مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، ص ۳۷۶-۳۸۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2023.44360.2184

عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر در مشبکه‌های ضربی

اسماعیل رستمی، (۱) [۱] شکوفه قربانی (۱)

(۱) بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۸/۲۹

چکیده: در این مقاله، مفهوم عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر را در مشبکه ضربی معرفی کرده و ارتباط آن را با مفاهیم مهم دیگری از مشبکه‌های ضربی مانند عناصر اول، عناصر اولیه و عناصر بیشین بررسی می‌نماییم. در ادامه به کمک این مفهوم، تجزیه هم‌بیشین کامل را در مشبکه‌های ضربی تعریف و مطالعه خواهیم کرد. به‌ویژه مشبکه‌هایی ضربی را توصیف می‌کنیم که هر عنصر سره آنها را به‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب هم‌بیشین از عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر نوشت.

واژه‌های کلیدی: مشبکه ضربی، عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر، تجزیه هم‌بیشین، تجزیه هم‌بیشین کامل.

رده‌بندی ریاضی: 08A72; 08A99; 03G25

۱ مقدمه

مطالعه تجزیه هم‌بیشین ایده‌آل‌های حلقه جابجایی را می‌توان برای نخستین بار در مقاله نوتر[۲] یافت [۹]. در واقع نوتر نشان داده در یک حلقه نوتری هر ایده‌آل را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب یکتا از ایده‌آل‌های هم‌بیشین با یک خاصیت خاص نوشت. در ادامه بروِر[۳] و هاینزر[۴] مطالعه تجزیه هم‌بیشین ایده‌آل‌های یک دامنه صحیح را مورد بررسی قرار دادند و دامنه‌های صحیحی را توصیف کردند که هر ایده‌آل آنها به‌صورت حاصل‌ضرب هم‌بیشینی از ایده‌آل‌های اول، اولیه و یا توانی از یک ایده‌آل اول است [۳]. سپس جواِت[۵] مطالعه تجزیه هم‌بیشین را در حالت کلی‌تری مورد بررسی قرار داد و تجزیه هم‌بیشین را در سیستم‌های ایده‌آلی که حالت توسعه یافته ایده‌آل‌های حلقه هستند مورد بررسی و اثبات قرار داد [۷]. وارد[۶] و دیلورث[۷] مفهوم مشبکه‌های ضربی را به‌عنوان تعمیمی از نظریه ایده‌آل‌های حلقه‌های جابجایی و یک‌دار معرفی

[۱] نویسنده مسئول مقاله
[۲] Noether
[۳] Brewer
[۴] Heinzer
[۵] Juett
[۶] Ward
[۷] Dilworth

(E. Rostami) e_rostami@uk.ac.ir, (Sh. Ghorbani) sh.ghorbani@uk.ac.ir

کردند [۱۱]. به‌طور مشابه مفاهیم عنصر اول، عنصر اولیه و عنصر بیشین معرفی شدند و محققان بسیاری آنها را مطالعه نمودند. پس از آنها دامیترسکو [۸] و اپیوره، [۹] مفهوم تجزیه هم‌بیشین در مشبکه‌های ضربی را بررسی نمودند و تعدادی از مهمترین نتایج مرجع [۳] در مشبکه‌های ضربی، مورد بررسی و اثبات قرار گرفت.

ما در این مقاله بعد از معرفی مفهوم عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر برای مشبکه‌های ضربی به بررسی تجزیه‌های هم‌بیشین در مشبکه‌های ضربی می‌پردازیم که عامل‌های تجزیه، شبه‌تحویل‌ناپذیر باشند.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز در سراسر این مقاله را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. جبر $(L, \wedge, \vee, ., ۰, ۱)$ از نوع $(۲, ۲, ۲, ۰, ۰)$ را مشبکه ضربی گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $(L, \wedge, \vee, ۰, ۱)$ مشبکه کامل کران‌دار با بزرگ‌ترین عنصر ۱ و کوچک‌ترین عنصر ۰ است.

۲. $(L, ., ۱)$ تکواره جابجایی با عنصر همانی ۱ است.

۳. برای هر $a \in L$ و $B \subseteq L$ داشته باشیم $a. \bigvee B = \bigvee_{b\in B} a.b$

در ادامه مشبکه ضربی $(L, \wedge, \vee, ., ۰, ۱)$ را با L نمایش می‌دهیم. عنصر $a \neq ۱$ از مشبکه ضربی L را عنصر سره گوییم. همچنین دو عنصر a و b از مشبکه ضربی L را هم‌بیشین گوییم، هرگاه $a \vee b = ۱$.

تعریف ۲.۲. فرض کنید a عنصر سره‌ای از مشبکه ضربی L باشد. گوییم عنصر a
(۱) $\wedge$-اول ($\wedge$-اول) است، هرگاه برای $x, y \in L$ اگر $x.y \leqslant a$ $(x \wedge y \leqslant a)$ داشته باشیم $x \leqslant a$ یا $y \leqslant a$.
(۲) تحویل‌ناپذیر است اگر برای $x, y \in L$ داشته باشیم $a = x \wedge y$، آن‌گاه $a = x$ یا $a = y$.
(۳) اولیه است، هرگاه برای $x, y \in L$ اگر $x.y \leqslant a$، آن‌گاه داشته باشیم $x \leqslant a$ یا وجود داشته باشد عدد طبیعی n به‌طوری‌که $y^n \leqslant a$، جایی که $y^n = y. \cdots .y$، یعنی y، n بار در خودش ضرب شده است.
(۴) بیشین است، هرگاه بین این عنصر و ۱ هیچ عنصر دیگری وجود نداشته باشد. مجموعه تمام عناصر بیشین مشبکه ضربی L را با نماد $Max(L)$ نشان می‌دهیم.

