مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۳، ص ۴۸۶-۵۰۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.44246.2179

روش هم‌محلی برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی خطی ولترا و اثبات همگرایی آن

ابوالفضل تاری مرزآباد، [۱] سمیه کاظمی

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

دبیر مسئول: محمداسماعیل سامعی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۴/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۶

چکیده : در این مقاله روش هم‌محلی را برای حل عددی معادلات انتگرال دوبعدی ولترا تعمیم می‌دهیم. برای این منظور ابتدا وجود و یکتایی جواب این نوع معادلات را ثابت کرده و یک نمایش هسته حلال برای جواب آنها ارایه می‌کنیم. پس از آن، روش هم‌محلی با استفاده از چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای را برای حل معادلات مذکور تعمیم داده و دستگاه معادلات جبری متناظر را به دست آورده و نشان می‌دهیم دستگاه مذکور دارای جواب یکتاست. سپس همگرایی روش را ثابت کرده و مرتبه‌ی همگرایی روش را با اثبات قضیه‌ای به دست می‌آوریم. سرانجام چند مثال عددی برای نشان‌دادن کارایی روش و تأیید نتایج نظری به دست آمده، ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرال دوبعدی ولترا، روش هم‌محلی، چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای، همگرایی.

رده‌بندی ریاضی: 45D05, 45A05, 65R20

۱ مقدمه

معادلات انتگرال شاخه‌ای از ریاضیات است که کاربردهای قابل توجهی در زمینه‌های مختلف علوم کاربردی و مهندسی [۹] و [۱۷]، دینامیک جمعیت [۱۶]، بررسی شیوع اعتیاد [۷] و غیره دارد. اما بسیاری از معادلات مهم و کاربردی با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند و باید از روش‌های عددی استفاده کرد [۱۴] و [۱۵] .
یکی از روشهای مهم برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال روش هم‌محلی است که پژوهش‌گران زیادی از آن برای حل معادلات مختلف استفاده می‌کنند. به‌عنوان مثال در [۳] و [۴] روش هم‌محلی برای حل انواع مختلف معادلات انتگرال و انتگرال–دیفرانسیل بررسی شده است. در [۱] یک روش هم‌محلی برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع اول پیشنهاد شده است و در [۲] از روش هم‌محلی لژاندر–گاوس–لوباتو برای حل معادلات انتگرال فردهلم چندبعدی استفاده شده است. در [۵] روش هم‌محلی برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی و غیرخطی تعمیم داده شده است. در [۱۳] همگرایی روش هم‌محلی برای حل معادلات انتگرال ولترا با هسته منفرد ضعیف

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(S. Kazemi) somayeh.kazemi@shahed.ac.ir, (A. Tari) tari@shahed.ac.ir

ثابت شده است و مرتبه همگرایی به‌دست آمده است. در [۱۸] روش تیلور–هم‌محلی برای حل معادلات انتگرال ولترا–فردهلم استفاده شده و همگرایی روش ثابت شده است. همچنین در [۱۱] روش هم‌محلی برای حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری دوبعدی تعمیم داده شده است.

اما هدف این مقاله، تعمیم روش هم‌محلی برای معادلات انتگرال دوبعدی به‌صورت

$$u(x,y) = g(x,y) + \int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x} K(x,y,w,v)u(w,v)dwdv,\ (x,y) \in \Omega = [\circ, X] \times [\circ, Y], \quad (۱.۱)$$

است که در آن $g \in C(\Omega)$ و $K \in C(D)$ با

$$D = \{(x,y,w,v) :\ \circ \le w \le x \le X,\ \circ \le v \le y \le Y\}$$

است. همان‌طور که در بالا اشاره شد وجود و یکتایی جواب بررسی شده و نمایشی برای جواب ارایه می‌دهیم. هم‌چنین همگرایی روش را ثابت کرده و مرتبه همگرای روش را به دست می‌آوریم و مثال‌هایی برای تایید دقت و مرتبه همگرایی روش ارایه می‌کنیم.

۲ وجود و یکتایی جواب

در این بخش، وجود و یکتایی جواب معادله (۱.۱) را ثابت می‌کنیم و نمایش هسته حلال برای جواب را ارایه می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نامساوی گرانوال را بیان‌کرده و پس از آن با الهام از [۳] قضیه اصلی این بخش را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. [۱۰] نامساوی گرانوال. اگر

$$u(x,y) \le \bar{q} + \int_{b}^{y}\int_{a}^{x} q(w,v)u(w,v)dwdv,\ \ (x,y) \in \Omega,$$

که در آن $\bar{q}$ یک ثابت نامنفی $x \ge a$، $y \ge b$، $q(w,v) \ge \circ$ و $u(w,v) \ge \circ$، آنگاه

$$u(x,y) \le \bar{q}\, exp\left(\int_{b}^{y}\int_{a}^{x} q(w,v)dwdv\right),\ \ (x,y) \in \Omega.$$

قضیه ۲.۲. فرض‌کنید $K \in C(D)$. آنگاه به‌ازای‌هر $g \in C(\Omega)$ معادله (۱.۱) دارای جواب یکتای $u \in C(\Omega)$ است. این جواب دارای نمایشی به‌صورت زیر است:

$$u(x,y) = g(x,y) + \int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x} R(x,y,w,v)g(w,v)dwdv,\ \ (x,y) \in \Omega, \quad (۱.۲)$$

که در آن $R = R(x,y,w,v)$ هسته حلال متناظر با هسته K را نشان می‌دهد و منظمی را از K به ارث می‌برد، به این معنی که اگر $K \in C^d(D)$، آنگاه داریم $R \in C^d(D)$. بنابراین به‌ازای‌هر $g \in C^d(\Omega)$ معادله (۱.۱) دارای جواب $u \in C^d(\Omega)$ است.

