مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، ص ۴۲۱-۴۳۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.44275.2181

زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر و رده‌بندی مدول‌های توزیع‌پذیر و آرتینی

احمد خوجالی [۱]

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

دبیر مسئول: امیر مافی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۹/۱۰

چکیده: فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یک‌دار و M یک R-مدول یکانی باشد. در این مقاله ساختار زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر را مورد مطالعه قرار داده و ابتدا ثابت می‌کنیم، زیرمدول K دارای شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\mathrm{Soc}(M/K)$ نابدیهی باشد که نتیجه می‌دهد ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی K است اگر و فقط اگر K دارای یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر $\mathfrak{m}$- اولین باشد. پس از آن زیرمدول‌هایی از M را که به‌صورت اشتراک غیر زاید زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیرند، رده‌بندی می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که اگر R نوتری باشد، آن‌گاه M آرتینی است اگر و فقط اگر زیرمدول صفر آن تجزیه اولیه‌ای داشته باشد که مولفه‌های آن زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیراند. درنهایت، نشان می‌دهیم M توزیع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر آن به‌صورت

$$\left\{\mathfrak{m}(Rx)_{(\mathfrak{m})} \mid x\in M, \mathfrak{m}\in \mathrm{Max}(R)\bigcap \mathrm{Supp}(Rx)\right\}$$

باشد.

واژه‌های کلیدی: زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر، زیرمدول اولین، مدول توزیع‌پذیر.

رده‌بندی ریاضی: 13A15; 13C99

۱ مقدمه

در سراسر مقاله R یک حلقه جابه‌جایی یک‌دار و M یک R-مدول یکانی است. خانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M را یک ابرخانواده برای زیرمدول K می‌نامیم هرگاه K_i، برای هر $i\in I$، اکیداً شامل K باشد. یک ابرخانواده برای K، متناهی (نامتناهی) نامیده می‌شود

[۱] نویسنده مسئول مقاله (A. Khojali) khojali@uma.ac.ir

هرگاه مجموعه اندیس‌گذار I متناهی (نامتناهی) باشد. اشتراک $\bigcap_{i\in I} K_i$ را اشتراک ابرخانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم. یک زیرمدول را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه اشتراک هیچ ابرخانواده متناهی نباشد و آن‌را کاملاً تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه اشتراک هیچ ابرخانواده‌ای (متناهی یا نامتناهی) نباشد. وجود زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر نتیجه‌ای از لم زُرن است. به‌وضوح هر زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر، تحویل‌ناپذیر است، ولی عکس آن همواره برقرار نیست. به‌عنوان مثال، یک ایده‌آل اول کاملاً تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر ماکسیمال باشد، در حالی‌که یک ایده‌آل اول همواره تحویل‌ناپذیر است. زیرمدول N از M را اولین می‌نامیم هرگاه $\mathcal{S}(N) = \{r \in R : N \subsetneq N :_M r\}$ یک ایده‌آل R باشد (یعنی تحت جمع بسته باشد). در این‌صورت ایده‌آل $\mathcal{S}(N)$ یک ایده‌آل اول R است، که ایده‌آل الحاقی N نامیده می‌شود و به منظور بیان روشن می‌گوییم N یک زیرمدول $\mathcal{S}(N)$- اولین M است (مراجع [۲]، [۴]، بخش ۲] یا [۵، صفحه ۲۷۷۳] را ببینید). بنابر آنچه در [۴، قضیه ۱ و قضیه ۳] ثابت شده است، و به‌سادگی برای مدول‌ها هم قابل تعمیم است، می‌توان دید که هر زیرمدول تحویل‌ناپذیر اولین است و هر زیرمدول اشتراک یک ابرخانواده از زیرمدول‌های اولین است. متاسفانه، اشتراک دو زیرمدول $\mathfrak{p}$- اولین، برای ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$، الزاماً $\mathfrak{p}$- اولین نیست و در نتیجه تعمیم نظریه‌ای مشابه تجزیه لاسکر–نوتر مقدور نیست. با این حال، وضعیت در مورد زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر بسیار بهتر است (گزاره ۶.۳) و تحت شرایطی می‌توان خواص بیشتری از آنها را مورد بررسی قرار داد (گزاره ۶.۲ و قضیه ۳.۳). پیکربندی مقاله حاضر از این قرار است. در فصل نخست چندین رده‌بندی برای زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر ارائه کرده و ثابت می‌کنیم که در یک مدول لاسکرین قوی M (یعنی؛ برای هر زیرمدول N از M عدد طبیعی n وجود دارد که $(\sqrt{(N:_R M)})^n \subseteq (N:_R M)$) زیرمدول N کاملاً تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر اولیه بوده و $\mathcal{S}(N)$ یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد. در نتیجه، برای یک مدول نوتری، تجزیه یک زیرمدول به‌صورت اشتراک زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر، به تجزیه اولیه آن تقلیل می‌یابد. فصل دوم به این مساله می‌پردازد که تحت چه شرایطی یک زیرمدول را می‌توان به‌صورت اشتراک غیر زاید یک خانواده از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر نوشت. چندین شرط معادل برای این مساله ارائه کرده و نشان می‌دهیم که اگر بتوان یک زیرمدول را به‌صورت اشتراک غیرزائد خانواده‌ای از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر نوشت، آن‌گاه می‌توان تجزیه کانونی اولین آن را به یک تجزیه غیرزائد تبدیل کرد. با استفاده از این گزاره‌ها، ثابت می‌کنیم که اگر R یک حلقه نوتری باشد، آن‌گاه برای R–مدول M شرط‌های (۱) M آرتینی است؛ (۲) هر زیرمدول M به‌صورت اشتراک یک ابرخانواده متناهی از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است؛ (۳) زیرمدول صفر M به‌صورت اشتراک یک ابرخانواده متناهی از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است؛ معادل‌اند. سرانجام، در فصل سوم نشان می‌دهیم که مدول M توزیع‌پذیر است اگر و فقط اگر زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر آن به‌صورت

$$\{\mathfrak{m}(Rx)_{(\mathfrak{m})} \mid x \in M, \ \ \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R) \bigcap \operatorname{Supp}(Rx)\}$$

باشند. برای زیرمدول‌های K و N از M قرار می‌دهیم

$$(N :_R K) = \{r \in R \mid rK \subseteq N\}.$$

برای ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R قرار می‌دهیم

$$N_{(\mathfrak{p})} = \{m \in M \mid \exists s \in R \setminus \mathfrak{p};\ \ sm \in N\}.$$

ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را یک ایده‌آل وابسته بورباکی قوی K می‌نامیم هرگاه $m \in M$ موجود باشد که $\mathfrak{p} = (K :_R m)$. برای سایر نمادها که توضیحی درباره آنها داده نشده است، خواننده می‌تواند [۱] را بنگرد.

۲ زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر

تعریف **۱.۲.** فرض کنید M یک R–مدول باشد. یک زیرمدول محض M را کاملاً تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه اشتراک هیچ ابرخانواده‌ای نباشد.

ملاحظه زیر و قضیه ۵.۳ نشان می‌دهد که برای توسعه نظریه‌ای مشابه تجزیه لاسکر–نوتر، زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر جانشین مناسبی برای زیرمدول‌های اولیه (در حالت نوتری) هستند. یادآوری می‌کنیم که اگر M یک R–مدول و $K = \bigcap\limits_{0\neq L\leq M} L$ غیر صفر باشد، آن‌گاه K ساده است.

ملاحظه **۲.۲.** (۱) به سادگی می‌توان نشان داد که زیرمدول سره N از M کاملاً تحویل‌ناپذیر است هرگاه عضوی مانند $m \in M$ موجود باشد که N با خاصیت $m \notin N$ ماکسیمال است. در واقع این خاصیت برای این‌که N کاملاً تحویل‌ناپذیر باشد کافی است، زیرا

m عضوی از اشتراک هر ابرخانواده N است. از طرفی اگر N زیرمدولی کاملاً تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه عضو m از اشتراک ابرخانواده‌ای که همگی اکیداً شامل N هستند موجود است به طوری که $m \notin N$. واضح است که N با خاصیت $m \notin N$ ماکسیمال خواهد بود.