عنصر c از مشبکه L فشرده نامیده می‌شود، هرگاه $c \leqslant \bigvee Y$ برای $Y \subseteq L$، آن‌گاه زیرمجموعه متناهی F از Y وجود داشته باشد به‌طوری که $c \leqslant \bigvee F$. همچنین، مشبکه L را به‌طور فشرده تولید شده گوییم، هرگاه هر عنصر آن کوچکترین کران بالای (سوپریموم) تعدادی از اعضاء فشرده باشد.

مفهوم رادیکال که بیشتر مفهومی هندسه جبری هست برای عناصر مشبکه ضربی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\sqrt{a} := \bigvee\{x \in L \mid x^n \leq a \text{ به‌قسمی که } n \in Z^+ \text{ یک عنصر فشرده است و وجود داشته باشد } x\}.$$

اگر L مشبکه‌ای به‌طور فشرده تولید شده با عنصر فشرده ۱ باشد، آن‌گاه عناصر بیشین در L وجود دارند و هر عنصر بیشین عنصر .-اول و $\wedge$-اول است. علاوه بر این اگر حاصل‌ضرب دو عنصر فشرده؛ فشرده باشد؛ آن‌گاه عناصر اول و عناصر اولیه شامل عنصر a از L موجودند و در این حالت داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{a} &= \bigwedge\{p \in L \mid a \leq p \text{ و یک عنصر .-اول است } p\}\\ &= \bigwedge\{p \in L \mid a \leq p \text{ و یک عنصر اولیه است } p\}.\end{aligned}$$

برای آگاهی بیشتر منابع [۲] و [۱۰] را بنگرید.

در سراسر این مقاله منظورمان از مشبکه ضربی، مشبکه ضربی به‌طور فشرده تولید شده است که ۱ عنصر فشرده مشبکه و حاصل‌ضرب هر دو عنصر فشرده، فشرده است.

عنصر c از مشبکه L متمم‌دار نامیده می‌شود، هرگاه وجود داشته باشد عنصر $c' \in L$ به‌طوری که $c \wedge c' = ۰$ و $c \vee c' = ۱$.

مفهوم مشبکه‌های منظم توسط اندرسون [۱۰] و جایارام [۱۱] در سال ۱۹۹۵ معرفی و مورد بررسی قرار گرفته است [۱].

---
[۸] Dumitrescu
[۹] Epure
[۱۰] Anderson
[۱۱] Jayaram

تعریف **۳.۲.** مشبکه ضربی L را منظم می‌نامیم، هرگاه هر عنصر فشرده آن، عنصر متمم‌دار باشد.

در اینجا، توصیفی از مشبکه‌های ضربی منظم که در مرجع [۱] آمده است را بیان می‌کنیم.

قضیه **۴.۲.** [۱، قضیه ۷] فرض کنید L مشبکه ضربی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱. L مشبکه منظم است.

۲. هر عنصر اولیه L بیشین است.

۳. هر عنصر اولیه L، عنصر اول مینیمال است.

حال مفهوم توپولوژی زاریسکی که در شاخه‌های مختلفی از ریاضیات مانند هندسه جبری، جبر، ساختارهای جبری آمده است را بر روی عناصر بیشین مشبکه ضربی یادآوری می‌کنیم. برای هر $a \in L$ تعریف می‌کنیم:

$$\Omega(a) := \{m \in Max(L) \mid a \nleq m\}.$$

حال با توجه به اینکه هر عنصر بیشین یک عنصر .-اول و $\wedge$-اول است، برای هر $a, b \in L$ و $\{a_i\} \subseteq L$ موارد زیر را داریم:

۱. $\Omega(۱) = Max(L)$ و $\Omega(۰) = \emptyset$.

۲. $\Omega(a) \cap \Omega(b) = \Omega(a.b) = \Omega(a \wedge b)$.

۳. $\bigcup \Omega(a_i) = \Omega(\bigvee a_i)$.

از اینرو خانواده $\{\Omega(a) \mid a \in L\}$ به‌عنوان مجموعه‌های باز، یک توپولوژی روی $Max(L)$ تشکیل می‌دهد که به آن توپولوژی زاریسکی می‌گوییم. همچنین، یادآوری می‌کنیم فضای توپولوژیک نوتری است، هرگاه هر زنجیر صعودی از زیرمجموعه‌های باز این فضای توپولوژیک ایستا باشد.

این بخش را با تعدادی از نتایج مرجع [۴] به پایان می‌رسانیم که در بخش‌های بعد از آنها استفاده خواهیم کرد.

لم **۵.۲.** [۴، لم ۲] فرض کنید L مشبکه ضربی باشد و $a, b, c_۱, ...c_n \in L$. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. اگر $a \vee b = ۱$، آن‌گاه $a \wedge b = a.b$.

۲. $a \vee b = ۱$ اگر و تنها اگر $\sqrt{a} \vee \sqrt{b} = ۱$ اگر و تنها اگر برای برخی (همه) $i, j \in \mathbb{N}$، $a^i \vee b^j = ۱$.

۳. اگر برای هر $i \in \{۱, ..., n\}$، a و c_i هم‌بیشین باشند، آن‌گاه a و $c_۱ . \cdots . c_n$ نیز هم‌بیشین هستند.

قضیه **۶.۲.** [۴، قضیه ۴] فرض کنید L مشبکه ضربی و $\{a_۱, ..., a_n\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از عناصر سره و دوبه‌دو هم‌بیشین از مشبکه L باشند و قرار دهید $a := a_۱ . \cdots . a_n$. حال اگر b عنصری از مشبکه L باشد به‌طوری که $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. در این‌صورت وجود دارد عناصر یکتا و دوبه‌دو هم‌بیشین $b_۱$، ...، b_n از مشبکه L به‌طوری که $b := b_۱ . \cdots . b_n$ و برای هر $i \in \{۱, ..., n\}$، $\sqrt{a_i} = \sqrt{b_i}$.