اثبات. با استفاده از روش تکراری پیکارد برای معادله (۱.۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &u_{\circ}(x,y) = g(x,y), \\ &u_p(x,y) = g(x,y) + \int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x} K(x,y,w,v)u_{p-۱}(w,v)dwdv,\ \ p \ge ۱. \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

از رابطه بازگشتی (۲.۲) به‌ازای $p = ۱, ۲$ تساویهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} u_۱(x,y) &= g(x,y) + \int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x} K(x,y,w,v)g(w,v)dwdv, \\ u_۲(x,y) &= g(x,y) + \int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x} K(x,y,w,v)g(w,v)dwdv \\ &\quad + \int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x}\Big(\int_{v}^{y}\int_{w}^{x} K(x,y,\eta,\xi)K(\eta,\xi,w,v)d\eta d\xi\Big)g(w,v)dwdv. \end{aligned}$$

با ادامه این روند خواهیم داشت

$$u_p(x,y)=g(x,y)+\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}\sum_{l=1}^{p}H_l(x,y,w,v)g(w,v)dwdv, \tag{۳.۲}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &H_1(x,y,w,v)=K(x,y,w,v),\\ &H_l(x,y,w,v)=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}H_1(x,y,\eta,\xi)H_{l-1}(\eta,\xi,w,v)d\eta d\xi,\ \ l\geq 2, \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

به‌کمک استقراء می‌توان نتیجه گرفت

$$H_l(x,y,w,v)=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}H_r(x,y,\eta,\xi)H_{l-r}(\eta,\xi,w,v)d\eta d\xi,\ \ 1\leq r<l,\ l\geq 2, \tag{۵.۲}$$

فرض‌کنید رابطه (۵.۲) برای $l-1$ برقرار باشد برای l با استفاده از (۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} H_l(x,y,w,v)&=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}H_1(x,y,\eta,\xi)H_{l-1}(\eta,\xi,w,v)d\eta d\xi\\ &=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}H_1(x,y,\eta,\xi)\int_{v}^{\xi}\int_{w}^{\eta}H_r(\eta,\xi,\theta,t)H_{l-1-r}(\theta,t,w,v)d\theta dt d\eta d\xi\\ &=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}\Big(\int_{t}^{y}\int_{\theta}^{x}H_1(x,y,\eta,\xi)H_r(\eta,\xi,\theta,t)d\eta d\xi\Big)H_{l-1-r}(\theta,t,w,v)d\theta dt\\ &=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}\Big(\int_{t}^{y}\int_{\theta}^{x}H_r(x,y,\eta,\xi)H_1(\eta,\xi,\theta,t)d\eta d\xi\Big)H_{l-1-r}(\theta,t,w,v)d\theta dt\\ &=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}H_r(x,y,\eta,\xi)\Big(\int_{v}^{\xi}\int_{w}^{\eta}H_1(\eta,\xi,\theta,t)H_{l-1-r}(\theta,t,w,v)d\theta dt\Big)d\eta d\xi\\ &=\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}H_r(x,y,\eta,\xi)H_{l-r}(\eta,\xi,w,v)d\eta d\xi, \end{aligned}$$

و درستی (۵.۲) نتیجه می‌شود. حال به‌کمک استقراء نشان می‌دهیم

$$H_l(x,y,w,v)\leq\frac{(x-w)^{l-1}(y-v)^{l-1}}{(l-1)!^2}\overline{K}^l,\ \ l\geq 1, \tag{۶.۲}$$

که $\overline{K}=max\{|K(x,y,w,v)|;\ \ (x,y,w,v)\in D\}$ است. برای $l=1$ واضح است. فرض‌کنید رابطه (۶.۲) برای $l-1$ برقرار باشد. از رابطه (۴.۲) برای حالت l داریم

$$\begin{aligned} |H_l(x,y,w,v)|&\leq\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}|H_1(x,y,\eta,\xi)||H_{l-1}(\eta,\xi,w,v)|d\eta d\xi\\ &\leq\frac{\overline{K}^l}{(l-2)!^2}\int_{v}^{y}\int_{w}^{x}(\eta-w)^{l-2}(\xi-v)^{l-2}d\eta d\xi\\ &=\overline{K}^l\frac{(x-w)^{l-1}(y-v)^{l-1}}{(l-1)!^2}\\ &\leq\overline{K}^l\frac{(XY)^{l-1}}{(l-1)!^2}. \end{aligned}$$

این نامساوی نتیجه می‌دهد که سری نیومن

$$\sum_{l=1}^{\infty} H_l(x,y,w,v) = \lim_{p\to\infty}\sum_{l=1}^{p} H_l(x,y,w,v) := R(x,y,w,v), \tag{۷.۲}$$

به‌طور مطلق و یکنواخت روی D همگرا است. حد آن را با $R(x,y,w,v)$ نشان می‌دهیم و یک تابع پیوسته است. به این ترتیب دنباله $\{u_p\}$ نیز به‌طور یکنواخت همگرا است. نشان می‌دهیم حد دنباله $\{u_p\}$، یک جواب معادله (۱.۱) است. با استفاده از (۵.۲) و (۷.۲) داریم

$$\begin{aligned} R(x,y,w,v) &= H_1(x,y,w,v) + \sum_{l=2}^{\infty} H_l(x,y,w,v) \\ &= H_1(x,y,w,v) + \sum_{l=2}^{\infty} \int_v^y \int_w^x H_{l-1}(x,y,\eta,\xi) H_1(\eta,\xi,w,v)\, d\eta d\xi \\ &= K(x,y,w,v) + \int_v^y \int_w^x R(x,y,\eta,\xi) K(\eta,\xi,w,v)\, d\eta d\xi \end{aligned} \tag{۸.۲}$$

با ضرب تابع $R(x,y,w,v)$ در دو طرف معادله (۱.۱) و انتگرال‌گیری، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^y \int_0^x R(x,y,w,v) u(w,v)\, dw dv &= \int_0^y \int_0^x R(x,y,w,v) g(w,v)\, dw dv \\ &+ \int_0^y \int_0^x \Big(\int_\xi^y \int_\eta^x R(x,y,w,v) K(w,v,\eta,\xi)\, dw dv \Big) u(\eta,\xi)\, d\eta d\xi. \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

با استفاده از (۸.۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_0^y \int_0^x R(x,y,w,v) u(w,v)\, dw dv &= \int_0^y \int_0^x R(x,y,w,v) g(w,v)\, dw dv \\ &+ \int_0^y \int_0^x \Big(R(x,y,\eta,\xi) - K(x,y,\eta,\xi) \Big) u(\eta,\xi)\, d\eta d\xi. \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_0^y \int_0^x K(x,y,w,v) u(w,v)\, dw dv = \int_0^y \int_0^x R(x,y,w,v) g(w,v)\, dw dv,$$

بنابراین حد دنباله $\{u_n\}$ یک جواب از معادله (۱.۱) است. حال برای نشان‌دادن یکتایی جواب فرض‌کنید u و z دو جواب از معادله (۱.۱) باشند، داریم

$$u(x,y) - z(x,y) = \int_0^y \int_0^x K(x,y,w,v) \Big(u(w,v) - z(w,v) \Big) dw dv, \quad (x,y) \in \Omega,$$