(۲) فرض کنید N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد. در این‌صورت، بنابر اثبات [۴، قضیه ۱] ملاحظه می‌شود که N یک زیرمدول اولین M است. نشان می‌دهیم $\mathcal{S}(N)$، ایده‌آل اول الحاقی N، یک ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی N است. در واقع، اگر قرار دهیم $N^* := \bigcap_{K\in\Delta} K$ که در آن $\Delta = \{K \le M \mid N \subsetneq K\}$، آن‌گاه N^*/N یک R–مدول ساده است و در نتیجه ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که $N^*/N = R/\mathfrak{m}$. بنابراین، $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی N است. در واقع، داریم

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{m}\} = \{\mathcal{S}(N)\}.$$

بنابراین، زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر، زیرمدول‌های اولین با ایده‌آل الحاقی ماکسیمال‌اند. توجه کنید که اگر $K \subseteq N$ زیرمدول‌های M باشند، آن‌گاه N زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است اگر و فقط اگر N/K زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M/K باشد.

یادآوری می‌کنیم که زیرمدول N از R–مدول M اساسی نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول غیرصفر L از M داشته باشیم $L \bigcap N \neq \{\circ\}$. به‌وضوح هر ایده‌آل غیر صفر یک حوزه صحیح یک زیرمدول اساسی میدان کسرهای آن است.

لم **۳.۲.** اگر N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد، آن‌گاه N^* یک زیرمدول اساسی M است.

اثبات. فرض کنید $x \in M$ طوری باشد که N با رابطه $x \notin N$ ماکسیمال است. در این‌صورت برای هر زیرمدول L از M یا $L + N = N$، که در این حالت $L \subseteq N$ و در نتیجه $L \bigcap N^* = L$؛ یا این‌که $N^* = N + Rx \subseteq L + N$، که در این حالت اعضای $y \in L$ و $z \in N$ به‌دست می‌آیند که

$$\circ \neq y = x - z \in L \bigcap N^*$$

و حکم ثابت می‌شود (توجه کنید که $y \neq \circ$؛ زیرا در غیر این‌صورت $x = z \in N$ که یک تناقض است). □

تعریف **۴.۲.** (۱) فرض کنید M یک R–مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه اندیس‌دار از R–مدول‌ها باشد به‌قسمی‌که M زیرمدولی از $\prod_{i\in I} M_i$ است. در این‌صورت M را یک زیرضرب مستقیم گردایه $\{M_i\}_{i\in I}$ می‌نامیم هرگاه، برای هر $i \in I$، همریختی طبیعی $\pi_{i_{|M}} : M \to M_i$ یک برویختی باشد. اگر M یک زیرضرب مستقیم گردایه $\{M_i\}_{i\in I}$ باشد، آن‌گاه M را یک زیرضرب مستقیم تحویل‌ناپذیر این گردایه می‌نامیم هرگاه $i \in I$ موجود باشد که $\pi_{i_{|M}}$ یک یکریختی باشد.

(۲) ساکل مدول M را با $\mathrm{Soc}(M)$ نشان می‌دهیم و آن‌را مجموع زیرمدول‌های ساده M تعریف می‌کنیم.

قضیه زیر که تعمیمی از [۶، قضیه ۱.۳] است، چندین شرط معادل برای این‌که یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر باشد، ارائه می‌کند. به‌ویژه، از این قضیه نتیجه می‌شود که کاملاً تحویل‌ناپذیر بودنِ یک زیرمدول تحت موضعی‌سازی نسبت به ایده‌آل الحاقی آن، حفظ می‌شود.

قضیه **۵.۲.** فرض کنید M یک R–مدول باشد. اگر N یک زیرمدول سره M باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) M/N یک زیرضرب مستقیم تحویل‌ناپذیر است؛

(۲) N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر است؛

(۳) $\mathrm{Soc}(M/N)$ یک زیرمدول ساده و اساسی است؛

(۴) N تحویل‌ناپذیر است و $\mathrm{Soc}(M/N)$ نابدیهی است؛

(۵) N تحویل‌ناپذیر است و ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که $N \subsetneq (N :_M \mathfrak{m})$؛

(۶) ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و $x \in M \setminus N$ وجود دارند که $\mathfrak{m} = (N :_R x)$؛

(۷) ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که $N = N_{(\mathfrak{m})}$ و $N_{\mathfrak{m}}$ یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر $M_{\mathfrak{m}}$ است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید N کاملاً تحویل‌ناپذیر نباشد. در این‌صورت، ابرخانواده $\{N_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های M وجود دارد که $N=\bigcap_{i\in I} N_i$. در نتیجه نگاشت $f: M/N \longrightarrow \prod_{i\in I} M/N_i$ با ضابطه $f(m+N)=(m+N_i)_{i\in I}$ یک تکریختی است و برای هر $i\in I$، داریم $\ker(\pi_i\circ f)_{|_{M/N}}=N_i/N$ که با فرض مساله در تناقض است.

(۳) $\Leftarrow$ (۲) بنابر ملاحظه ۲.۲ و لم ۳.۲ واضح است.

(۲) $\Leftarrow$ (۳) چون $\operatorname{Soc}(M/N)$ ساده است، از این‌رو $x\in M$ وجود دارد که $\operatorname{Soc}(M/N)=(Rx+N)/N$. فرض کنید $\{N_i\}_{i\in I}$ یک ابرخانواده از زیرمدول‌های M برای N باشد. در این‌صورت، بنابر فرض، برای هر $i\in I$، $N_i/N\supseteq (Rx+N)/N$ که نتیجه می‌دهد $\bigcap_{i\in I} N_i\supseteq Rx+N\supsetneq N$. بنابراین N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از R-مدول‌ها باشد که M/N زیرمدولی از $\prod_{i\in I} M_i$ است و برای هر $i\in I$ نگاشت $\pi_{i_{|M/N}}$ پوشاست. از پوشا بودن $\pi_{i_{|M/N}}$ها نتیجه می‌گیریم $N=\bigcap_{i\in I}\ker(\pi_{i_{|M/N}})$ و در نتیجه $i\in I$ وجود دارد که $N=\ker(\pi_{i_{|M/N}})$. بنابراین $\pi_{i_{|M/N}}$ یک یکریختی است.

(۴) $\Leftarrow$ (۳) فرض کنید J و K زیرمدول‌هایی از M باشند که $N=J\bigcap K$. حال از اینکه $\operatorname{Soc}(M/N)$ یک زیرمدول اساسی است، نتیجه می‌گیریم که $N=J$ یا $N=K$ و در نتیجه N یک زیرمدول تحویل‌ناپذیر است.

(۵) $\Leftarrow$ (۴) بنابر فرض M/N زیرمدول ساده‌ای مانند $(Rx+N)/N$ دارد. از این‌رو ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که $\mathfrak{m}x\subseteq N$ و در نتیجه $x\in (N:_M \mathfrak{m})\setminus N$.

(۶) $\Leftarrow$ (۵) اشکار است که برای هر $x\in (N:_M \mathfrak{m})\setminus N$ داریم $\mathfrak{m}=(N:_R x)$.

