجه می‌دهد

$$d(z,p) < d(z,y) + d(y,p) < \epsilon(z) + \delta(p) < \epsilon_0$$

و بنابراین

$$d(g_\omega^\ell(z), p) < d(g_\omega^\ell(z), f_\omega^\ell(y)) + d(f_\omega^\ell(y), p) < \epsilon(g_\omega^\ell(z)) + \delta(p) < \epsilon_0.$$

۲. با توجه به ملاحظه ۲.۲، نشان می‌دهیم $CR(G) \subset \Omega(G)$. فرض کنید $p \in CR(G)$ و $U \subset X$ یک زیرمجموعه‌ی باز شامل p باشد. $\epsilon > 0$ را به‌قسمی انتخاب کنید که $B(p, \epsilon) \subset U$. چون نیم‌گروه G دارای ویژگی سایه‌ای است، $\delta \in \mathcal{C}(X)$ متناظر با $\epsilon > 0$ وجود دارد. از طرفی $p \in CR(G)$، نتیجه می‌دهد δ–زنجیری مانند $\{x_i\}_{i=0}^{\ell}$ از p به خودش وجود دارد. $\{x_i\}_{i=0}^{\ell}$ را به یک (δ, ω)–زنجیر $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ گسترش می‌دهیم به‌طوری‌که برای هر $i = 0, \ldots, \ell$، $z_i = x_i$ و $d(g_{\omega_i}(z_i), z_{i+1}) < \delta(g_{\omega_i}(z_i))$. بنابر ویژگی سایه‌ای G، عضوی مانند $y \in X$ وجود دارد به قسمی که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $d(g_\omega^i(y), x_i) < \epsilon$. بنابراین $d(y,p) < \epsilon$ و $d(g_\omega^\ell(y), p) < \epsilon$. این مطلب نتیجه می‌دهد $g_\omega^\ell(B(p, \epsilon)) \cap B(p, \epsilon) \neq \emptyset$.

□

۴ پایداری توپولوژیکی عمل نیم‌گروه‌های آزاد آبلی در فضای متریک غیرفشرده

در این بخش، مفهوم پایداری توپولوژیکی برای عمل‌های متناظر با نیم‌گروه‌های آبلی متناهی تولیدشده معرفی می‌گردد و نشان داده می‌شود برای نیم‌گروه‌های آبلی انبساطی در فضای متریک موضعاً فشرده، مفاهیم ویژگی سایه‌ای ضعیف و پایداری توپولوژیکی منطبق‌اند.

فرض کنید X یک فضای متریک و $\mathcal{A}_n(X)$ گردایه‌ی تمام نیم‌گروه‌های آبلی متناهی تولیدشده توسط خانواده $\{id, g_1, \ldots, g_n\}$ باشد که برای هر $i = 1, \ldots, n$، $g_i \in \mathbb{H}_n(X)$. فرض کنید متریک روی $\mathcal{A}_n(X)$، متریکی باشد که از $\mathcal{H}_n(X)$ به ارث رسیده است.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $G \in \mathcal{A}_n(X)$ یک نیم‌گروه آبلی متناظر با خانواده $\{id, g_1, \ldots, g_n\}$ باشد. گوییم G پایدار توپولوژیکی است اگر برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$، $\delta \in \mathcal{C}(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر نیم‌گروه آبلی دیگر مانند $F \in \mathcal{A}_n(X)$ که δ–نزدیک به G است و هر $\omega \in \Sigma_n$، یک نگاشت پیوسته $h : X \to Y$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $g_\omega^i \circ h = h \circ f_\omega^i$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$، و $d(h(x), x) < \epsilon(h(x))$، برای هر $x \in X$.

به‌سادگی دیده می‌شود که اگر $G \in \mathcal{A}_n(X)$ پایدار توپولوژیکی باشد، آن‌گاه ویژگی سایه‌ای ضعیف دارد، یعنی برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$، $\delta \in \mathcal{C}(X)$ وجود دارد به قسمی که برای هر نیم‌گروه آبلی دیگر مانند $F \in \mathcal{A}_n(X)$ که δ–نزدیک به G است و هر $\omega \in \Sigma_n$ و هر $x \in X$، عضوی مانند $y \in X$ وجود دارد به قسمی که $d(g_\omega^i(y), f_\omega^i(x)) < \epsilon(g_\omega^i(y))$ برای هر $i \in \mathbb{Z}$.