و از آن می‌توان نتیجه گرفت

$$|u(x,y) - z(x,y)| \le \overline{K} \int_0^y \int_0^x |u(w,v) - z(w,v)|\, dw dv, \quad (x,y) \in \Omega,$$

و با استفاده از قضیه ۱.۲ داریم

$$|u(x,y) - z(x,y)| \le 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

که نتیجه می‌دهد $z = u$. بنابراین معادله (۱.۱) دارای جواب یکتا پیوسته است. □

۳ روش پیشنهادی

در این بخش، روش عددی هم‌محلی با استفاده از چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای برای حل معادله (۱.۱) ارائه می‌شود. ایده این روش بر اساس تقریب جواب معادله در یک فضا با بعد متناهی و صدق‌کردن جواب تقریبی در معادله به‌ازای تعدادی از نقاط دامنه است. برای این منظور، شبکه $\Omega_{h,k} = I_h \times J_k$ را روی $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$ در نظر می‌گیریم که در آن

$$I_h = \{x_i^{(N)} : 0 = x_0^{(N)} < \dots < x_N^{(N)} = X\},$$
$$J_k = \{y_j^{(M)} : 0 = y_0^{(M)} < \dots < y_M^{(M)} = Y\},$$

می‌خواهیم جواب معادله (۱.۱) را در فضای چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای

$$S_{m-1,n-1}^{(-1,-1)}(\Omega_{h,k}) = \{v : v|_{\sigma_{i,j}} \in \Pi_{m-1,n-1}, \ 0 \le i \le M-1, \ 0 \le j \le N-1\},$$

تقریب کنیم، همچنین نقاط هم‌محلی $\Lambda_{h,k} = X_h \times Y_k$ با

$$X_h = \{x_i + c_l h_i : 0 \le c_1 < \dots < c_m \le 1, \ i = 0, \dots, M-1\},$$

و

$$Y_k = \{y_j + d_p k_j : 0 \le d_1 < \dots < d_n \le 1, \ j = 0, \dots, N-1\}.$$

را در نظر می‌گیریم که در آن c_l و d_p پارامترهای هم‌محلی هستند. با استفاده از توابع پایه‌ای لاگرانژ جواب هم‌محلی $u_{h,k}(x, y)$ را برای هر $(x, y) \in \sigma_{i,j}$ به‌صورت زیر تقریب می‌کنیم:

$$u_{h,k}(x_i + \eta h_i, y_j + \xi k_j) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} L_\alpha(\eta) \overline{L}_\beta(\xi) U_{i\alpha,j\beta}, \ \ \eta, \xi \in (0, 1], \tag{۱.۳}$$

که

$$L_\alpha(\eta) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^{m} \frac{\eta - c_i}{c_\alpha - c_i}, \quad \overline{L}_\beta(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \beta}}^{n} \frac{\xi - d_j}{d_\beta - d_j}, \ \alpha = 1, \dots, m, \ \beta = 1, \dots, n.$$

و ضرایب $U_{i\alpha,j\beta} = u_{h,k}(x_i + c_\alpha h_i, y_j + d_\beta k_j)$ مجهول هستند. طبق روش هم‌محلی، جواب هم‌محلی $u_{h,k}(x, y)$ به‌ازای هر $(x, y) \in \Lambda_{i,j}$ در معادله (۱.۱) باید صدق کند، بنابراین برای $i = 0, \dots, M-1$ و $j = 0, \dots, N-1$ داریم:

$$\begin{aligned} u_{h,k}(x_i + c_a h_i, y_j + d_b k_j) - \int_0^{y_j + d_b k_j} \int_0^{x_i + c_a h_i} K(x_i + c_a h_i, y_j + d_b k_j, w, v) u_{h,k}(w, v) dw dv \\ = g(x_i + c_a h_i, y_j + d_b k_j), \quad a = 1, \dots, m, \ b = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

انتگرال‌ها در (۲.۳) را می‌توان به‌صورت زیر جدا کرد

$$\begin{aligned} u_{h,k}(x_{ia}, y_{jb}) &- \sum_{p=0}^{j-1} \int_{y_p}^{y_{p+1}} \sum_{l=0}^{i-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} K(x_{ia}, y_{jb}, w, v) u_{h,k}(w, v) dw dv \\ &- \sum_{p=0}^{j-1} \int_{y_p}^{y_{p+1}} \int_{x_i}^{x_{ia}} K(x_{ia}, y_{jb}, w, v) u_{h,k}(w, v) dw dv \\ &- \int_{y_j}^{y_{jb}} \sum_{l=0}^{i-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} K(x_{ia}, y_{jb}, w, v) u_{h,k}(w, v) dw dv \\ &- \int_{y_j}^{y_{jb}} \int_{x_i}^{x_{ia}} K(x_{ia}, y_{jb}, w, v) u_{h,k}(w, v) dw dv \\ &= g(x_{ia}, y_{jb}). \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

که در آن $x_{ia}=x_i+c_ah_i$ و $y_{jb}=y_j+d_bk_j$ هستند.
با تغییر متغیر $\theta=x_l+wh_l,\ \theta\in(x_l,x_{l+1})$، $\theta=x_i+wh_i,\theta\in(x_i,x_{ia})$، $t=y_p+vk_p,t\in(y_p,y_{p+1})$ و $t=y_j+vk_j,t\in(y_j,y_{jb})$ در (۳.۳) خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
u_{h,k}(x_{ia},y_{jb})&-\sum_{p=0}^{j-1}k_p\int_0^1\sum_{l=0}^{i-1}h_l\int_0^1 K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_p+vk_p)u_{h,k}(x_l+wh_l,y_p+vk_p)dwdv\\
&-h_i\sum_{p=0}^{j-1}k_p\int_0^1\int_0^{c_a}K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_p+vk_p)u_{h,k}(x_i+wh_i,y_p+vk_p)dwdv\\
&-k_j\int_0^{d_b}\sum_{l=0}^{i-1}h_l\int_0^1 K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_j+vk_j)u_{h,k}(x_l+wh_l,y_j+vk_j)dwdv\\
&-k_jh_i\int_0^{d_b}\int_0^{c_a}K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_j+vk_j)u_{h,k}(x_i+wh_i,y_j+vk_j)dwdv\\
&=g(x_{ia},y_{jb}).
\end{aligned}
\tag{۴.۳}
$$