(۷) $\Leftarrow$ (۶) فرض کنید N یک زیرمدول تحویل‌ناپذیر باشد. در این‌صورت، بنابر اثبات [۴، قضیه ۱]، N یک زیرمدول اولین است. در نتیجه، بنابر [۵، لم ۱.۳] خواهیم داشت $N=N_{(\mathfrak{m})}$. این نتیجه می‌دهد که M/N زیرمدولی از $M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}}$ است. با توجه به این‌که $\mathfrak{m}=\{r\in R: N\subsetneq N:_M r\}=\mathcal{S}(N)$، نتیجه می‌گیریم $\operatorname{Soc}(M/N)=(Rx+N)/N$ ساده است و هر زیرمدول M که اکیداً شامل N است، شامل $Rx+N$ نیز خواهد بود. این گزاره‌ها نشان می‌دهد که $N_{\mathfrak{m}}$ یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر $M_{\mathfrak{m}}$ است.

(۳) $\Leftarrow$ (۷) از $N=N_{(\mathfrak{m})}$ نتیجه می‌شود که M/N یک زیرمدول $M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}}$ است. بنابر اثبات (۳) $\Leftarrow$ (۲)، $\operatorname{Soc}(M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}})$ یک زیرمدول ساده و اساسی است که نتیجه می‌دهد $\operatorname{Soc}(M/N)$ نیز ساده و اساسی است. $\square$

گزاره ۶.۲. فرض کنید M یک R-مدول، $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال R و N یک زیرمدول تحویل‌ناپذیر $\mathfrak{m}$- اولیه M باشد. اگر عدد طبیعی n موجود باشد که $\mathfrak{m}^n\subseteq (N:_R M)$، آن‌گاه N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر است. به‌ویژه، اگر L زیرمدول تحویل‌ناپذیر یک مدول لاسکری قوی باشد، آن‌گاه L کاملاً تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر L اولیه بوده و ایده‌آل اول وابسته آن ماکسیمال باشد.

اثبات. چون N زیرمدول سره $(N:_M \mathfrak{m})$ است، از این‌رو بنابر قضیه ۵.۲، یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر است. حال فرض کنید L یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر در R-مدول لاسکری قوی M باشد. در این‌صورت تجزیه اولیه می‌نیمال L خود L است و در نتیجه L اولیه است. حال از ملاحظه ۲.۲ نتیجه می‌شود که ایده‌آل اول وابسته L ماکسیمال است. $\square$

برای اطلاعات بیشتر در مورد خاصیت لاسکری [۳] و [۷] را بنگرید.

تعریف ۷.۲. فرض کنید $N\subseteq K$ زیرمدول‌های R-مدول M باشند که در آن N کاملاً تحویل‌ناپذیر است. در این‌صورت N را یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر K می‌نامیم، هرگاه K اشتراک غیر زاید ابرخانواده‌ای از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد که N عضوی از آن خانواده است؛ یعنی حذف هر یک از مولفه‌های اشتراک زیرمدولی اکیداً بزرگتر از K را نتیجه می‌دهد.

توجه کنید که مفهوم یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر به ابرخانواده انتخاب شده بستگی دارد. با وجود این، مفهوم یادشده تحت شرایطی از ابرخانواده انتخابی مستقل است ([۶، قضیه ۲.۳] را بنگرید).

گزاره ۸.۲. فرض کنید M یک R-مدول و $N\subsetneq K$ زیرمدول‌های آن باشند. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) N یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر K است؛

(۲) $\operatorname{Soc}(M/K)$ نابدیهی است و یک توسیع اساسی $\operatorname{Soc}(N/K)$ نیست؛

(۳) $\operatorname{Soc}(N/K)$ یک زیرمدول سره $\operatorname{Soc}(N^*/K)$ است.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲) خانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M وجود دارد که $K=N\cap(\bigcap_{i\in I} K_i)$ و N در این اشتراک غیر زاید است. بنابر، ملاحظه ۲.۲، ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که برای هر $x\in (N^*\cap\bigcap_{i\in I} K_i)\setminus N$ داریم $\mathfrak{m}x\subseteq K$. در نتیجه $(Rx+K)/K$ یک زیرمدول ساده M/K است که زیرمجموعه N/K نیست.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) زیرمدول ساده $(Rx+K)/K$ از M/K وجود دارد که $(Rx+K)/K \cap N/K = 0$. بنابر ملاحظه ۲.۲، N^*/N یک زیرمدول ساده و اساسی M/N است. پس $(Rx+K)/K$ یک زیرمدول N^*/K است و حکم برقرار است.
(۱) $\Rightarrow$ (۳) عضوی مانند $x \in N^* \setminus N$ وجود دارد که $(Rx+K) \bigcap N = K$. نشان می‌دهیم خانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M وجود دارد که $Rx+K = \bigcap_{i\in I} K_i$. فرض کنید $y \in M \setminus Rx+K$ دلخواه باشد و قرار می‌دهیم $\Sigma := \{T \mid y \notin T$ و $Rx+K$ شامل M یک زیرمدول $T\}$. بنابر لم زُرن مجموعه Σ دارای یک عضو ماکسیمال مانند T_y است و T_y با خاصیت $y \notin T_y$ ماکسیمال است. حال، بنابر ملاحظه ۲.۲، T_y یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است. به‌وضوح $\bigcap_{y\notin Rx+K} T_y = Rx+K$ و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه زیر یک شرط لازم وکافی برای وجود شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر یک زیرمدول ارائه می‌کند ([۶، نتیجه ۱.۱۱] را ملاحظه کنید).

نتیجه ۹.۲. فرض کنید M یک R-مدول و K یک زیرمدول سره آن باشد. در این‌صورت K دارای یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر $\mathrm{Soc}(M/K)$ نابدیهی باشد.

اثبات. " $\Rightarrow$ " فرض کنید N یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر K باشد. بنابر قضیه ۵.۲ می‌توان فرض کرد $K \neq N$ و در نتیجه $K = N \bigcap B$ که در آن $K \subsetneq B$ زیرمدولی از M است. بنابر قضیه ۵.۲ ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که برای هر $x \in (B \bigcap N^*) \setminus N$ داریم $\mathfrak{m}x \subseteq K$. بنابراین $(Rx+K)/K$ یک زیرمدول ساده M/K است و در نتیجه $\mathrm{Soc}(M/K)$ نابدیهی است.
" $\Leftarrow$ " عضو $x \in M \setminus K$ و ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ وجود دارد که $\mathfrak{m}x \subseteq K$. بنابر لم زُرن زیرمدولی مانند N از M شامل K وجود دارد که با خاصیت $x \notin N$ ماکسیمال است که بنابر ملاحظه ۲.۲ یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر است. اشکار است که $K = (Rx+K) \cap N$. بنابر اثبات گزاره ۸.۲ ((۱) $\Rightarrow$ (۳)) خانواده $\{K_i\}_{\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M وجود دارد که $Rx+K = \bigcap_{i\in I} K_i$ و حکم ثابت می‌شود. □

گزاره ۱۰.۲. فرض کنید M یک R-مدول، K زیرمدول سره آن و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد. در این‌صورت $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی K است اگر و فقط اگر K یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر $\mathfrak{m}$- اولین داشته باشد.

اثبات. " $\Rightarrow$ " فرض کنید N یک شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر $\mathfrak{m}$- اولین K باشد. در این‌صورت، بنابر قضیه، ۵.۲، $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی K است.
" $\Leftarrow$ " فرض کنید $\mathfrak{m} = (K :_R x)$ یک ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی K باشد که در عین حال، یک ایده‌آل ماکسیمال است. فرض کنید N زیرمدولی از M شامل K باشد که با خاصیت $x \notin N$ ماکسیمال است. چون $\mathfrak{m} = (N :_R x)$ پس N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است. به‌وضوح $K = (Rx+K) \bigcap N$. بنابر اثبات گزاره ۸.۲ خانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M وجود دارد که $Rx+K = \bigcap_{i\in I} K_i$ و حکم ثابت می‌شود. □

۳ اشتراک‌های غیر زاید

در بخش قبل دیدیم که وجود شمارنده کاملاً تحویل‌ناپذیر غیر زاید منتهی به غیر صفر بودن ساکل برخی مدول‌ها می‌شود. در این بخش به بررسی اشتراک‌های غیر زاید و نتایج حاصل از آن می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اشتراک $\bigcap_{i\in I} K_i$ را غیر زاید می‌نامیم هرگاه برای هر $j \in I$ داشته باشیم $\bigcap_{i\in I} K_i \subsetneq \bigcap_{i\in I\setminus\{j\}} K_i$. لم زیر تعمیمی از [۶، لم ۲.۱] است.