۳ عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر

در این بخش مفهوم عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر را در مشبکه ضربی بیان کرده و ارتباط این مفهوم را با برخی از مفاهیم مهم که در مشبکه‌هایی ضربی تعریف شده‌اند، بررسی می‌کنیم.

تعریف **۱.۳.** عنصر سره a از مشبکه ضربی L را شبه‌تحویل‌ناپذیر می‌نامیم، هرگاه برای $x, y \in L$ اگر $a = x \wedge y$ و $x \vee y = ۱$، آن‌گاه داشته باشیم $x = ۱$ یا $y = ۱$.

آشکار است که هر عنصر بیشین مشبکه ضربی؛ عنصری شبه‌تحویل‌ناپذیر است. از اینرو مجموعه‌ی عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر مشبکه ضربی ناتهی است. در مثال زیر نشان خواهیم داد که هر عنصر مشبکه‌ی ضربی الزاماً؛ شبه‌تحویل‌ناپذیر نیست. علاوه بر این بدیهی است که هر عنصر تحویل‌ناپذیر مشبکه ضربی یک عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر است. اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد، به مثال زیر توجه کنید.

مثال **۲.۳.** [۶] (الف) فرض کنید L مشبکه ضربی با عناصر $\{\circ, a, b, c, ۱\}$ و ترتیب مشبکه‌ای $\circ < a, b < c < ۱$ باشد به‌طوری که عناصر مجموعه $\{a, b\}$ غیر قابل مقایسه‌اند و عمل دوتایی آن توسط جدول زیر مشخص شود:

.	$\circ$	a	b	c	۱
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
a	$\circ$	a	$\circ$	a	a
b	$\circ$	$\circ$	b	b	b
c	$\circ$	a	b	c	c
۱	$\circ$	a	b	c	۱

در این‌صورت عنصر $\circ$ شبه‌تحویل‌ناپذیر است، اما تحویل‌ناپذیر و .–اول نیست.

(ب) فرض کنید L مشبکه ضربی با عناصر $\{\circ, a, b, c, ۱\}$ و ترتیب مشبکه‌ای $\circ < c < a, b < ۱$ باشد به‌طوری که عناصر مجموعه $\{a, b\}$ غیر قابل مقایسه‌اند و عمل دوتایی آن توسط جدول زیر مشخص شود:

.	$\circ$	c	a	b	۱
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
c	$\circ$	c	c	c	c
a	$\circ$	c	a	c	a
b	$\circ$	c	c	b	b
۱	$\circ$	a	b	c	۱

در این‌صورت عنصر c شبه‌تحویل‌ناپذیر نیست.

گزاره **۳.۳.** فرض کنید a و b دو عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر از مشبکه ضربی L باشند به‌طوری که $a \vee b \neq ۱$. در این‌صورت، $a.b$ و $a \wedge b$ شبه‌تحویل‌ناپذیر خواهند بود.

اثبات. اثبات را برای $a.b$ انجام می‌دهیم و برای $a \wedge b$ به‌طور مشابه می‌توان حکم را اثبات کرد. فرض کنید $x, y \in L$ وجود داشته باشد به‌طوری که $a.b = x \wedge y$ و $x \vee y = ۱$. در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned}(a \vee x).(a \vee y) &= [(a \vee x).a] \vee [(a \vee x).y] \\ &= (a.a) \vee (x.a) \vee (a.y) \vee (x.y) \\ &= a^۲ \vee a \vee (a.b) \\ &= a.\end{aligned}$$

بنابراین $a = (a \vee x).(a \vee y)$. به‌طور مشابه داریم $b = (b \vee x).(b \vee y)$. از طرفی چون $x \vee y = ۱$ داریم:

$$(b \vee x) \vee (b \vee y) = ۱ = (a \vee x) \vee (a \vee y).$$

حال چون a و b عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر از مشبکه ضربی L هستند، داریم:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a \vee x = ۱ & \text{یا} & a \vee y = ۱ \\ & \text{و} & \\ b \vee x = ۱ & \text{یا} & b \vee y = ۱ \end{array}\right. \qquad (۱.۳)$$

از آنجا که $a \vee b \neq ۱$ و ۱ عنصر فشرده مشبکه ضربی L است، عنصر بیشین m وجود دارد به‌طوری که $a \vee b \leqslant m$. پس $a \leqslant m$ و $b \leqslant m$. بنابراین $x \wedge y = a.b \leqslant m.m \leqslant m$ اما m عنصر $\wedge$– اول است، پس $x \leqslant m$ یا $y \leqslant m$. بدون کم شدن از کلیت موضوع می‌پذیریم $x \leqslant m$. از اینرو $a, b, x \leqslant m$. در نتیجه با توجه به رابطه ۱.۳ داریم $a \vee y = b \vee y = ۱$. پس

$$\begin{aligned}۱ = ۱.۱ = (a \vee y).(b \vee y) &= [(a \vee y).b] \vee [(a \vee y).y] \\ &= (a.b) \vee (y.b) \vee (a.y) \vee (y.y) \\ &\leqslant y.\end{aligned}$$

در نتیجه $y = ۱$، بنابراین $a.b$ شبه‌تحویل‌ناپذیر است. □

ملاحظه **۴.۳.** (الف) شرط هم‌بیشین نبودن عناصر a و b در گزاره ۳.۳ لازم است. مثال ۲.۳ قسمت (ب) را در نظر بگیرید، عناصر a و b شبه‌تحویل‌ناپذیر هستند درحالی که $c = a \wedge b$ شبه‌تحویل‌ناپذیر نیست.
(ب) در حالت کلی $\vee$ دو عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر، شبه‌تحویل‌ناپذیر نخواهد بود. برای مثال اگر m و n دو عنصر بیشین متمایز از مشبکه ضربی L باشند، آن‌گاه بنا به تعریف $m \vee n = 1$ شبه‌تحویل‌ناپذیر نیست. (مثال ۲.۳ قسمت (ب) را در ملاحظه نمایید.)