با جایگذاری (۱.۳) در (۴.۳) نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
U_{ia,jb}&-\sum_{p=0}^{j-1}k_p\sum_{l=0}^{i-1}h_l\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\Big(\int_0^1\int_0^1 K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_p+vk_p)L_\alpha(w)\overline{L}_\beta(v)dwdv\Big)U_{l\alpha,p\beta}\\
&-h_i\sum_{p=0}^{j-1}k_p\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\Big(\int_0^1\int_0^{c_a}K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_p+vk_p)L_\alpha(w)\overline{L}_\beta(v)dwdv\Big)U_{i\alpha,p\beta}\\
&-k_j\sum_{l=0}^{i-1}h_l\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\Big(\int_0^{d_b}\int_0^1 K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_j+vk_j)L_\alpha(w)\overline{L}_\beta(v)dwdv\Big)U_{l\alpha,j\beta}\\
&-k_jh_i\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{n}\Big(\int_0^{d_b}\int_0^{c_a}K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_j+vk_j)L_\alpha(w)\overline{L}_\beta(v)dwdv\Big)U_{i\alpha,j\beta}\\
&=g(x_{ia},y_{jb}).
\end{aligned}
\tag{۵.۳}
$$

و فرم ماتریسی دستگاه (۵.۳) به‌صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathrm{I}_\tau-k_jh_i\mathrm{A}_{i,j}^{(i,j)}\Big)\mathrm{U}_{i,j}=\mathrm{g}_{i,j}&+\sum_{p=0}^{j-1}k_p\sum_{l=0}^{i-1}h_l\mathrm{A}_{i,j}^{(l,p)}\mathrm{U}_{l,p}\\
&+h_i\sum_{p=0}^{j-1}k_p\mathrm{A}_{i,j}^{(i,p)}\mathrm{U}_{i,p}+k_j\sum_{l=0}^{i-1}h_l\mathrm{A}_{i,j}^{(l,j)}\mathrm{U}_{l,j},
\end{aligned}
\tag{۶.۳}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_{i,j}&=[U_{i1,j1},\dots,U_{i1,jn},U_{i2,j1},\dots,U_{i2,jn},\dots,U_{im,j1},\dots,U_{im,jn}]^T,\\
\mathrm{g}_{i,j}&=[g(x_{i1},y_{j1}),\dots,g(x_{i1},y_{jn}),g(x_{i2},y_{j1}),\dots,g(x_{i2},y_{jn}),\dots,g(x_{im},y_{j1}),\dots,g(x_{im},y_{jn})]^T,\\
\mathrm{A}_{i,j}^{(i,j)}&=\big[A_{a\alpha}^{(i,j)}\big]_{a,\alpha=1,\dots,m},\qquad \mathrm{A}_{i,j}^{(l,p)}=\big[A_{a\alpha}^{(l,p)}\big]_{a,\alpha=1,\dots,m},\\
\mathrm{A}_{i,j}^{(i,p)}&=\big[A_{a\alpha}^{(i,p)}\big]_{a,\alpha=1,\dots,m},\qquad \mathrm{A}_{i,j}^{(l,j)}=\big[A_{a\alpha}^{(l,j)}\big]_{a,\alpha=1,\dots,m},\\
A_{a\alpha}^{(i,j)}&=\left[\int_0^{d_b}\int_0^{c_a}K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_j+vk_j)L_\alpha(w)\overline{L}_\beta(v)dwdv\right]_{b,\beta=1,\dots,n},
\end{aligned}
$$

$$A^{(l,p)}_{a\alpha} = \left[\int_{\circ}^{\text{۱}} \int_{\circ}^{\text{۱}} K(x_{ia}, y_{jb}, x_l + wh_l, y_p + vk_p) L_\alpha(w) \overline{L}_\beta(v) dw dv\right]_{b,\beta=\text{۱},\ldots,n},$$
$$A^{(i,p)}_{a\alpha} = \left[\int_{\circ}^{\text{۱}} \int_{\circ}^{c_a} K(x_{ia}, y_{jb}, x_i + wh_i, y_p + vk_p) L_\alpha(w) \overline{L}_\beta(v) dw dv\right]_{b,\beta=\text{۱},\ldots,n},$$
$$A^{(l,j)}_{a\alpha} = \left[\int_{\circ}^{d_b} \int_{\circ}^{\text{۱}} K(x_{ia}, y_{jb}, x_l + wh_l, y_j + vk_j) L_\alpha(w) \overline{L}_\beta(v) dw dv\right]_{b,\beta=\text{۱},\ldots,n},$$

همچنین I_τ ماتریس همانی از مرتبه $\tau = mn$ را نشان می‌دهد. در قضیه ۲.۳ زیر نشان می‌دهیم ماتریس $\left(\mathrm{I}_\tau - k_j h_i \mathrm{A}^{(i,j)}_{i,j}\right)$ معکوس‌پذیر است. به این ترتیب با حل دستگاه خطی (۶.۳) و جایگذاری مقادیر $U_{i\alpha,j\beta}$ در (۱.۳) می‌توان جواب هم‌محلی $u_{h,k}$ را به‌ازای هر $(x,y) \in \sigma_{i,j}$ به‌دست آورد. ابتدا به قضیه زیر از [۸] نیاز داریم.

قضیه ۱.۳. فضای باناخ B و عملگر $T \in L(B)$ را در نظر بگیرید. اگر $\|T\| < \text{۱}$ باشد آنگاه عملگر $I - T$ معکوس‌پذیر و $(I-T)^{-\text{۱}} \in L(B)$ است. همچنین داریم

$$(I-T)^{-\text{۱}} = \sum_{n=\circ}^{\infty} T^n,$$
$$\|(I-T)^{-\text{۱}}\| \le (\text{۱} - \|T\|)^{-\text{۱}},$$

قضیه ۲.۳. مفروضات قضیه ۲.۲ را در نظر بگیرید. آنگاه به‌ازای هر شبکه $\Omega_{h,k}$ عدد $H > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای‌هر $h, k \in (\circ, H)$ دستگاه (۶.۳) دارای جواب یکتا است.

اثبات. از آنجایی‌که هسته K روی D پیوسته است، بنابراین تمام عناصر ماتریس $\mathrm{A}^{(i,j)}_{i,j}$ کراندار هستند. با استفاده از قضیه ۱.۳ ماتریس $\mathrm{I}_\tau - k_j h_i \mathrm{A}^{(i,j)}_{i,j}$ معکوس‌پذیر است هرگاه

$$k_j h_i ||\mathrm{A}^{(i,j)}_{i,j}|| < \text{۱},$$

یا به‌عبارت دیگر

$$H^{\text{۲}} ||\mathrm{A}^{(i,j)}_{i,j}|| < \text{۱},$$

که در آن $H := \max\{h, k\}$ است.