لم ۱.۳. فرض کنید M یک R-مدول و K زیرمدول آن باشد. همچنین فرض کنید K اشتراک غیر زاید خانواده $\{K_i\}_{\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد. برای هر $i \in I$ قرار می‌دهیم $\widehat{K_i} := \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} K_j$. در این‌صورت

(۱) برای هر $i \in I$ عضوی مانند m_i وجود دارد که $K_i^* = K_i + Rm_i$.

(۲) برای هر $i \in I$، $\mathrm{Soc}(\widehat{K_i}/K)$ یک زیرمدول اساسی M/K است که توسط $m_i + K$ تولید می‌شود.

(۳) اگر N زیرمدولی از M باشد و $K_i \subsetneq N$، آن‌گاه $K \subsetneq \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} K_j \cap N$، برای هر $i \in I$.

(۴) با مفروضات بند (۱) قرار می‌دهیم $M_i = (Rm_i + K)/K$. در این‌صورت M_i یک R-مدول ساده است و

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq \mathrm{Soc}(M/K) \subseteq \prod_{i\in I} M_i.$$

اثبات. (۱) و (۲) را همزمان ثابت می‌کنیم. بنابر قضیه ۵.۲، $\mathrm{Soc}(M/K_i) = K_i^*/K_i$ یک زیرمدول اساسی M/K_i است. از طرفی، برای هر $i \in I$ داریم $\widehat{K_i} \nsubseteq K_i$. در نتیجه، بنابر لم ۳.۲، برای هر $m_i \in (\widehat{K_i} \bigcap K_i^*) \setminus K_i$ داریم $K_i^* = K_i + Rm_i$.
(۳) فرض کنید $i \in I$ دلخواه باشد. اگر N زیرمدولی از M و اکیداً شامل K_i باشد، آن‌گاه بنابر آنچه در اثبات بند (۱) گفته شد، $m_i \in N$ و در نتیجه $m_i \in (\bigcap_{j\in J} K_j) \cap N \setminus K$ که درستی ادعا را ثابت می‌کند.
(۴) ابتدا نشان می‌دهیم مجموعه عناصر $\{m_i + K\}_{i\in I}$، روی حلقه R، مستقل خطی‌اند. توجه کنید که برای هر $j \in I \setminus \{i\}$ داریم $m_j \in K_i$. فرض کنید $i \in I$ وجود دارد که $M_i \bigcap \Sigma_{n\in I\setminus\{i\}} M_n \neq \{0\}$. چون M_i یک R-مدول ساده است، پس اعضای $r_n \in R$ وجود دارند که $m_i = \Sigma r_n m_n$. این نتیجه می‌دهد $m_i \in K_i$ که با بند (۱) در تناقض است. بنابراین $\sum_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$. چون M_i ساده است، پس ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{p}_i$ وجود دارد که

$$\mathfrak{p}_i m_i \subseteq K_i \bigcap (\bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} K_j) = K.$$

در نتیجه

$$\mathrm{Soc}(M/K) \supseteq \sum_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

اگر $\mathrm{Soc}(M/K) = \bigoplus_{i\in I} M_i$، آن‌گاه حکم برقرار است. از این‌رو می‌توان فرض کرد $\mathrm{Soc}(M/K) \supsetneq \sum_{i\in I} M_i$. فرض کنید $m + K \in \mathrm{Soc}(M/K) \setminus \sum_{i\in I} M_i$. همچنین فرض کنید $j \in I$ طوری باشد که $m \notin K_j$. بنابر آنچه گفته شد، ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\mathfrak{n}$ وجود دارد که $\mathfrak{n}m \subseteq K \subseteq K_j$. چون K_i^*/K_i ساده است، پس $(Rm + K_j) \cap (K_j + Rm_j) = K_j$. اگر $m \notin K_j + Rm_j$، آن‌گاه از تحویل‌ناپذیری K_j نتیجه می‌شود $m \in K_j$ که یک تناقض است. در نتیجه، برای هر $j \in I$ با شرط $m \notin K_j$ داریم $m_j \in K_j + Rm_j$. بنابراین تحت نگاشت طبیعی $M/K \hookrightarrow \prod_{i\in I} M/K_i$ عضو $m + K$ به حاصل‌ضرب $\prod_{i\in I}(Rm_i + K_i)/K_i$ نگاشته می‌شود و با توجه به یکریختی $(Rm_i + K_i)/K_i \cong (Rm_i + K)/K = M_i$ حکم ثابت می‌شود. $\square$

با مفروضات لم ۱.۳، بنابر بند (۴)، داریم

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Soc}(\widehat{K_i}/K) \subseteq \mathrm{Soc}(M/K) \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{Soc}(\widehat{K_i}/K). \tag{۱.۳}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که در رابطه (۱.۳) ممکن است هر دو رابطه شمول، مساوی یا اکید باشند.

مثال ۲.۳. به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه شبه-موضعی و M یک R-مدول دلخواه باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{Soc}(M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, M).$$

حال فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه شبه-موضعی، $E(R/\mathfrak{m})$ پوشش انژکتیو R-مدول $R/\mathfrak{m}$ و I یک مجموعه نامتناهی دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $M := \prod_{i\in I} E(R/\mathfrak{m})$ و $K_j := \prod_{i\in I\setminus\{j\}} E(R/\mathfrak{m})$، $j \in I$. بنابر قضیه ۵.۲، K_j یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است. زیرمدول صفر M اشتراک غیر زاید ابرخانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M است و در این حالت، بنابر آنچه گفته شد، داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{Soc}(M) &\cong \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \prod_{i\in I} E(R/\mathfrak{m}))\\ &\cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E(R/\mathfrak{m}))\\ &\cong \prod_{i\in I} R/\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

از این‌رو در این حالت، شمول اول در رابطه (۱.۳) اکید است و شمول دوم یک تساوی است. حال قرار می‌دهیم $M := \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ و $M[p] := \prod_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} \mathbb{Z}_{q^\infty}$ که در آن $\mathcal{P}$ مجموعه اعداد اول و $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{m}{p^n} + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. مجدداً، بنابر قضیه ۵.۲، $M[p]$ یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است و اشتراک $\bigcap_{p\in\mathcal{P}} M[p] = 0$ نمایش زیرمدول صفر به‌صورت اشتراک غیرزاید زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است و در این حالت $\mathrm{Soc}(M) = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه اکید $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ است. با وجود این، اگر مجموعه I در نمایش $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ متناهی باشد، آن‌گاه در رابطه (۱.۳) تساوی از هر دو طرف برقرار است. به‌ویژه، اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه شبه‌–موضعی باشد، آن‌گاه $\mathrm{Soc}(M/K)$ یک فضای برداری $|I|$–بُعدی روی میدان $R/\mathfrak{m}$ است.

در [۶، قضیه ۳.۵] فاکس و همکاران ثابت کرده‌اند که اگر I ایده‌آلی در حلقه جابه‌جایی و یکدار R باشد، آن‌گاه خانواده $\{I_j\}_{j\in J}$ از ایده‌آل‌های اولین حلقه R وجود دارد که $I = \bigcap_{j\in J} I_j$ و چندین شرط معادل برای یکتا بودن مولفه‌های این ابرخانواده ارائه کرده‌اند ([۶، قضیه ۲.۵، قضیه ۲.۷، لم ۴.۱، قضیه ۴.۲، گزاره ۴.۳، قضیه ۴.۶، نتیجه ۴.۷، لم ۵.۱۰ و قضیه ۵.۱۴] را ببینید). قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای اینکه یک زیرمدول اشتراک غیرزاید ابرخانواده‌ای از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر باشد ارائه می‌کند.