گزاره زیر نشان می‌دهد که پایداری توپولوژیکی یک ویژگی دینامیکی می‌باشد.

گزاره ۲.۴. فرض کنید X یک فضای متریک باشد و G یک نیم‌گروه آبلی متناظر با خانواده $\{id, g_۱, \ldots, g_n\}$ باشد. در این صورت ویژگی پایداری توپولوژیکی G که در تعریف ۱.۴ ارائه گردید، ویژگی دینامیکی می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $G, F \in \mathcal{A}_n(X)$، به‌ترتیب نیم‌گروه‌های آبلی متناهی تولیدشده توسط خانواده‌های $G_۱ = \{id, g_۱, \ldots, g_n\}$ و $F_۱ = \{id, f_۱, \ldots, f_n\}$ در فضاهای متریک (X, d) و (Y, ρ) باشند. فرض کنید G و F مزدوج توپولوژیکی با نگاشت مزدوجی $h : X \to Y$ باشند و G پایدار توپولوژیکی باشد. برای هر $\epsilon' \in \mathcal{C}(Y)$، $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$ را طوری در نظر بگیرید که نامساوی $d(x, y) < \epsilon(x)$، نامساوی $\rho(h(x), h(y)) < \epsilon'(h(x))$ را نتیجه دهد. فرض کنید $\delta \in \mathcal{C}(X)$، متناظر با ϵ در تعریف پایداری ساختاری G و $\delta' \in \mathcal{C}(Y)$ به‌گونه‌ای باشد که اگر $\rho(x, y) < \delta'(x)$، آن‌گاه $d(h^{-۱}(x), h^{-۱}(y)) < \delta(h^{-۱}(x))$. فرض کنید نیم‌گروه $F' \in \mathcal{A}_n(X)$ تولیدشده توسط $\{id, s_۱, \ldots, s_n\}$، δ-نزدیک به F باشد. قرار دهید $t_i = h^{-۱} \circ s_i \circ h$. به‌سادگی دیده می‌شود که نیم‌گروه G' با مجموعه‌ی مولد $\{id, t_۱, \ldots, t_n\}$ آبلی است و δ-نزدیک به G می‌باشد. بنابراین $h' : X \to Y$ وجود دارد به‌طوری‌که $g^i_\omega \circ h' = h' \circ t^i_\omega$ و $d(h'(x), x) < \epsilon(h'(x))$، که نتیجه می‌شود $h' \circ h^{-۱} \circ s^i_\omega \circ h = g^i_\omega \circ h'$. نگاشت $H : X \to Y$ را به‌صورت $H(y) = h \circ h' \circ h^{-۱}(y)$ در نظر بگیرید. با توجه به این‌که $d(h'(x), x) < \epsilon(h'(x))$، داریم $\rho(H(y), y) < \epsilon'(y)$ و برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $f^i_\omega \circ H = H \circ s^i_\omega$. $\square$

در ادامه، شرط لازم و کافی برای پایداری توپولوژیکی در فضای تمام نیم‌گروه‌های آبلی متناهی تولیدشده در فضاهای متریک موضعاً فشرده ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $G \in \mathcal{A}_n(X)$ یک نیم‌گروه انبساطی در فضای متریک موضعاً فشرده X باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

۱. G پایدار توپولوژیکی است.

۲. G ویژگی سایه‌ای ضعیف دارد.

برای اثبات قضیه ۳.۴، به دو لم زیر نیاز داریم.

لم ۴.۴. [۱۱، لم ۱.۳] فرض کنید X یک فضای متریک موضعاً فشرده باشد. در این صورت $\alpha \in \mathcal{C}(X)$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $x \in X$، $\overline{B(x, \alpha(x))}$ در X فشرده است.