□

۴ مرتبه همگرایی روش

در این بخش، همگرایی روش عددی ارائه شده را در قضیه‌ای ثابت می‌کنیم و مرتبه همگرایی روش را نیز به‌دست می‌آوریم. برای این منظور به قضیه پئانو از [۳] نیاز داریم.

قضیه ۱.۴. قضیه پئانو. شبکه $I_h = \{x_i : \ a \le x_\circ < \ldots < x_M \le b\}$ را روی بازه $[a,b]$ و نقاط $x_{ia} = x_i + c_a h_i$ با $\circ \le c_\text{۱} < \ldots < c_m \le \text{۱}$ و $h_i = x_{i+\text{۱}} - x_i$ را به‌ازای $i = \circ, \ldots, M - \text{۱}$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $p_{m-\text{۱}}$ چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ از درجه $m - \text{۱}$ باشد. اگر به‌ازای $\text{۱} \le d \le m$ داشته باشیم $u \in C^d[a,b]$ در این‌صورت خطای درون‌یاب پئانو به‌صورت زیر است

$$e_m(u; x_i + \theta h_i) := u(x_i + \theta h_i) - p_{m-\text{۱}}(x_i + \theta h_i) = h_i^d \int_{\circ}^{\text{۱}} \psi_d(\theta, t) u^{(d)}(x_i + t h_i) dt, \ \theta \in [\circ, \text{۱}],$$

که در آن

$$\psi_d(\theta,t) := \frac{\text{۱}}{(d-\text{۱})!} \left\{ (\theta - t)_+^{d-\text{۱}} - \sum_{k=\text{۱}}^{m} L_k(\theta)(c_k - t)_+^{d-\text{۱}} \right\},$$

و

$$(\theta - t)_+^p := \begin{cases} (\theta - t)^p, & \theta \ge t, \\ \circ, & \theta < t. \end{cases}$$

قضیه ۲.۴. در معادله (۱.۱) توابع $K \in C^d(D)$ و $g \in C^d(\Omega)$ را با $d > ۰$ در نظر بگیرید. همچنین فرض‌کنید $u_{h,k} \in S^{(-۱,-۱)}_{m-۱,n-۱}$ تقریب هم‌محلی u باشد. در این‌صورت به‌ازای $d \geq m, n$ داریم

$$\|u(x,y) - u_{h,k}(x,y)\|_\infty = O(H^\rho), \quad \rho := \min\{m,n\}.$$

اثبات. با گزاره بدیهی زیر آغاز می‌کنیم

$$\begin{aligned} u(x_i + \eta h_i, y_j + \xi k_j) &= \sum_{\alpha=۱}^{m}\sum_{\beta=۱}^{n} L_\alpha(\eta)\overline{L}_\beta(\xi)u(x_{i\alpha}, y_{j\beta}) \\ &+ \Big(u(x_i + \eta h_i, y_j + \xi k_j) - \sum_{\alpha=۱}^{m} L_\alpha(\eta)u(x_{i\alpha}, y_j + \xi k_j)\Big) \\ &+ \Big(\sum_{\alpha=۱}^{m} L_\alpha(\eta)u(x_{i\alpha}, y_j + \xi k_j) - \sum_{\alpha=۱}^{m}\sum_{\beta=۱}^{n} L_\alpha(\eta)\overline{L}_\beta(\xi)u(x_{i\alpha}, y_{j\beta})\Big), \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

با استفاده از قضیه پئانو، خطای درون‌یاب عبارت‌های داخل پرانتز در (۱.۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$u(x_i+\eta h_i, y_j+\xi k_j) = \sum_{\alpha=۱}^{m}\sum_{\beta=۱}^{n} L_\alpha(\eta)\overline{L}_\beta(\xi)u(x_{i\alpha}, y_{j\beta}) + h_i^m R_{m,i,j}(\eta,\xi) + k_j^n \overline{R}_{n,i,j}(\eta,\xi), \tag{۲.۴}$$

که در آن $R_{m,i,j}$ و $\overline{R}_{n,i,j}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} R_{m,i,j}(\eta,\xi) &= \int_۰^۱ \psi_m(\eta,t)\frac{\partial^m}{\partial x^m}u(x_i + t h_i, y_j + \xi k_j)dt, \quad \eta,\xi \in [۰,۱], \\ \psi_m(\eta,t) &= \frac{۱}{(m-۱)!}\{(\eta - t)_+^{m-۱} - \sum_{\alpha=۱}^{m} L_\alpha(\eta)(c_\alpha - t)_+^{m-۱}\}, \\ \overline{R}_{n,i,j}(\eta,\xi) &= \sum_{\alpha=۱}^{m} L_\alpha(\eta)\int_۰^۱ \overline{\psi}_n(\xi,t)\frac{\partial^n}{\partial y^n}u(x_{i\alpha}, y_j + t k_j)dt, \quad \eta,\xi \in [۰,۱], \\ \overline{\psi}_n(\xi,t) &= \frac{۱}{(n-۱)!}\{(\xi - t)_+^{n-۱} - \sum_{\beta=۱}^{n} \overline{L}_\beta(\xi)(d_\beta - t)_+^{n-۱}\}, \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $e_{h,k} := u - u_{h,k}$ و $\varepsilon_{i\alpha,j\beta} := e_{h,k}(x_{i\alpha}, y_{j\beta})$. با کم کردن عبارت (۱.۳) از (۲.۴) خواهیم داشت

$$e_{h,k}(x_i + \eta h_i, y_j + \xi k_j) = \sum_{\alpha=۱}^{m}\sum_{\beta=۱}^{n} L_\alpha(\eta)\overline{L}_\beta(\xi)\varepsilon_{i\alpha,j\beta} + h_i^m R_{m,i,j}(\eta,\xi) + k_j^n \overline{R}_{n,i,j}(\eta,\xi), \tag{۳.۴}$$

(۳.۴) نمایش موضعی از خطای هم‌محلی را نشان می‌دهد و در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$e_{h,k}(x_{ia}, y_{jb}) = \int_۰^{y_{jb}}\int_۰^{x_{ia}} K(x_{ia}, y_{jb}, w, v)e_{h,k}(w,v)dwdv, \tag{۴.۴}$$

با جدا کردن حدود انتگرال‌گیری در (۴.۴) و اعمال تغییر متغیر $\theta = x_l + w h_l, \theta \in (x_l, x_{l+۱})$، $\theta = x_i + w h_i, \theta \in$