در قضیه زیر حالتی را بررسی می‌کنیم که تمام عناصر سره مشبکه ضربی شبه‌تحویل‌ناپذیر باشند.

قضیه **۵.۳.** فرض کنید L مشبکه ضربی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱. L دقیقاً دارای یک عنصر بیشین است.

۲. برای $x, y \in L$ اگر $x \vee y = 1$، آن‌گاه $x = 1$ یا $y = 1$.

۳. تمام عناصر سره L شبه‌تحویل‌ناپذیر هستند.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید m تنها عنصر بیشین مشبکه L باشد و برای $x, y \in L$ داشته باشیم $x \vee y = 1$. در این‌صورت $x \nleqslant m$ یا $y \nleqslant m$ و از اینرو $x = 1$ یا $y = 1$.
(۲) $\Leftarrow$ (۳) آشکار است.
(۳) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید L حداقل دو عنصر بیشین مانند m و n داشته باشد. در این‌صورت قرار دهید $a := m \wedge n$. حال چون $m \vee n = 1$، با توجه به فرض شبه‌تحویل‌ناپذیری عنصر سره a، داریم $m = 1$ یا $n = 1$، که تناقض است. از اینرو L دارای فقط یک عنصر بیشین خواهد بود. $\square$

در ادامه ارتباط بین مفاهیم اول، اولیه و شبه‌تحویل‌ناپذیر بودن را در مشبکه ضربی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره **۶.۳.** هر عنصر $\wedge$-اول یا .-اول از مشبکه ضربی L شبه‌تحویل‌ناپذیر است. علاوه براین، هر توان از عنصر $\wedge$-اول یا .-اول از مشبکه ضربی L شبه‌تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید a عنصر $\wedge$-اول یا .-اول از مشبکه ضربی L باشد به‌طوری که برای $x, y \in L$ داشته باشیم $a = x \wedge y$ و $x \vee y = 1$. در این‌صورت، در هر دو حالت چون $x \wedge y = x.y$، داریم $x \leqslant a$ یا $y \leqslant a$. بدون کم شدن از کلیت موضوع فرض کنید $x \leqslant a$. دراین‌صورت، $x \leqslant a = x \wedge y \leqslant y$ و از اینرو $1 = y \vee x = y$. در نتیجه a یک عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر است. با توجه به گزاره ۳.۳ برای هر عدد طبیعی n، a^n نیز عنصری شبه‌تحویل‌ناپذیر خواهد بود. $\square$

گزاره **۷.۳.** هر عنصر اولیه از مشبکه ضربی شبه‌تحویل‌ناپذیر است. علاوه براین، هر توان از عنصر اولیه از مشبکه ضربی L شبه‌تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید a عنصر اولیه از مشبکه ضربی L باشد به‌طوری که برای $x, y \in L$ داشته باشیم $a = x \wedge y$ و $x \vee y = 1$. در این‌صورت، چون $x \wedge y = x.y$ و $a = x \wedge y$ داریم $x \leqslant a$ یا عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری که $y^n \leqslant a$. اگر $x \leqslant a$، آن‌گاه $x \leqslant a = x \wedge y \leqslant y$ و از اینرو $1 = x \vee y = y$. حال اگر $y^n \leqslant a$، آن‌گاه $y^n \leqslant a = x \wedge y \leqslant x$. پس $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y^n} = \sqrt{y}$ و از اینرو بنا به لم ۵.۲ داریم $1 = \sqrt{y} \vee \sqrt{x} = \sqrt{x}$. پس $1 = \sqrt{x}$ و از اینرو $x = 1$. در نتیجه a عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر است. همچنین طبق گزاره ۳.۳ برای هر عدد طبیعی n، a^n نیز عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر خواهد بود. $\square$

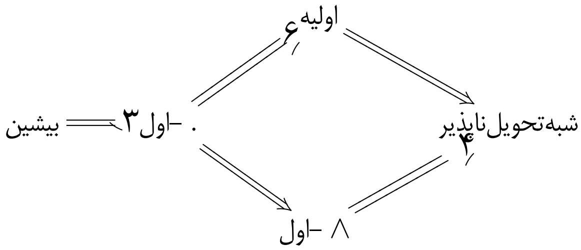
در مثال زیر نشان خواهیم داد که عکس گزاره های ۶.۳ و ۷.۳ الزاماً برقرار نیستند.

مثال **۸.۳.** [۸] فرض کنید L مشبکه مانده و ضربی با عناصر $\{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ و ترتیب مشبکه $0 < d < c < b < a < 1$ و $0 < d < e < f < a < 1$ باشد به‌گونه‌ای که عناصر مجموعه‌های $\{b, f\}$ و $\{c, e\}$ غیر قابل مقایسه‌اند و عمل دوتایی ضرب توسط جدول زیر مشخص شود:

$.$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	c	c	c	0	d	d	a
b	0	c	c	c	0	0	d	b
c	0	c	c	c	0	0	0	c
d	0	0	0	0	0	0	0	d
e	0	d	0	0	0	d	d	e
f	0	d	d	0	0	d	d	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

چون a تنها عنصر بیشین این مشبکه است، از اینرو بنا به گزاره ۵.۳ تمام عناصر سره این مشبکه شبه‌تحویل‌ناپذیرند.
(الف) ازآنجا که داریم $b \wedge f = d \leqslant e$ اما $b \nleqslant e$ و $e \nleqslant f$. پس e عنصر $\wedge$-اول و همچنین . -اول نیست.
(ب) ۰ عنصر اولیه نیست زیرا $d \wedge b = 0$ و برای هر $n \geqslant 2$ داریم $b^n = c$. درنتیجه $0 \nleqslant d$ و برای هر عدد طبیعی n داریم $0 \nleqslant b^n$.