قضیه ۳.۳. فرض کنید M یک R–مدول و K یک زیرمدول سره آن باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) K اشتراک غیرزاید یک ابرخانواده از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است؛

(۲) خانواده $\{M/M_i\}_{i\in I}$، از زیرضرب‌های مستقیم تحویل‌ناپذیر وجود دارد که M/K یک زیرضرب مستقیم آن است و برای هر $i \in I$، M/K در حاصل‌ضرب $\prod_{j\in I\setminus\{i\}} M/M_j$ نشانده نمی‌شود.

(۳) خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ از R–مدول‌های ساده وجود دارد که

$$\bigoplus_{i\in I} E(S_i) \subseteq E(M/K) \subseteq \prod_{i\in I} E(S_i).$$

اثبات. (۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید K اشتراک غیرزاید ابرخانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد. در این‌صورت، نگاشت $f: M/K \to \prod_{i\in I} M/K_i$ با ضابطه $f(m+K) = (m+K_i)_{i\in I}$ یک تک‌ریختی است و بنابر قضیه (۵.۲)، برای هر $i \in I$، M/K_i یک زیرضرب مستقیم تحویل‌ناپذیر است. اگر $i \in I$ موجود باشد به‌قسمی که $M/K \hookrightarrow \prod_{j\in I\setminus\{i\}} M/K_j$، آن‌گاه $K = \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} K_j$ که غیرزاید بودن اشتراک $K = \bigcap_{j\in I} K_j$ را نقض می‌کند.

(۳) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید M/K یک زیرضرب مستقیم گردایه $\{M/M_i\}_{i\in I}$، از زیرضرب‌های مستقیم تحویل‌ناپذیر باشد، به‌قسمی که برای هر عضو دلخواه $i \in I$، M/K در حاصل‌ضرب $\prod_{j\in I\setminus\{i\}} M/M_j$ نشانده نشود. فرض کنید $i \in I$ دلخواه و $\beta_i = \pi_i \circ \pi : M \to M/M_i$ که در آن $\pi : M \to M/K$ بروریختی طبیعی و $\pi_i : \prod_{i\in I} M/M_i \to M/M_i$ بروریختی کانونی است. در این‌صورت بنابر قضیه ۵.۲، $\ker \beta_i$ یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M شامل K است. فرض کنید m_i همانند لم (۱.۳) باشد. در این‌صورت

$$\bigoplus_{i\in I}(Rm_i + K)/K = \sum_{i\in I}(Rm_i + K)/K \subseteq M/K \subseteq \prod_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i) \tag{۲.۳}$$

که در آن $\mathfrak{p}_i$ ایده‌آل اول الحاقی $\ker \beta_i$، برای $i \in I$، است. چون $\prod_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i)$ یک R–مدول انژکتیو است پس، بنابر رابطه (۲.۳)، $E(M/K)$ یک زیرمدول $\prod_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i)$ است. با توجه به اینکه $\bigoplus_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i) = \sum_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i)$ نتیجه می‌گیریم

$$\bigoplus_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i) \subseteq E(M/K) \subseteq \prod_{i\in I} E(R/\mathfrak{p}_i)$$

و حکم ثابت می‌شود.

(۱) $\Leftarrow$ (۳) خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ از R–مدول‌های ساده وجود دارد که

$$\bigoplus_{i\in I} E(S_i) \subseteq E(M/K) \subseteq \prod_{i\in I} E(S_i).$$

برای هر $i \in I$ قرار می‌دهیم $K_i := \ker(\pi_{i|_{M/K}})$ که در آن $\pi_i : \prod_{j\in I} E(S_j) \to E(S_i)$ تصویر کانونی است. K_i، بنابر قضیه ۵.۲ بند (۳) و ملاحظه ۲.۲، یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است . به‌وضوح $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ یک نمایش غیرزاید K به‌صورت اشتراک زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M است. □

نتیجه ۴.۳. فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R-مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) هر زیرمدول سره M اشتراک یک ابرخانواده متناهی از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است؛

(۲) زیرمدول صفر M اشتراک یک ابرخانواده متناهی از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است؛

(۳) $\mathrm{Soc}(M)$ یک زیرمدول اساسی و با تولید متناهی M است؛

(۴) M آرتینی است.

اثبات. $(۱) \Rightarrow (۲)$ واضح است.
$(۲) \Rightarrow (۳)$ خانواده $\{K_i\}_{i=۱}^n$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر وجود دارد که $\bigcap_{i=۱}^n K_i = \{۰\}$. بنابر ملاحظه ۲.۲ ایده‌آل ماکسیمالی مانند $\mathfrak{m}_i$ وجود دارد که $K_i^*/K_i \cong R/\mathfrak{m}_i$ و $\mathrm{Ass}(M/K_i) = \{\mathfrak{m}_i\}$. حال از گزاره ۶.۲، نتیجه می‌شود $\bigcap_{i=۱}^n K_i = \{۰\}$ یک تجزیه اولیه می‌نیمال برای زیرمدول صفر است. در نتیجه، بنابر اولین قضیه یکتایی تجزیه، خواهیم داشت $\mathrm{Ass}_R(M) = \{\mathfrak{m}_۱, \dots, \mathfrak{m}_n\}$. با توجه به این‌که $R/\mathfrak{m}_i \hookrightarrow M \hookrightarrow \bigoplus_{i=۱}^n M/K_i$، از این‌رو از قضیه ۵.۲ نتیجه می‌گیریم

$$\mathrm{Soc}(M) = \bigoplus_{i=۱}^n K_i^*/K_i \cong \bigoplus_{i=۱}^n R/\mathfrak{m}_i$$

یک زیرمدول با تولید متناهی است. حال فرض کنید $۰ \neq m \in M$ دلخواه باشد. در این‌صورت $i \in \{۱, ۲, \dots, n\}$ وجود دارد که $m \notin K_i$. در نتیجه، بنابر لم ۳.۲، $r \in R$ موجود است که $۰ \neq rm + K_i \in K_i^*/K_i \cong R/\mathfrak{m}_i \hookrightarrow M$ و از این‌رو $\mathrm{Soc}(M)$ یک زیرمدول اساسی M است. این نشان می‌دهد که

$$E(M) = E(\mathrm{Soc}(M)) = \bigoplus_{i=۱}^n E(R/\mathfrak{m}_i). \tag{۳.۳}$$

حال از [۸، قضیه ۴.۳۰] نتیجه می‌گیریم M یک R-مدول آرتینی است.
$(۳) \Rightarrow (۴)$ بنابر فرض خانواده متناهی $\{\mathfrak{m}_i\}_{=۱}^n$ از ایده‌آل‌های ماکسیمال موجود است که رابطه (۳.۳) برقرار است. از این‌رو ، مجدداً حکم از [۸، قضیه ۴.۳۰] نتیجه می‌شود.
$(۴) \Rightarrow (۱)$ فرض کنید M یک R-مدول آرتینی و K زیرمدول سره آن باشد. در این‌صورت $\mathrm{Soc}(M/K)$ یک زیرمدول اساسی و با تولید متناهی است. از این‌رو ، خانواده $\{\mathfrak{m}_i\}_{i=۱}^n$ از ایده‌آل‌های ماکسیمال وجود دارد که $E(M/K) = \bigoplus_{i=۱}^n E(R/\mathfrak{m}_i)$. حال حکم از قضیه ۳.۳ نتیجه می‌شود. □

از نتیجه بالا و گزاره ۶.۲ نتیجه می‌شود که، روی حلقه‌های نوتری، هر زیرمدول سره یک مدول آرتینی دارای تجزیه اولیه است که مولفه‌های آن زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر با ایده‌آل الحاقی ماکسیمال‌اند. در نتیجه، بنابر دومین قضیه یکتایی تجزیه اولیه، تمامی مولفه‌های این تجزیه یکتا هستند. قضیه زیر تعمیمی از قضیه ۵.۲ است ([۶، لم ۴.۱] را ببینید).