(x_i, x_{ia})، $t = y_p + vk_p, t \in (y_p, y_{p+1})$ و $t = y_j + vk_j, t \in (y_j, y_{jb})$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ia,jb} &= \sum_{p=0}^{j-1} k_p \int_0^1 \sum_{l=0}^{i-1} h_l \int_0^1 K(x_{ia}, y_{jb}, x_l + wh_l, y_p + vk_p) e_{h,k}(x_l + wh_l, y_p + vk_p) dw dv \\ &+ h_i \sum_{p=0}^{j-1} k_p \int_0^1 \int_0^{c_a} K(x_{ia}, y_{jb}, x_i + wh_i, y_p + vk_p) e_{h,k}(x_i + wh_i, y_p + vk_p) dw dv \\ &+ k_j \int_0^{d_b} \sum_{l=0}^{i-1} h_l \int_0^1 K(x_{ia}, y_{jb}, x_l + wh_l, y_j + vk_j) e_{h,k}(x_l + wh_l, y_j + vk_j) dw dv \\ &+ k_j h_i \int_0^{d_b} \int_0^{c_a} K(x_{ia}, y_{jb}, x_i + wh_i, y_j + vk_j) e_{h,k}(x_i + wh_i, y_j + vk_j) dw dv, \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

با جایگذاری (۳.۴) در (۵.۴) می‌توان نشان داد که ضرایب مجهول $\varepsilon_{i\alpha,j\beta}$ در دستگاه خطی زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{I}_\tau - k_j h_i \mathrm{A}_{i,j}^{(i,j)}\right) \mathrm{e}_{i,j} &= \sum_{p=0}^{j-1} k_p \sum_{l=0}^{i-1} h_l \mathrm{A}_{i,j}^{(l,p)} \mathrm{e}_{l,p} + h_i \sum_{p=0}^{j-1} k_p \mathrm{A}_{i,j}^{(i,p)} \mathrm{e}_{i,p} \\ &+ k_j \sum_{l=0}^{i-1} h_l \mathrm{A}_{i,j}^{(l,j)} \mathrm{e}_{l,j} + \sum_{p=0}^{j-1} k_p \sum_{l=0}^{i-1} h_l^{m+1} \mathrm{r}_{i,j}^{(l,p)} \\ &+ \sum_{p=0}^{j-1} k_p^{n+1} \sum_{l=0}^{i-1} h_l \bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(l,p)} + h_i^{m+1} \sum_{p=0}^{j-1} k_p \mathrm{r}_{i,j}^{(i,p)} \\ &+ h_i \sum_{p=0}^{j-1} k_p^{n+1} \bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(i,p)} + k_j \sum_{l=0}^{i-1} h_l^{m+1} \mathrm{r}_{i,j}^{(l,j)} \\ &+ k_j^{n+1} \sum_{l=0}^{i-1} h_l \bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(l,j)} + h_i^{m+1} k_j \mathrm{r}_{i,j}^{(i,j)} + h_i k_j^{n+1} \bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(i,j)} \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_{i,j} &= \left[\varepsilon_{i1,j1}, \dots, \varepsilon_{i1,jn}, \varepsilon_{i2,j1}, \dots, \varepsilon_{i2,jn}, \dots, \varepsilon_{im,j1}, \dots, \varepsilon_{im,jn}\right]^T, \\
\mathrm{r}_{i,j}^{(l,p)} &= \left[r_{i1,j1}^{(l,p)}, \dots, r_{i1,jn}^{(l,p)}, r_{i2,j1}^{(l,p)}, \dots, r_{i2,jn}^{(l,p)}, \dots, r_{im,j1}^{(l,p)}, \dots, r_{im,jn}^{(l,p)}\right]^T, \\
\bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(l,p)} &= \left[\bar{r}_{i1,j1}^{(l,p)}, \dots, \bar{r}_{i1,jn}^{(l,p)}, \bar{r}_{i2,j1}^{(l,p)}, \dots, \bar{r}_{i2,jn}^{(l,p)}, \dots, \bar{r}_{im,j1}^{(l,p)}, \dots, \bar{r}_{im,jn}^{(l,p)}\right]^T, \\
\mathrm{r}_{i,j}^{(i,p)} &= \left[r_{i1,j1}^{(i,p)}, \dots, r_{i1,jn}^{(i,p)}, r_{i2,j1}^{(i,p)}, \dots, r_{i2,jn}^{(i,p)}, \dots, r_{im,j1}^{(i,p)}, \dots, r_{im,jn}^{(i,p)}\right]^T, \\
\bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(i,p)} &= \left[\bar{r}_{i1,j1}^{(i,p)}, \dots, \bar{r}_{i1,jn}^{(i,p)}, \bar{r}_{i2,j1}^{(i,p)}, \dots, \bar{r}_{i2,jn}^{(i,p)}, \dots, \bar{r}_{im,j1}^{(i,p)}, \dots, \bar{r}_{im,jn}^{(i,p)}\right]^T, \\
\mathrm{r}_{i,j}^{(l,j)} &= \left[r_{i1,j1}^{(l,j)}, \dots, r_{i1,jn}^{(l,j)}, r_{i2,j1}^{(l,j)}, \dots, r_{i2,jn}^{(l,j)}, \dots, r_{im,j1}^{(l,j)}, \dots, r_{im,jn}^{(l,j)}\right]^T, \\
\bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(l,j)} &= \left[\bar{r}_{i1,j1}^{(l,j)}, \dots, \bar{r}_{i1,jn}^{(l,j)}, \bar{r}_{i2,j1}^{(l,j)}, \dots, \bar{r}_{i2,jn}^{(l,j)}, \dots, \bar{r}_{im,j1}^{(l,j)}, \dots, \bar{r}_{im,jn}^{(l,j)}\right]^T, \\
\mathrm{r}_{i,j}^{(i,j)} &= \left[r_{i1,j1}^{(i,j)}, \dots, r_{i1,jn}^{(i,j)}, r_{i2,j1}^{(i,j)}, \dots, r_{i2,jn}^{(i,p)}, \dots, r_{im,j1}^{(i,j)}, \dots, r_{im,jn}^{(i,j)}\right]^T, \\
\bar{\mathrm{r}}_{i,j}^{(i,j)} &= \left[\bar{r}_{i1,j1}^{(i,j)}, \dots, \bar{r}_{i1,jn}^{(i,j)}, \bar{r}_{i2,j1}^{(i,j)}, \dots, \bar{r}_{i2,jn}^{(i,j)}, \dots, \bar{r}_{im,j1}^{(i,j)}, \dots, \bar{r}_{im,jn}^{(i,j)}\right]^T,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{ia,jb}^{(l,p)} &= \int_{\circ}^{\backslash}\int_{\circ}^{\backslash} K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_p+vk_p)R_{m,l,p}(w,v)dwdv,\\
\overline{r}_{ia,jb}^{(l,p)} &= \int_{\circ}^{\backslash}\int_{\circ}^{\backslash} K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_p+vk_p)\overline{R}_{n,l,p}(w,v)dwdv,\\
r_{ia,jb}^{(i,p)} &= \int_{\circ}^{\backslash}\int_{\circ}^{c_a} K(x_{ia},y_{jb},x_i+uh_i,y_p+vk_p)R_{m,i,p}(u,v)dudv,\\
\overline{r}_{ia,jb}^{(i,p)} &= \int_{\circ}^{\backslash}\int_{\circ}^{c_a} K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_p+vk_p)\overline{R}_{n,i,p}(w,v)dwdv,\\
r_{ia,jb}^{(l,j)} &= \int_{\circ}^{d_b}\int_{\circ}^{\backslash} K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_j+vk_j)R_{m,l,j}(w,v)dwdv,\\
\overline{r}_{ia,jb}^{(l,j)} &= \int_{\circ}^{d_b}\int_{\circ}^{\backslash} K(x_{ia},y_{jb},x_l+wh_l,y_j+vk_j)\overline{R}_{n,l,j}(w,v)dwdv,\\
r_{ia,jb}^{(i,j)} &= \int_{\circ}^{d_b}\int_{\circ}^{c_a} K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_j+vk_j)R_{m,i,j}(w,v)dwdv,\\
\overline{r}_{ia,jb}^{(i,j)} &= \int_{\circ}^{d_b}\int_{\circ}^{c_a} K(x_{ia},y_{jb},x_i+wh_i,y_j+vk_j)\overline{R}_{n,i,j}(w,v)dwdv,
\end{aligned}
$$