با توجه به مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی مفهوم شبه‌تحویل‌ناپذیری معادل هیچ کدام از مفاهیم اول، تحویل‌ناپذیری و بیشین بودن نیست و رابطه‌های نمودار زیر را برای این مفاهیم داریم.



در قضیه بعد شرطی را به‌دست می‌آوریم که تمام مفاهیم نمودار بالا معادل‌اند.

قضیه ۹.۳. فرض کنید L مشبکه ضربی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱. L مشبکه منظم است.

۲. هر عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر L بیشین است.

۳. هر عنصر اولیه L بیشین است.

۴. هر عنصر اولیه L یک عنصر اول مینیمال است.

اثبات. بنا به قضیه ۴.۲ داریم $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ و با توجه به اینکه هر عنصر اولیه، عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر هست، بنا به تعاریف $(2) \Rightarrow (3)$ نیز برقرار است. از اینرو کافی است قسمت $(1) \Rightarrow (2)$ را ثابت کنیم. فرض کنید L مشبکه منظم است و a عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر از مشبکه L و m عنصر بیشین بزرگتر مساوی a باشد. اگر $a \lneqq m$، آن‌گاه بنا به فرض چون مشبکه L به‌طور فشرده تولید شده است عنصرفشرده $c \in L$ وجود دارد به‌طوری که $c \leqslant m$ و $c \nleqslant a$. حال با توجه به فرض عنصر c متمم‌دار است. از اینرو وجود دارد عنصر $c' \in L$ به‌طوری که $c \wedge c' = c.c' = 0$ و $c \vee c' = 1$. در نتیجه

$$\begin{aligned} a &= a \vee 0 = a \vee (c.c') \\ &\leqslant (a \vee c).(a \vee c') \\ &= [(a \vee c).a] \vee [(a \vee c).c'] \\ &= (a.a) \vee (c.a) \vee (a.c') \vee (c.c') \\ &\leqslant a. \end{aligned}$$

درنتیجه $a = (a \vee c).(a \vee c')$. حال چون $c \vee c' = 1$، داریم $(a \vee c) \vee (a \vee c') = 1$ و چون a عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر است، داریم $a \vee c = 1$ یا $a \vee c' = 1$. اگر $a \vee c = 1$، آن‌گاه $a = a \vee c'$ و از اینرو $c' \leqslant a \leqslant m$. حال چون $c \leqslant m$، داریم $1 \leqslant m$ که تناقض است و اگر $a \vee c' = 1$، آن‌گاه $a = a \vee c$. در نتیجه $c \leqslant a$ که این مورد هم تناقض است. از اینرو اگر m عنصر بیشین شامل a باشد باید داشته باشیم $a = m$ و این یعنی a عنصر بیشین است. □

در اینجا نوع دیگری از رادیکال را با توجه به عمل $\wedge$ تعریف می‌کنیم و ارتباط شبه‌تحویل‌ناپذیر بودن یک عنصر با این نوع رادیکال و رادیکالی که در قسمت پیش‌نیازها آورده شده است را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید a عنصری سره از مشبکه ضربی L باشد. در این‌صورت $\wedge$-رادیکال را برای a به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt[\wedge]{a} := \bigwedge \{p \in L \mid p \text{ عنصر } \wedge\text{-اول بزرگتر از } a \text{ است}\}$$

و برای اینکه بتوان این رادیکال را برای تمام عناصر مشبکه ضربی تعریف نماییم قرارداد می‌کنیم $\sqrt[\wedge]{1} = 1$.

لم **۱۱.۳**. فرض کنید a و b دو عنصر سره از مشبکه ضربی L باشند به‌گونه‌ای که $a \leqslant b \leqslant \sqrt{a}$. در این‌صورت a شبه‌تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر b شبه‌تحویل‌ناپذیر باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید a شبه‌تحویل‌ناپذیر باشد و برای $x, y \in L$ داشته باشیم $b = x \wedge y$ و $x \vee y = ۱$. در این‌صورت بنا به قضیه ۶.۲، چون $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ وجود دارد $x', y' \in L$ به‌طوری که $a = x' \wedge y'$، $x' \vee y' = ۱$، $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$ و $\sqrt{y} = \sqrt{y'}$. از اینرو بنا به فرض $x' = ۱$ یا $y' = ۱$ و در نتیجه $x = ۱$ یا $y = ۱$. پس b شبه‌تحویل‌ناپذیر می‌باشد. قسمت برگشت نیز دقیقاً مانند حالت رفت اثبات می‌شود. □

در نتیجه زیر نشان می‌دهیم که مفهوم شبه‌تحویل‌ناپذیر بودن یک مفهوم رادیکال است، به این معنا که یک عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر است اگر وتنها اگر رادیکال‌های آن شبه‌تحویل‌ناپذیر باشد.

نتیجه **۱۲.۳**. فرض کنید a عنصر سره‌ای از مشبکه ضربی L باشد. در این‌صورت، شبه‌تحویل‌ناپذیر بودن سه عنصر a، $\sqrt[3]{a}$ و $\sqrt{a}$ با هم معادل هستند.

اثبات. با توجه به رابطه $x.y \leqslant x \wedge y$ برای هر دو عنصر x و y در هر مشبکه ضربی L، هر عنصر ·-اول همواره عنصر $\wedge$-اول است. از اینرو برای هر $a \in L$ رابطه زیر همواره برقرار است:

$$a \leqslant \sqrt[3]{a} \leqslant \sqrt{a}. \tag{۲.۳}$$

درنتیجه حکم بنا به لم ۱۱.۳ ثابت می‌شود. □

ملاحظه **۱۳.۳**. با توجه به تعریف رادیکال در بخش پیش‌نیازها، برای عنصر سره a ازمشبکه ضربی L داریم، برای هر عدد طبیعی n، $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}$. درنتیجه بنا به لم ۱۱.۳ ، a شبه‌تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر a^n شبه‌تحویل‌ناپذیر باشد.