قضیه ۵.۳. فرض کنید M یک R-مدول و K زیرمدولی از آن باشد که اشتراک غیر زاید خانواده‌ای از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است. در این‌صورت $\mathrm{Soc}(M/K)$ یک زیرمدول اساسی است. بر عکس، اگر $\mathrm{Soc}(M/K)$ برای هر زیرمدول سره K از M نابدیهی باشد، آن‌گاه هر زیرمدول سره M اشتراک غیر زاید خانواده‌ای از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید K زیرمدول سره M و $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ نمایش K به‌صورت اشتراک غیر زاید ابرخانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد. اگر $m + K$ یک عضو غیر صفر M/K باشد و از نمادهای لم ۱.۳ استفاده کنیم، آن‌گاه بنابر اثبات لم مذکور، برای هر $i \in I$ عضوی مانند $r \in R$ به‌دست می‌آید که $rm \in (\widehat{K_i}^* \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} K_j) \setminus K_i$. این به نوبه خود نتیجه می‌دهد که $۰ \neq rm + K \in \mathrm{Soc}(M/K)$.
برعکس، فرض کنید $\mathrm{Soc}(M/K)$، برای هر زیرمدول سره K از M اساسی باشد. در این‌صورت خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ از R-زیرمدول‌های ساده وجود دارد که $\mathrm{Soc}(M/K) = \bigoplus_{i\in I} S_i$. فرض کنید K_i، $i \in I$، زیرمدولی از M شامل $\bigoplus_{j\in I\setminus i} S_j$ باشد که $S_i \bigcap K_i = \{۰\}$ و نسبت به این خاصیت ماکسیمال است. برای هر $i \in I$، بنابر ملاحظه ۲.۲، K_i یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M است و $K = \bigcap_{i\in I} K_i$. ساختار K_i ها نشان می‌دهد که اشتراک $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ غیر زاید است. □

گزاره زیر تعمیمی از [۶، گزاره ۲.۸] است.

گزاره **۶.۳**. فرض کنید M یک R–مدول و K زیرمدول سره آن باشد. اگر K اشتراک غیر زاید ابرخانواده $\{K_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد، آن‌گاه $\mathcal{S}(K) = \{r \in R \mid K \subsetneq (K :_M r)\}$ اجتماع خانواده‌ای از ایده‌آل‌های ماکسیمال است که همگی ایده‌آل اول وابسته بورباکی قوی K هستند. به‌ویژه، K یک زیرمدول $\mathfrak{m}$– اولین است اگر و فقط اگر K_i، برای هر $i \in I$، یک زیرمدول $\mathfrak{m}$– اولین باشد.

اثبات. فرض کنید $r \in \mathcal{S}(K)$. در این‌صورت

$$K \subsetneq (K :_M r) = \bigcap_{i\in I}(K_i :_M r).$$

از این‌رو $i \in I$ وجود دارد که $K \subsetneq (K_i :_M r)$. بنابراین $r \in \mathfrak{m}_i$ که در آن $\mathfrak{m}_i$ ایده‌آل اول الحاقی K_i است. بنابر ملاحظه ۲.۲ داریم $\mathfrak{m}_i K^* \subseteq K_i$ و در نتیجه حکم برقرار است. □

نتیجه **۷.۳**. فرض کنید M یک R–مدول و K زیرمدول سره آن باشد که اشتراک غیر زاید یک ابرخانواده از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M است. در این‌صورت K اشتراک غیر زاید یک ابرخانواده از زیرمدول‌های اولین، با ایده‌آل‌های الحاقی متمایز، است به‌طوری که هر مولفه اولین، اشتراک غیر زاید یک ابرخانواده از زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M است.

اثبات. برای ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ قرار می‌دهیم $K(\mathfrak{m}) := \bigcap K_i$ که در آن K_i ها $\mathfrak{m}$– اولین هستند. حال حکم از گزاره ۶.۳ نتیجه می‌شود. □

۴ زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر مدول‌های توزیع‌پذیر

تعریف **۱.۴**. فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این‌صورت

(۱) M را توزیع‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای زیرمدول‌های دلخواه X، Y و Z داشته باشیم

$$X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z).$$

(۲) M را ارزیاب می‌نامیم هرگاه مشبکه زیرمدول‌های $M_\mathfrak{m}$، برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$، (نسبت به رابطه شمول) کامل باشد.

(۳) M را شبه–ضربی می‌نامیم هرگاه زیرمدول‌های با تولید متناهی آن ضربی باشند؛ یعنی برای هر زیرمدول با تولید متناهی Y از M و هر زیرمدول $X \subseteq Y$ ایده‌آلی مانند $\mathfrak{c}$ موجود باشد که $X = \mathfrak{c}Y$.

برای بحث بیشتر در مورد مدول‌های ضربی به مرجع [۹] یا [۱۰] مراجعه کنید. قضیه زیر تعمیمی از [۶، لم ۵.۱] است.

قضیه **۲.۴**. فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) M توزیع‌پذیر است؛

(۲) M ارزیاب است؛

(۳) M شبه–ضربی است.

اثبات. به‌وضوح، در تمامی موارد، می‌توان فرض کرد $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه شبه–موضعی است.
$(۱) \Rightarrow (۲)$ فرض کنید $x, y \in M$ دلخواه باشند. در این‌صورت

$$Rx = Rx \cap (Ry + R(x - y)) = Rx \cap Ry + Rx \cap R(x - y).$$

از این‌رو $\alpha \in Rx \bigcap Ry$ و $\beta \in R$ موجودند که $x = \alpha + \beta(x - y)$. چون $(R, \mathfrak{m})$ شبه–موضعی و $(۱ - \beta)x = \alpha - \beta y$ پس یا $\beta \in \mathfrak{m}$ که نتیجه می‌دهد $Ry \subseteq Rx$ و یا $\beta \notin \mathfrak{m}$ که آن‌هم نتیجه می‌دهد $Rx \subseteq Ry$ و از این‌رو M ارزیاب است.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنید $X \subseteq Y$ زیرمدول‌های M باشند که در آن Y یک R–مدول با تولید متناهی است. قرار می‌دهیم $\mathfrak{c} = (X :_R Y)$. چون Y یک R–مدول اصلی است، از این‌رو

$$\mathfrak{c}Y = (X :_R Y)Y = Y \cap X = X,$$

و حکم ثابت می‌شود.

(۲) $\Rightarrow$ (۳) باید ثابت کنیم برای عناصر دلخواه $x, y \in M$، $Rx \subseteq Ry$ یا $Rx \subseteq Ry$. بنابر فرض ایده‌آلی مانند $\mathfrak{c}$ وجود دارد که $Rx = \mathfrak{c}(Rx + Ry)$. می‌توان فرض کرد $\mathfrak{c}$ یک ایده‌آل سره R است. در این‌صورت $\alpha, \beta \in \mathfrak{m}$ وجود دارند که $x = \alpha x + \beta y$. از این‌که $(R, \mathfrak{m})$ شبه–موضعی است، نتیجه می‌شود که $Rx \subseteq Ry$ و حکم ثابت می‌شود.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) واضح است. □

قضیه ۳.۴. فرض کنید M یک R–مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) M توزیع‌پذیر است؛