با توجه به قضیه ۲.۳ ثابت $H > \circ$ وجود دارد که به‌ازای $h,k \in (\circ, H)$ عمل‌گر $(\mathrm{I}_\tau - h_ik_j\mathrm{A}_{i,j}^{(i,j)})$ معکوس‌پذیر و کراندار است بنابراین خواهیم داشت

$$
\|(\mathrm{I}_\tau - h_ik_j\mathrm{A}_{i,j}^{(i,j)})^{-\backslash}\|_{\backslash} \le D_{\circ},\ \ i=\circ,\dots,M-\backslash,\ j=\circ,\dots,N-\backslash,
$$

از طرف دیگر با توجه به مفروضات، ماتریس‌های $\mathrm{A}_{i,j}^{(l,p)}$، $\mathrm{A}_{i,j}^{(i,p)}$ و $\mathrm{A}_{i,j}^{(l,j)}$ کراندار هستند بنابراین برای $\circ \le l < i \le M-\backslash$ و $\circ \le p < j \le N-\backslash$ داریم

$$
\|\mathrm{A}_{i,j}^{(l,p)}\|_{\backslash} \le D_{\backslash},\quad \|\mathrm{A}_{i,j}^{(i,p)}\|_{\backslash} \le D_{۲},\quad \|\mathrm{A}_{i,j}^{(l,j)}\|_{\backslash} \le D_{۳},
$$

هم‌چنین می‌توان نتیجه گرفت

$$
\|\mathrm{r}_{i,j}^{(l,p)}\|_{\backslash}, \|\mathrm{r}_{i,j}^{(i,p)}\|_{\backslash}, \|\mathrm{r}_{i,j}^{(l,j)}\|_{\backslash}, \|\mathrm{r}_{i,j}^{(i,j)}\|_{\backslash} \le mn\widehat{K}\overline{\omega}_m\overline{u}_m,
$$

و

$$
\|\overline{\mathrm{r}}_{i,j}^{(l,p)}\|_{\backslash}, \|\overline{\mathrm{r}}_{i,j}^{(i,p)}\|_{\backslash}, \|\overline{\mathrm{r}}_{i,j}^{(l,j)}\|_{\backslash}, \|\overline{\mathrm{r}}_{i,j}^{(i,j)}\|_{\backslash} \le m^{۲}n\widehat{K}\widehat{\omega}_n\widehat{u}_n\delta,
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_m &:= \|\frac{\partial^m}{\partial x^m}u\|_{\infty},\\
\overline{\omega}_m &:= \max_{w\in[\circ,\backslash]}\int_{\circ}^{\backslash}|\psi_m(w,t)|dt,\\
\widehat{K} &:= \max_{(x,y)\in\Omega}\int_{\circ}^{y}\int_{\circ}^{x}|K(x,y,w,v)|dwdv,\\
\widehat{u}_n &:= \|\frac{\partial^n}{\partial y^n}u\|_{\infty},\\
\widehat{\omega}_n &:= \max_{v\in[\circ,\backslash]}\int_{\circ}^{\backslash}|\overline{\psi}_n(v,t)|dt,\\
\delta &:= \max_{\alpha}\|L_{\alpha}\|_{\infty},
\end{aligned}
$$

با توجه به نتایج به‌دست آمده و رابطه (۶.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}_{i,j}\|_1 \leq\ & D_0 D_1 \sum_{p=0}^{j-1} k_p \sum_{l=0}^{i-1} h_l \|\mathrm{e}_{l,p}\|_1 + D_0 D_2 h_i \sum_{p=0}^{j-1} k_p \|\mathrm{e}_{i,p}\|_1 \\ & + D_0 D_3 k_j \sum_{l=0}^{i-1} h_l \|\mathrm{e}_{l,j}\|_1 + \gamma \sum_{p=0}^{j-1} k_p \sum_{l=0}^{i-1} h_l^{m+1} \\ & + \overline{\gamma} \sum_{p=0}^{j-1} k_p^{n+1} \sum_{l=0}^{i-1} h_l + \gamma h_i^{m+1} \sum_{p=0}^{j-1} k_p + \overline{\gamma} h_i \sum_{p=0}^{j-1} k_p^{n+1} \\ & + \gamma k_j \sum_{l=0}^{i-1} h_l^{m+1} + \overline{\gamma} k_j^{n+1} \sum_{l=0}^{i-1} h_l + \gamma k_j h_i^{m+1} + \overline{\gamma} k_j^{n+1} h_i,\end{aligned} \tag{۷.۴}$$

که در آن

$$\gamma := mnD_0 \widehat{K} \overline{\omega}_m \overline{u}_m, \quad \overline{\gamma} := m^2 n D_0 \widehat{K} \widehat{\omega}_n \widehat{u}_n \delta,$$