۴ تجزیه هم‌بیشین در مشبکه‌های ضربی

در این بخش می‌خواهیم مشبکه‌های ضربی را مورد بررسی قرار دهیم که هر عنصر آنها را بتوان به‌صورت حاصل‌ضرب هم‌بیشینی از عناصر شبه‌تحویل‌ناپذیر نوشت. از اینرو با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف **۱.۴**. فرض کنید a عنصر سره‌ای از مشبکه ضربی L باشد. در این‌صورت گوییم:
(۱) a دارای تجزیه هم‌بیشین است، هرگاه بتوان آن را به‌صورت حاصل‌ضربی مانند $a = a_۱ . \cdots . a_n$ از عناصر L نوشت به‌گونه‌ای که a_iها دوبه‌دو هم‌بیشین باشند، یعنی برای هر $i \neq j$، $a_i \vee a_j = ۱$. در این حالت با توجه به فرض برای هر $i \neq j$، $a_i \vee a_j = ۱$. از اینرو داریم $a = a_۱ . \cdots . a_n = a_۱ \wedge \cdots \wedge a_n$.
(۲) a دارای تجزیه هم‌بیشین کامل است، هرگاه یا a شبه‌تحویل‌ناپذیر باشد و یا تجزیه هم‌بیشین داشته باشد که هر یک از عامل‌های آن شبه‌تحویل‌ناپذیر باشد.

مثال **۲.۴**. (۱) فرض کنید مشبکه ضربی L دارای حداقل دو عنصر بیشین m و n باشد. قرار دهید $a := m \wedge n$. در این‌صورت، $m \wedge n$ تجزیه هم‌بیشین کامل برای a است. در صورتی که بنا به تعریف a، a شبه‌تحویل‌ناپذیر نیست چون $m \vee n = ۱$، $m \neq ۱$ و $n \neq ۱$.
(۲) اگر L مجموعه ایده‌آل‌های حلقه جابجایی و یک‌دار R باشد، آن‌گاه L با اعمال اشتراک، جمع و ضرب ایده‌آل‌ها به ترتیب برای $\wedge$ ، $\vee$ و ·، مشبکه ضربی است. به‌سادگی می‌توان نشان داد ایده‌آل صفر از حلقه جابجایی و یک‌دار R به‌عنوان عنصری از L دارای تجزیه هم‌بیشین کامل است اگر و تنها اگر تعداد عناصر خودتوان حلقه R متناهی باشد. از اینرو اگر R حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار با تعداد نامتناهی عنصر خودتوان باشد، آن‌گاه ایده‌آل صفر به‌عنوان عنصری از مشبکه ضربی ایده‌آل‌های این حلقه دارای تجزیه هم‌بیشین کامل نیست.

در قضیه زیر نشان می‌دهیم تجزیه هم‌بیشین کامل در صورت وجود یکتا است.

قضیه **۳.۴** (یکتایی تجزیه). فرض کنید a عنصر سره‌ای از مشبکه ضربی L و دارای تجزیه هم‌بیشین کامل باشد. در این‌صورت این تجزیه هم‌بیشین کامل یکتا است.

اثبات. فرض کنید $a = a_1.\cdots.a_n$ و $a = b_1.\cdots.b_m$ دو تجزیه هم‌بیشین کامل برای عنصر a ازمشبکه ضربی L هستند (در این‌صورت n یا m می‌توانند ۱ باشند). برای هر $i \in \{1, ..., n\}$ و $j \in \{1, ..., m\}$ قرار دهید $c_{ij} := a_i \vee b_j$. به‌وضوح c_{ij}ها دوبه‌دو هم‌بیشین هستند و برای هر $i \in \{1, ..., n\}$ داریم:

$$\begin{aligned} a_i &\leqslant c_{i1}.\cdots.c_{im} \\ &= (a_i \vee b_1).\cdots.(a_i \vee b_m) \\ &\leqslant a_i \vee (b_1.\cdots.b_m) \\ &= a_i \vee a \\ &= a_i. \end{aligned}$$

در نتیجه $a_i = c_{i1}.\cdots.c_{im} = c_{i1} \wedge \cdots \wedge c_{im}$ و چون a_i عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر است و c_{ij}ها دوبه‌دو هم‌بیشین هستند، اندیس یکتا $j_i \in \{1, ..., m\}$ وجود دارد به‌طوری که $a_i = c_{ij_i}$ و برای هر $j \in \{1, ..., m\} \setminus \{j_i\}$، $c_{ij} = 1$. به‌طور مشابه برای هر $j \in \{1, ..., m\}$ اندیس یکتا $i_j \in \{1, ..., n\}$ وجود دارد به‌طوری که $b_j = c_{i_j j}$ و برای هر $i \in \{1, ..., n\} \setminus \{i_j\}$، $c_{ij} = 1$. در نتیجه یک تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه $\{a_1, ..., a_n\}$ و $\{b_1, ..., b_m\}$ وجود دارد و عناصر متناظر با هم مساوی هستند. از اینرو صرف‌نظر از ترتیب عامل‌ها در تجزیه‌های عنصر a، تعداد و عامل‌های آنها یکتا است. □

ملاحظه **۴.۴**. با توجه به گزاره ۳.۳، اگر عنصر سره a از مشبکه ضربی L را بتوان به‌صورت $a = a_1.\cdots.a_n$ یا $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ نوشت جایی که عامل‌های تجزیه شبه‌تحویل‌ناپذیر باشند، آن‌گاه می‌توان برای a تجزیه هم‌بیشین کامل پیدا کرد.

تعریف **۵.۴**. فرض کنید L مشبکه ضربی باشد. در این‌صورت گوییم L دارای خاصیت تجزیه هم‌بیشین کامل است (برای خلاصه‌نویسی می‌نویسیم، دارای خاصیت CCF است)، هرگاه هر عنصر سره آن دارای تجزیه هم‌بیشین کامل باشد.