(۲) برای زیرمدول‌های دلخواه X، Y و Z از M داریم

$$(X + Y :_R Z) = (X :_R Z) + (Y :_R Z)$$

(۳) برای زیرمدول‌های با تولید متناهی Y، Z و زیرمدول دلخواه X داریم

$$(X :_R Y \cap Z) = (X :_R Y) + (X :_R Z).$$

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱) می‌توان فرض کرد $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه شبه–موضعی است. در نتیجه، بنابر قضیه ۲.۴، M ارزیاب است. بنابراین $Y \subseteq X$ یا $X \subseteq Y$ و در نتیجه حکم برقرار است.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) برای هر $x, y \in M$ داریم

$$\begin{aligned}(Rx :_R Ry) + (Ry :_R Rx) &= (Rx :_R Rx + Ry) + (Ry :_R Rx + Ry)\\ &= (Rx + Ry :_R Rx + Ry)\\ &= R,\end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم بنابر فرض برقرار است. از این‌رو ، برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$، داریم $(Rx)_{\mathfrak{m}} \subseteq (Ry)_{\mathfrak{m}}$ یا $(Ry)_{\mathfrak{m}} \subseteq (Rx)_{\mathfrak{m}}$ که نتیجه می‌دهد $Z_{\mathfrak{m}} \subseteq Y_{\mathfrak{m}}$ یا $Y_{\mathfrak{m}} \subseteq Z_{\mathfrak{m}}$. بنابر تقارن می‌توان فرض کرد $Y_{\mathfrak{m}} \subseteq Z_{\mathfrak{m}}$. اگر $Y_{\mathfrak{m}} \subseteq X_{\mathfrak{m}}$، آن‌گاه

$$(X :_R Y \cap Z)_{\mathfrak{m}} \supseteq (X_{\mathfrak{m}} :_{R_{\mathfrak{m}}} Z_{\mathfrak{m}}) + (X_{\mathfrak{m}} :_{R_{\mathfrak{m}}} Y_{\mathfrak{m}}) = R_{\mathfrak{m}}$$

و در این‌حالت حکم برقرار است. پس می‌توان فرض کرد $Y_{\mathfrak{m}} \nsubseteq X_{\mathfrak{m}}$. فرض کنید $y/۱ \in Y_{\mathfrak{m}} \setminus X_{\mathfrak{m}}$. برای هر $x \in X$ چون $(Ry)_{\mathfrak{m}} \nsubseteq (Rx)_{\mathfrak{m}}$ پس $(Rx)_{\mathfrak{m}} \subseteq (Ry)_{\mathfrak{m}}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\mathfrak{m}} \subseteq Y_{\mathfrak{m}}$. حال $r/۱ \in (X :_R Y \cap Z)_{\mathfrak{m}}$ نتیجه می‌دهد

$$r/۱ \in (X_{\mathfrak{m}} :_{R_{\mathfrak{m}}} Y_{\mathfrak{m}}) = (X_{\mathfrak{m}} :_{R_{\mathfrak{m}}} Z_{\mathfrak{m}}) + (X_{\mathfrak{m}} :_{R_{\mathfrak{m}}} Y_{\mathfrak{m}})$$

و در این‌حالت هم حکم برقرار است.

(۳) $\Rightarrow$ (۱) برای هر $x, y \in M$ داریم

$$\begin{aligned}(Rx :_R Ry) + (Ry :_R Rx) &= (Rx \cap Ry :_R Rx) + (Ry \cap Rx :_R Ry)\\ &= (Rx \cap Ry :_R Rx \cap Ry)\\ &= R,\end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم بنابر فرض برقرار است. از این‌رو برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ داریم $(Rx)_{\mathfrak{m}} \subseteq (Ry)_{\mathfrak{m}}$ یا $(Ry)_{\mathfrak{m}} \subseteq (Rx)_{\mathfrak{m}}$.
مانند اثبات (۳) $\Rightarrow$ (۲) نتیجه می‌شود $M_{\mathfrak{m}}$ ارزیاب است که آن‌هم به‌نوبه خود، بنابر قضیه ۲.۴، نتیجه می‌دهد M توزیع‌پذیر است. □

بنابر قضیه ۲.۴، مدول‌های توزیع‌پذیر با تولید متناهی، ضربی‌اند. قضیه زیر نشان می‌دهد که روی حلقه‌های نیم–موضعی (حلقه‌های با تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال) زیرمدول‌های با تولید متناهیِ مدول‌های توزیع‌پذیر اصلی و در نتیجه ضربی هستند.

قضیه ۴.۴. فرض کنید R یک حلقه نیم–موضعی باشد. اگر M یک R–مدول توزیع‌پذیر و X یک زیرمدول با تولید متناهی آن باشد، آن‌گاه $x \in X$ وجود دارد که $X = Rx$.

اثبات. فرض کنید $\{\mathfrak{m}_i\}_{i=1}^{n}$ ایده‌آل‌های ماکسیمال R باشند. کافی است نشان دهیم برای هر $x, y \in M$ زیرمدول $Rx + Ry$ اصلی است. بنابر قضیه ۲.۴ ، برای هر i، $1 \leq i \leq n$، $M_{\mathfrak{m}_i}$ یک $R_{\mathfrak{m}_i}$– مدول ارزیاب است. از این‌رو

$$(Rx)_{\mathfrak{m}_i} \subseteq (Ry)_{\mathfrak{m}_i} \text{ یا } (Ry)_{\mathfrak{m}_i} \subseteq (Rx)_{\mathfrak{m}_i}.$$

فرض کنید برای $1 \leq i \leq k$ داریم $(Rx)_{\mathfrak{m}_i} \subseteq (Ry)_{\mathfrak{m}_i}$ و برای $k+1 \leq i \leq n$ داریم $(Rx)_{\mathfrak{m}_i} \nsubseteq (Ry)_{\mathfrak{m}_i}$. بنابر قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول عناصر $\alpha, \beta \in R$ با شرایط

$$\alpha \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{m}_i \setminus \bigcup_{i=k+1}^{n} \mathfrak{m}_i \text{ و } \beta \in \bigcap_{i=k+1}^{n} \mathfrak{m}_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{m}_i \tag{۱.۴}$$

وجود دارند. برای هر i که $1 \leq i \leq n$ دو حالت اتفاق می‌افتد. اگر $1 \leq i \leq k$، آن‌گاه بنابر رابطه ۱.۴، $\beta/1 \in R_{\mathfrak{m}_i}$ معکوس‌پذیر است، و از این‌رو

$$(R(\alpha x + \beta y))_{\mathfrak{m}_i} = (Ry)_{\mathfrak{m}_i} = (Rx)_{\mathfrak{m}_i} + (Ry)_{\mathfrak{m}_i}.$$

اگر $k+1 \leq i \leq n$، آن‌گاه مجدداً بنابر رابطه ۱.۴، $\alpha/1 \in R_{\mathfrak{m}_i}$ معکوس‌پذیر است، و از این‌رو

$$(R(\alpha x + \beta y))_{\mathfrak{m}_i} = (Rx)_{\mathfrak{m}_i} = (Rx)_{\mathfrak{m}_i} + (Ry)_{\mathfrak{m}_i}.$$

در نتیجه، بنابر [۱، فصل ۲، §۳، شماره ۳، قضیه ۱]، داریم $Rx + Ry = R(\alpha x + \beta y)$ و حکم برقرار است. □

ملاحظه ۵.۴. بنابر قضیه ۳.۴ هر زیرمدول با تولید متناهی از یک مدول توزیع‌پذیر روی یک حلقه نیم‌موضعی، اصلی است. با وجود این، لزومی ندارد که خود مدول باتولید متناهی باشد. به‌عنوان مثال، اگر p یک عدد اول و

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{m/p^n + \mathbb{Z} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle 1/p^n + \mathbb{Z} \rangle \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

آن‌گاه هر زیرمدول سره $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ به صورت $\langle 1/p^n + \mathbb{Z} \rangle$ است که در آن n یک عدد طبیعی است. پس، مشبکه زیرگروه‌های آن به‌صورت

$$\{0\} \subsetneq \langle 1/p + \mathbb{Z} \rangle \subsetneq \langle 1/p^2 + \mathbb{Z} \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle 1/p^n + \mathbb{Z} \rangle \subsetneq \langle 1/p^{n+1} + \mathbb{Z} \rangle \subsetneq \cdots \tag{۲.۴}$$

است. در نتیجه $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک گروه آبلی توزیع‌پذیر است. با توجه به این‌که برای هر عدد صحیح $x \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$، همریختی ضربی توسط x روی $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک یک‌ریختی است، از این‌رو $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$– مدول است و $\mathbb{Z}$– زیرمدول‌ها و $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$– زیرمدول‌های آن با هم یکسان هستند. با توجه به رابطه ۲.۴، واضح است که $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک گروه آبلی (و در نتیجه $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$– مدول) با تولید متناهی نیست.