ما در اینجا از نماد $\alpha_X \in \mathcal{C}(X)$ برای وقتی‌که برای هر $x \in X$، $\overline{B(x, \alpha(x))}$ در X فشرده است استفاده می‌کنیم. همچنین برای هر $\delta, \epsilon \in \mathcal{C}(X)$، می‌نویسیم $\delta < \epsilon$ هرگاه $\delta(x) < \epsilon(x)$ برای هر $x \in X$.

لم ۵.۴. فرض کنید $G \in \mathbb{H}_n(X)$ یک نیم‌گروه انبساطی در فضای متریک موضعاً فشرده X با تابع انبساطی $e \in \mathcal{C}(X)$ باشد که $e < \alpha_X$ و فرض کنید $\omega \in \Sigma_n$ داده شده است. برای هر $y \in X$ و $\lambda \in \mathcal{C}(X)$، عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $d(g^i_\omega(y), g^i_\omega(z)) \le e(g^i_\omega(y))$ برای هر $-N < i < N$، آن‌گاه $d(y, z) < \lambda(y)$.

برهان. به برهان خلف فرض کنید $y \in X$ و $\lambda \in \mathcal{C}(X)$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $m \in \mathbb{N}$، وجود دارد $z_m \in X$ که $d(g^i_\omega(y), g^i_\omega(z)) \le e(g^i_\omega(y))$ برای هر $-m < i < m$ و $d(y, z_m) \ge \lambda(y)$. بنابراین $d(y, z_m) \le e(y)$ که نتیجه می‌دهد

$$\{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset B(y, e(y)) \subset B(y, \alpha_X(y)).$$

باتوجه به فشرده بودن $\overline{B(y, \alpha_X(y))}$، زیردنباله‌ی $\{z_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ از $\{z_m\}_{k\in\mathbb{N}}$ و نقطه $z \in \overline{B(y, \alpha_X(y))}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\lim_{k\to\infty} z_{m_k} = z$. در نتیجه

$$d(y, z) = lim_{k\to\infty} d(y, z_{m_k}) \ge \lambda(y) > ۰,$$

و برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$d(g^i_\omega(y), g^i_\omega(z)) = \lim_{m\to\infty} d(g^i_\omega(y), g^i_\omega(z_m)) \le e(g^i_\omega(y)),$$

که متناقض با انبساطی بودن G می‌باشد.

اثبات. (برهان قضیه۳.۴) به‌وضوح اگر G پایدار توپولوژیکی باشد، آن‌گاه دارای ویژگی سایه‌ای ضعیف است. برعکس، فرض کنید G ویژگی سایه‌ای ضعیف داشته باشد و $e \in \mathcal{C}(X)$ تابع انبساطی G باشد که $e < \alpha_X$. با توجه به لم ۳.۳، $\gamma \in \mathcal{C}(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\gamma(x) \leq \inf\{e(y) : y \in B(x, \gamma(x))\}$ برای هر $x \in X$. برای هر $\epsilon \in \mathcal{C}(X)$ که $\epsilon < \gamma/۴$، فرض کنید $\delta \in \mathcal{C}(X)$ مانند تعریف ویژگی سایه‌ای ضعیف G باشد. فرض کنید $F \in \mathcal{C}_m(X)$، δ-نزدیک به G باشد و $\omega \in \Sigma_m$. پس برای هر $x \in X$، نقطه‌ای مانند $y \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$d(g_\omega^i(y), f_\omega^i(x)) < \epsilon(g_\omega^i(y)). \tag{۱.۴}$$

فرض کنید $z \in X$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $j \in \mathbb{Z}$، $d(g_\omega^j(z), f_\omega^j(x)) < \epsilon(g_\omega^j(z))$. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$\begin{aligned} d(g_\omega^i(y), g_\omega^i(z)) &\leq d(g_\omega^i(y), f_\omega^i(x)) + d(g_\omega^i(z), f_\omega^i(x)) < \epsilon(g_\omega^i(y)) + \epsilon(g_\omega^i(z)) \\ &< \frac{\gamma(g_\omega^i(y))}{۴} + \frac{\gamma(g_\omega^i(z))}{۴} < \max\{\gamma(g_\omega^i(y)), \gamma(g_\omega^i(z))\} \\ &< e(g_\omega^i(y)), \text{(با توجه به ملاحظه ۴.۳)} \end{aligned}$$