مثال **۶.۴**. (الف) بنا به قضیه ۵.۳، هر مشبکه ضربی با تنها یک عنصر بیشین دارای خاصیت CCF است.
(ب) هرگاه مشبکه ضربی یک زنجیر باشد؛ آن‌گاه هر عنصر سره آن عنصری شبه‌تحویل‌ناپذیر است. از اینرو هر زنجیر دارای خاصیت CCF می‌باشد.

در قضیه زیر شرایط معادلی برای مشبکه‌های ضربی دارای خاصیت CCF به‌دست می‌آوریم.

قضیه **۷.۴**. فرض کنید L مشبکه ضربی باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل‌اند.

۱. L دارای خاصیت CCF است.

۲. برای هر زیرمجموعه نامتناهی $\{m_i\}_{i\in I}$ از $Max(L)$ زیرمجموعه متناهی K از I وجود دارد به‌طوری که برای هر $j \in I \setminus K$ داریم $\bigwedge_{j\neq i\in I} m_i \leqslant m_j$.

۳. برای هر زیرمجموعه نامتناهی $\{m_i\}_{i\in I}$ از $Max(L)$ وجود دارد $j \in I$ به‌طوری که $\bigwedge_{j\neq i\in I} m_i \leqslant m_j$.

۴. $Max(L)$ فضای توپولوژی نوتری با توپولوژی زاریسکی است.

اثبات. (۱) ⇐ (۲) فرض کنید $\{m_i\}_{i\in I}$ زیرمجموعه نامتناهی از $Max(L)$ باشد. قرار دهید $a := \wedge_{i\in I} m_i$. با توجه به فرض و قضیه ۳.۴ عامل‌های شبه‌تحویل‌ناپذیر در تجزیه یکتای عنصر a صرف‌نظر از ترتیب قرار گرفتن یکتا بوده و از اینرو تعدادشان متناهی است. حال فرض کنید زیرمجموعه نامتناهی J از I یافت شود به‌گونه‌ای که برای هر $j \in J$ داشته باشیم $\bigwedge_{j\neq i\in I} m_i \nleqslant m_j$. فرض کنید $j \in J$ ثابت باشد، پس داریم $(\bigwedge_{j\neq i\in I} m_i) \vee m_j = 1$. قرار دهید $b := \bigwedge_{j\neq i\in I} m_i$. با توجه فرض b دارای تجزیه هم‌بیشین کامل مانند $b = b_1.\cdots.b_n$ است. حال چون هر عنصر بیشین یک عنصر شبه‌تحویل‌ناپذیر نیز هست، $a = m_j.b_1.\cdots.b_n$ تجزیه هم‌بیشین کامل یکتا برای عنصر a خواهد بود (چون m_j بیشین و در نتیجه شبه‌تحویل‌ناپذیر است. همچنین بنا به روش پیدا کردن b_iها چون $b \vee m_j = 1$، برای هر i داریم $b_i \vee m_j = 1$). از اینرو برای هر $j \in J$، m_j یک عامل شبه‌تحویل‌ناپذیر در تجزیه یکتای هم‌بیشین کامل a خواهد بود و این تناقض با متناهی بودن تعداد عامل‌های شبه‌تحویل‌ناپذیر در تجزیه یکتای هم‌بیشین کامل a است.
(۲) ⇐ (۳) آشکار است.
(۳) ⇐ (۴) فرض کنید $Max(L)$ فضای توپولوژی نوتری با توپولوژی زاریسکی نباشد. در این‌صورت زنجیر غیر ایستای

$$\Omega(a_1) \subsetneq \Omega(a_2) \subsetneq \cdots \subsetneq \Omega(a_n) \subsetneq \cdots$$

از مجموعه‌های باز $Max(L)$ را داریم. در نتیجه برای هر $i \geqslant ۲$ وجود دارد

$$m_i \in \Omega(a_i) \setminus \Omega(a_{i-۱}).$$

حال فرض کنید $j \geqslant ۲$ عددی ثابت باشد و قرار دهید $a := m_۱ \wedge \cdots \wedge m_{j-۱} \wedge a_j$. اگر $a \leqslant m_j$، آن‌گاه $a_j \leqslant m_j$ یا $m_i \leqslant m_j$ برای حداقل یک $i \gneqq j$ که هر دو تناقض است. پس $a \nleqslant m_j$. حال اگر $\{j\} \setminus \{۲, ۳, \ldots\} \ni i$، آن‌گاه دو حالت را در نظر می‌گیریم. اگر $j \gneqq i$، آن‌گاه $a \leqslant m_i$ و اگر $i \gneqq j$، آن‌گاه بنا به انتخاب m_i و تعریف a داریم $a \leqslant m_i$. درنتیجه $a \leqslant \bigwedge_{j\neq i\in I} m_i$ ولی $a \nleqslant m_j$. پس $\bigwedge_{j\neq i\in I} m_i \nleqslant m_j$، که تناقض است.
(۴) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید گزاره (۱) درست نباشد. در این‌صورت عنصر سره a از مشبکه ضربی L وجود دارد به‌طوری که دارای تجزیه هم‌بیشین کامل نیست. پس a شبه‌تحویل‌ناپذیرنیست و از اینرو وجود دارد عناصر سره $a_۱$ و $b_۱$ از مشبکه L به‌طوری که $a = a_۱ \wedge b_۱$ و $a_۱ \vee b_۱ = ۱$. اگر $a_۱$ و $b_۱$ دارای تجزیه هم‌بیشین کامل باشند، آن‌گاه a نیز بنا به ملاحظه ۴.۴، دارای تجزیه هم‌بیشین کامل خواهد بود که تناقض است. از اینرو $a_۱$ یا $b_۱$ دارای تجزیه هم‌بیشین کامل نیست. بدون کم شدن از کلیت موضوع می‌پذیریم $b_۱$ دارای تجزیه هم‌بیشین کامل نباشد. از اینرو وجود دارد عناصر سره $a_۲$ و $b_۲$ از مشبکه L به‌طوری که $b_۱ = a_۲ \wedge b_۲$ و $a_۲ \vee b_۲ = ۱$. با ادامه همین روند می‌توان تجزیه‌های هم‌بیشین زیر را برای عنصر a به‌دست آورد.