قضیه ۶.۴. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه شبه–موضعی و M یک R–مدول باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) M توزیع‌پذیر است؛

(۲) مجموعه زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M به‌صورت $\{\mathfrak{m}x \mid 0 \neq x \in M\}$ است؛

(۳) $\mathfrak{m}x$، برای هر $0 \neq x \in M$، یک زیرمدول تحویل‌ناپذیر M است.

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱) اگر N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M باشد، آن‌گاه بنابر قضیه ۵.۲ عضوی مانند $x \in M$ وجود دارد که $(N :_R x) = \mathfrak{m}$. از این‌رو از توزیع‌پذیر بودن M، قضیه ۲.۴ و ماکسیمال بودن $\mathfrak{m}$ نتیجه می‌شود $N \subsetneq Rx$. پس برای هر $n \in N$ عضوی مانند $r \in R$ وجود دارد که $n = rx$. این نتیجه می‌دهد $r \in \mathfrak{m}$. بنابراین $N \subseteq \mathfrak{m}x$. و در نتیجه $N = \mathfrak{m}x$.
(۳) $\Rightarrow$ (۲) واضح است.
(۱) $\Rightarrow$ (۳) فرض کنید (فرض خلف) M توزیع‌پذیر نباشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۲.۴ ((۲) $\Leftrightarrow$ (۱))، $x, y \in M$ وجود دارند که $Rx \nsubseteq Ry$ و $Ry \nsubseteq Rx$. اگر $\mathfrak{m}x \subseteq \mathfrak{m}y$، آن‌گاه $(Rx + \mathfrak{m}y)/\mathfrak{m}y$ یک زیرمدول ساده $M/\mathfrak{m}y$ خواهد بود. بنابر قضیه ۵.۲، $\mathrm{Soc}(M/\mathfrak{m}y) = (Ry/\mathfrak{m}y)$ یک زیرمدول اساسی $M/\mathfrak{m}y$ است و در نتیجه $Rx + \mathfrak{m}y = Ry$ که یک تناقض است. پس $\mathfrak{m}x \nsubseteq \mathfrak{m}y$. بنابراین، مجدداً طبق قضیه ۵.۲ داریم

$$Ry/\mathfrak{m}y = \mathrm{Soc}(M/\mathfrak{m}y) \subseteq (\mathfrak{m}x + \mathfrak{m}y)/\mathfrak{m}y \subseteq (Rx + \mathfrak{m}y)/\mathfrak{m}y$$

که این نیز یک تناقض است. $\square$

قضیه ۷.۴. R-مدول M توزیع‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعه زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر آن به‌صورت

$$\{\mathfrak{m}(Rx)_{(\mathfrak{m})} \mid x \in M, \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) \bigcap \mathrm{Supp}(Rx)\} \tag{۳.۴}$$

باشد.

اثبات. " $\Rightarrow$ " فرض کنید N یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر M و $\mathfrak{m}$ ایده‌آل الحاقی آن باشد. بنابر قضیه ۵.۲، $N_{\mathfrak{m}}$ یک زیرمدول کاملاً تحویل‌ناپذیر $M_{\mathfrak{m}}$ است و در نتیجه، بنابر قضایای ۲.۴ و ۳.۴، برای هر $x \in M$ با $(N :_R x) = \mathfrak{m}$ داریم $N_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}(Rx)_{\mathfrak{m}}$. چون N یک زیرمدول $\mathfrak{m}$- اولین M است، پس

$$N = N_{(\mathfrak{m})} = (\mathfrak{m}Rx)_{(\mathfrak{m})} = \mathfrak{m}(Rx)_{(\mathfrak{m})},$$

که در آن تساوی دوم به این دلیل برقرار است که ([۱، فصل ۳.۳، § ۳، شماره ۳، قضیه ۱]) برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ داریم

$$\left((\mathfrak{m}Rx)_{(\mathfrak{m})}\right)_{\mathfrak{p}} = \left(\mathfrak{m}(Rx)_{(\mathfrak{m})}\right)_{\mathfrak{p}}.$$

" $\Leftarrow$ " فرض کنید زیرمدول‌های کاملاً تحویل‌ناپذیر M به شکل گفته شده باشد. بنابر قضایای ۵.۲ و ۲.۴ می‌توان فرض کرد R یک حلقه شبه‌-موضعی است. حال حکم از قضیه ۳.۴ نتیجه می‌شود. $\square$

فهرست منابع

[1] Bourbaki, N., 1998. *Commutative algebra: chapters 1-7* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.

[2] Dauns, J., 1997. Primal Modules, *Communications in Algebra*, 25 (8), pp.2409-2435. doi: 10.1080/00927879708825998

[3] Fuchs, L., 1948. A condition under which an irreducible ideal is primary, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 19(1), pp.235-237. doi: 10.1093/qmath/os-19.1.235

[4] Fuchs, L., 1950. On primal ideals, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1(1), pp.1-6. doi: 10.1090/S0002-9939-1950-0032584-8

[5] Fuchs, L., Heinzer, W. and Olberding, B., 2005. Commutative ideal theory without finiteness conditions: primal ideals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(7), pp.2771-2798. doi 10.1090/S0002-9947-04-03583-4

[6] Fuchs, L., Heinzer, W. and Olberding, B., 2006. Commutative ideal theory without finiteness conditions: Completely irreducible ideals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(7), pp.3113-3131. doi: 10.1090/S0002-9947-06-03815-3

[7] Heinzer, W. and Lantz, D., 1981. The Laskerian property in commutative rings. *Journal of Algebra*, 72(1), pp.101-114. doi: 10.1016/0021-8693(81)90313-6

[8] Sharpe, D.W. and Vámos, P., 1972. *Injective modules*. Cambridge University Press, London.

[9] Smith, P. F., 1988. Some remarks on multiplication modules. *Archiv der Mathematik*, 50, pp.223-235. doi: 10.1080/00927872.2011.628724

[10] Zamani, N., 2011. Finitely generated graded multiplication modules. *Glasgow Mathematical Journal*, 53(3), pp.693-705. doi: 10.1017/S0017089511000279

Completely Irreducible Submodules and Characterization of Distributive and Artinian Modules

A. Khojali [2]

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

Communicated by: Amir Mafi

Received: 12 July 2023 Accepted: 1 December 2023

Abstract: Let R be a commutative ring with identity and let M be a unitary R-module. In this paper, the structure of completely irreducible submodules will be studied and it is proved that a submodule K has a comlpetely irreducible divisor if and only if $\mathrm{Soc}(M/K)$ is non-trivial which implies that a maximal ideal $\mathfrak{m}$ is an strongly Bourbaki associated prime ideal of K if and only if K has an $\mathfrak{m}$-primal completely irrducible divisor. Submodules of M that are representable as an irredundant intersection of an overfamily of completely irreducible submodules are characterized. Then it will be shown that, if R is a Noetherian ring, then M is Artinian if and only if its zero submodule has a primary decomposition whose components are completely irreducible submodules. Finally, it is proved that M is distributive if and only if the set of its completely irreducible submodules is $\big\{\mathfrak{m}(Rx)_{(\mathfrak{m})}\,|\,x \in M,\ \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) \bigcap \mathrm{Supp}(Rx)\big\}$.

Keywords: Completely irreducible submodule, Primal submodule, Distributive module.

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: khojali@uma.ac.ir (A. khojali)