و بنابراین انبساطی بودن نیم‌گروه G نتیجه می‌دهد $y = z$. نگاشت $h : X \to Y$ را با ضابطه $h(x) = y$ در نظر بگیرید. نگاشت h خوش تعریف است. با قرار دادن $i = ۰$ در نامعادله (۱.۴)، داریم $d(h(x), x) < \epsilon(h(x))$. با به‌کاربردن (۱.۴) نتیجه می‌شود برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$d(g_\omega^i(h(f_{\sigma^i\omega}(x))), f_\omega^i(f_{\sigma^i\omega}(x))) < \epsilon(g_\omega^i(h(f_{\sigma^i\omega}(x))). \tag{۲.۴}$$

و

$$d(g_\omega^i(g_{\sigma^i\omega}(h(x))), f_\omega^{i+۱}(x)) = d(g_\omega^{i+۱}(h(x)), f_\omega^{i+۱}(x)) < \epsilon(g_\omega^{i+۱}(h(x))). \tag{۳.۴}$$

چون G و F آبلی هستند از (۲.۴) و (۳.۴) نتیجه می‌شود که برای هر $i \in \mathbb{Z}$،

$$d(g_\omega^i(g_{\sigma^i\omega}(h(x))), g_\omega^i(h(f_{\sigma^i\omega}(x)))) < \gamma(g_\omega^i(g_{\sigma^i\omega}(h(x)))). \tag{۴.۴}$$

بنابراین برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $h(f_{\sigma^i\omega}(x)) = g_{\sigma^i\omega}(h(x))$، که نتیجه می‌دهد $h \circ f_{\omega_i} = g_{\omega_i} \circ h$ و بنابراین $h \circ f_\omega^i = g_\omega^i \circ h$.
اکنون نشان می‌دهیم نگاشت h پیوسته است. فرض کنید $\eta > ۰$ به‌قسمی باشد که $d(y, y') < \eta$، نتیجه دهد برای هر $-N < i < N$،

$$d(f_\omega^i(y'), f_\omega^i(y)) < \frac{\gamma(h(f_\omega^i(y')))}{۴}$$

بنابراین اگر $d(y, y') < \eta$، آن‌گاه برای هر $-N < i < N$ می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} d(g_\omega^i(h(y')), g_\omega^i(h(y))) &= d(h(f_\omega^i(y'), h(f_\omega^i(y))) \\ &\leq d(h(f_\omega^i(y')), f_\omega^i(y')) + d(f_\omega^i(y'), f_\omega^i(y) + d(f_\omega^i(y), h(f_\omega^i(y))) \\ &\leq \epsilon(h(f_\omega^i(y')) + \frac{\gamma(h(f_\omega^i(y'))}{۴} + \frac{\gamma(h(f_\omega^i(y))}{۴} \\ &\leq \frac{\gamma(h(f_\omega^i(y'))}{۴} + \frac{\gamma(h(f_\omega^i(y'))}{۴} + \frac{\gamma(h(f_\omega^i(y))}{۴} \\ &< \max\{\gamma(g_\omega^i(y')), \gamma(g_\omega^i(y))\} \\ &< e(g_\omega^i(h(y')), \text{(با توجه به ملاحظه ۴.۳)} \end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به لم ۵.۴، $d(h(y'), h(y)) < \lambda$. □

فهرست منابع

[1] Artigue, A., 2015. Lipschitz perturbations of expansive systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* 35(5), pp. 1829-1841. doi: 10.3934/dcds.2015.35.1829

[2] Bahabadi, A.Z., 2015. Shadowing and average shadowing properties for iterated function systems. *Georgian Mathematical Journal,* 22(2), pp. 179-184. doi:10.1515/gmj-2015-0008

[3] Barnsley, M.F., 2014. *Fractals everywhere.* Academic press, Boston.