$$a = a_۱ \wedge b_۱ = a_۱ \wedge a_۲ \wedge b_۲ = a_۱ \wedge a_۲ \wedge a_۳ \wedge b_۳ = \cdots .$$

حال برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots\}$ وجود دارد عنصر بیشین m_i به‌طوری که $a_i \leqslant m_i$. با توجه به روند ساخت a_iها و لم ۵.۲ داریم

$$m_i \vee (\textstyle\bigwedge_{j\neq i} m_i) \geqslant a_i \vee (a_۱.\cdots.a_{i-۱}.b_i) = ۱.$$

بنابراین برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots\}$ داریم $m_i \vee (\bigwedge_{j\neq i} m_i) = ۱$. در نتیجه برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots\}$ داریم:

$$m_i \in \Omega(\textstyle\bigwedge_{j\geqslant i+۱} m_j) \setminus \Omega(\bigwedge_{j\geqslant i} m_j).$$

از اینرو زنجیر صعودی و غیر ایستای

$$\Omega(\textstyle\bigwedge_{j\geqslant ۱} m_j) \subsetneqq \Omega(\bigwedge_{j\geqslant ۲} m_j) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \Omega(\bigwedge_{j\geqslant n} m_j) \subsetneqq \cdots$$

از زیرمجموعه‌های باز $Max(L)$ را داریم که تناقض است. □

نتیجه **۸.۴**. (۱) هر مشبکه متناهی ضربی دارای خاصیت CCF است.
(۲)هر مشبکه ضربی که دارای تعداد متناهی عنصر بیشین باشد، دارای خاصیت CCF نیز است.

همه‌ی مشبکه‌های ضربی دارای خاصیت CCF نمی‌باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال **۹.۴**. فرض کنید $C([۰, ۱])$ حلقه توابع پیوسته حقیقی مقدار روی بازه یکه $[۰, ۱]$ باشد. در این‌صورت، اگر L مجموعه ایده‌آل‌های حلقه $C([۰, ۱])$ باشد، L با اعمال اشتراک، جمع و ضرب ایده‌آل‌ها به ترتیب برای $\wedge$ ، $\vee$ و . یک مشبکه ضربی است. بنا به [۵]، $Max(L)$ با $[۰, ۱]$ یکریخت توپولوژیک است و چون فضای توپولوژیک $[۰, ۱]$ نوتری نیست، پس مشبکه ضربی L با توجه به قضیه ۷.۴ دارای خاصیت CCF نمی‌باشد.

فهرست منابع

[1] Anderson, D.D. and Jayaram, C., 1995. Regular lattices. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 30(3), pp.379–388.

[2] Alarcon, F., Anderson, D.D. and Jayaram, C., 1995. Some results on abstract commutative ideal theory. *Periodica Mathematica Hungarica*, 30(1), pp.1–26. doi: 10.1007/bf01876923

[3] Brewer, J.W. and Heinzer, W.J., 2002. On decomposing ideals into products of comaximal ideals. *Communications in Algebra*, 30(12), pp.5999–6010. doi: 10.1081/agb-120016028

[4] Dumitrescu, T. and Epure, M., 2022. Comaximal factorization lattices. *Communications in Algebra*, 50(9), pp.4024–4031. doi: 10.1080/00927872.2022.2057512

[5] Gillman, L. and Jerison, M., 1960. *Rings of continuous functions*. Van Nostrand, Princeton.

[6] Iorgulescu, A., 2004. Classes of BCK algebras-Part III. *Preprint series of the Institute of Mathematics of the Romanian Academy*, 3, pp.1–37.

[7] Juett, J., 2012. Generalized comaximal factorization of ideals. *Journal of Algebra*, 352(1), pp.141–166. doi:10.1016/j.jalgebra.2011.11.008

[8] Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T. and Ono, H., 2007. *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*. Elsevier.

[9] Noether, E., 1921. Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83(1-2), pp.24–66. doi: 10.1007/bf01464225

[10] Thakare, N.K., Manjarekar, C.S. and Maeda, S., 1988. Abstract spectral theory II: minimal characters and minimal spectrums of multiplicative lattices. *Acta Sci. Math*, 52, pp.53–67.

[11] Ward, M. and Dilworth, R.P., 1939. Residuated lattices. *Trans. Am. Math. Soc.*, 45, pp.335–354. doi: 10.1090/S0002-9947-1939-1501995-3

Pseudo-irreducible elements in multiplicative lattices

Esmaeil Rostami,(1) [12] Shokofeh Ghorbani(1)

(1) Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

Communicated by: Mehrdad Namdari

Received: 20 July 2023 Accepted:20 November 2023

Abstract: In this paper, we define the concept of pseudo-irreducible elements in multiplicative lattices and examine its relationship with other important concepts of multiplicative lattices such as prime elements, primary elements, and maximum elements, and then with the help of this concept, we define and analyze the complete comaximal factorization in multiplicative lattices. In particular, we characterize multiplicative lattices whose every element can be written as a product of pseudo-irreducible and pairwise comaximal elements.

Keywords: Multiplicative lattice, Pseudo-irreducible element, Comaximal factorization, Complete comaximal factorization.

[12] Corresponding author.
E-mail addresses: e_rostami@uk.ac.ir (E. Rostami), sh.ghorbani@uk.ac.ir (Sh. Ghorbani).