[4] Barnsley, M.F. and Vince, A., 2013. The Conley attractor of an iterated function system, *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* 88(2), pp. 267-279. doi:10.1017/S0004972713000348

[5] Barzanouni, A., 2014. Shadowing property on finitely generated group actions. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories,* 12(1), pp. 69-79. doi: 10.1080/1726037X.2014.922253

[6] Barzanouni, A., 2021. Weak shadowing for actions of some finitely generated groups on non-compact spaces and related measures. *Journal of Dynamical and Control Systems,* 27, pp. 507-530. doi:10.1007/s10883-020-09496-0

[7] Chung, N.P. and Lee, K., 2018. Topological stability and pseudo-orbit tracing property of group actions, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 146(3), pp.1047-1057. doi: 10.1090/proc/13654

[8] Dastjerdi, D.A. and Hosseini, M., 2010. Sub-shadowings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 72(9-10), pp.3759-3766. doi:10.1016/j.na.2010.01.014

[9] Fakhari, A. and Ghane, F.H., 2010. On shadowing: ordinary and ergodic. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 364(1), pp.151-155. doi:10.1016/j.jmaa.2009.11.004

[10] Lam, V., 2021. Climate modelling and structural stability. *European journal for philosophy of science,* 11(4), p.98.doi:10.1007/s13194-021-00414-0

[11] Lee, K., Nguyen, N.T. and Yang, Y., 2018. Topological Stability and Spectral Decomposition for Homeomorphisms on Noncompact spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series A,* 38(5). doi: 10.3934/dcds.2018103

[12] Nazari, M. and Mehrabian, M., 2021. A novel chaotic IWT-LSB blind watermarking approach with flexible capacity for secure transmission of authenticated medical images. *Multimedia Tools and Applications,* 80(7), pp.10615-10655. doi:10.1007/s11042-020-10032-2

[13] Fatehi Nia, M., 2016. Parameterized IFS with the asymptotic average shadowing property. *Qualitative theory of dynamical systems,* 15(2), pp.367-381. doi: 10.1007/s12346-015-0184-6

[14] Osipov, A.V. and Tikhomirov, S.B., 2014. Shadowing for actions of some finitely generated groups. *Dynamical Systems,* 29(3), pp.337-351. doi:10.1080/14689367.2014.902037

[15] Palmer, K.J., 2000. *Shadowing in dynamical systems: theory and applications* (Vol. 501). Springer Science and Business Media.

[16] Rodrigues, F.B. and Varandas, P., 2016. Specification and thermodynamical properties of semigroup actions. *Journal of Mathematical Physics,* 57(5). doi:10.1063/1.4950928

[17] Shabani, Z., 2020. Ergodic shadowing of semigroup actions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society,* 46, pp.303-321. doi:10.1007/s41980-019-00258-8

[18] Shabani, Z., Barzanouni, A. and Xinxing, W.U., 2021. Recurrent sets and shadowing for finitely generated semigroup actions on metric spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 50(4), pp.934-948. doi:10.15672/hujms.784081

[19] Thompson, E.L., 2013. *Modelling North Atlantic storms in a changing climate* [PhD thesis], Imperial College London.

The shadowing and topological stability properties of semigroup actions on non-compact metric spaces

Zahra Shabani, (1) [2] Ali Barzanouni(2)

(1) Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran
(2) Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

Communicated by: Fatemeh Helen Ghane

Received: 27 May 2023 Accepted: 29 November 2023

Abstract: In this paper, the concepts of shadowing, weak shadowing and expansiveness for finitely generated semigroup actions on non-compact metric spaces are introduced, which are dynamical properties and equivalent to their definitions on compact metric spaces. Also, the notion of topological stability for actions associated to finitely generated abelain semigroups is defined and a necessary and sufficient condition for the topological stability of finitely generated abelian semigroups on a locally compact metric space is provided.

Keywords: Semigroup actions, Shadowing property, Expansive, Topological stability.

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: zshabani@math.usb.ac.ir (Z. Shabani), A.barzanouni@hsu.ac.ir (A. Barzanouni).