(۷.۴) را می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}_{i,j}\|_1 \leq\ & D_0 D_1 \sum_{p=0}^{j-1} k_p \sum_{l=0}^{i-1} h_l \|\mathrm{e}_{l,p}\|_1 + D_0 D_2 h_i \sum_{p=0}^{j-1} k_p \|\mathrm{e}_{i,p}\|_1 \\ & + D_0 D_3 k_j \sum_{l=0}^{i-1} h_l \|\mathrm{e}_{l,j}\|_1 + \gamma XYH^m + \overline{\gamma} XYH^n + \gamma YH^{m+1} \\ & + \overline{\gamma} YH^{n+1} + \gamma XH^{m+1} + \overline{\gamma} XH^{n+1} + \gamma H^{m+2} + \overline{\gamma} H^{n+2},\end{aligned} \tag{۸.۴}$$

از (۸.۴) می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $i = 0, \dots, M-1$ و $j = 0, \dots, N-1$ داریم

$$\|\mathrm{e}_{i,j}\|_1 = O(H^\rho), \quad \rho := \min\{m, n\}, \tag{۹.۴}$$

حال برای رابطه (۳.۴) خواهیم داشت

$$|e_{h,k}(x_i + \eta h_i, y_j + \xi k_j)| \leq \left(\max_i \|L_i\|_\infty\right)\left(\max_j \|\overline{L}_j\|_\infty\right)\|\mathrm{e}_{i,j}\|_1 + H^m \overline{\omega}_m \overline{u}_m + H^n m \widehat{\omega}_n \widehat{u}_n \delta, \tag{۱۰.۴}$$

سرانجام از (۹.۴) و (۱۰.۴) می‌توان نتیجه گرفت

$$\|e_{h,k}\|_\infty = O(H^\rho). \tag{۱۱.۴}$$

و به‌این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود. □

۵ نتایج عددی

در این بخش، جواب چند معادله انتگرال را با استفاده از روش هم‌محلی در فضای چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای $S_{m-1,n-1}^{(-1,-1)}$ تقریب می‌کنیم. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده، نتایج به‌دست آمده را با نتایج عددی به‌دست آمده از روش دیگری مقایسه می‌کنیم. هم‌چنین برای تایید نتایج به‌دست آمده در بخش همگرایی، مرتبه همگرایی را نیز به‌دست خواهیم آورد. برای ادامه شبکه یکنواخت

$$\Omega_{h,k} = \left\{\frac{i}{M}; \quad i = 0, \dots, M\right\} \times \left\{\frac{j}{N}; \quad j = 0, \dots, N\right\},$$

را روی $\Omega = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ در نظر می‌گیریم.

مثال۲.۶.۱. [۱۲] معادله انتگرال ولترای دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x,y) - \int_{۰}^{y}\int_{۰}^{x}(wvx^{۲})u(w,v)dwdv = xy - \frac{۱}{۹}x^{۵}y^{۳}, \quad (x,y)\in[۰,۱]\times[۰,۱], \tag{۱.۵}$$

جواب دقیق معادله $u(x,y) = xy$ است. با انتخاب $m = n = ۲$ و پارامترهای هم‌محلی $c_{۱} = d_{۱} = \frac{۱}{۳}$ و $c_{۲} = d_{۲} = ۱$ جواب مسئله را در فضای $S_{۱,۱}^{(-۱,-۱)}$ تقریب می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۱.۳) به‌ازای $M = N = ۱$ جواب تقریبی را در $\sigma_{۰,۰} = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} u_{h,k}(x_{۰} + \eta h_{۰}, y_{۰} + \xi k_{۰}) &= L_{۱}(\eta)\overline{L}_{۱}(\xi)U_{۰۱,۰۱} + L_{۱}(\eta)\overline{L}_{۲}(\xi)U_{۰۱,۰۲} \\ &\quad + L_{۲}(\eta)\overline{L}_{۱}(\xi)U_{۰۲,۰۱} + L_{۲}(\eta)\overline{L}_{۲}(\xi)U_{۰۲,۰۲}, \end{aligned} \tag{۲.۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned} L_{۱}(\eta) &= -\frac{۳}{۲}\eta + \frac{۳}{۲}, \quad L_{۲}(\eta) = \frac{۳}{۲}\eta - \frac{۱}{۲}, \\ \overline{L}_{۱}(\xi) &= -\frac{۳}{۲}\xi + \frac{۳}{۲}, \quad \overline{L}_{۲}(\xi) = \frac{۳}{۲}\xi - \frac{۱}{۲}, \end{aligned}$$

با توجه به دستگاه (۶.۳) داریم

$$\left(\mathrm{I}_{۴} - k_{۰}h_{۰}\mathrm{A}_{۰,۰}^{(۰,۰)}\right)\mathrm{U}_{۰,۰} = \mathrm{g}_{۰,۰}, \tag{۳.۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{۰,۰} &= [g(x_{۰۱}, y_{۰۱}),\ g(x_{۰۱}, y_{۰۲}),\ g(x_{۰۲}, y_{۰۱}),\ g(x_{۰۲}, y_{۰۲})]^{T} \\ &= [g(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}),\ g(\frac{۱}{۳}, ۱),\ g(۱, \frac{۱}{۳}),\ g(۱, ۱)]^{T} \\ &= [۰٫۱۱۱۰۹۴۱۷۶۰۲۳۳۰۲۷,\ ۰٫۳۳۲۸۷۶۰۸۵۹۶۲۵۰۵۷, \\ &\qquad ۰٫۳۲۹۲۱۸۱۰۶۹۹۵۸۸۴۷,\ ۰٫۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸۹]^{T}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{۰,۰}^{(۰,۰)} &= \begin{bmatrix} A_{۱۱}^{(۰,۰)} & A_{۱۲}^{(۰,۰)} \\ A_{۲۱}^{(۰,۰)} & A_{۲۲}^{(۰,۰)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۰٫۰۰۰۴۶۶۷۷۳۳۵۷۷۲ & -۰٫۰۰۰۰۶۶۶۸۱۹۰۸۲۴ & -۰٫۰۰۰۰۶۶۶۸۱۹۰۸۲۴ & ۰٫۰۰۰۰۰۹۵۲۵۹۸۶۸۹ \\ ۰٫۰۰۱۸۰۰۴۱۱۵۲۲۶۳ & ۰٫۰۰۱۸۰۰۴۱۱۵۲۲۶۳ & -۰٫۰۰۰۲۵۷۲۰۱۶۴۶۰۹ & -۰٫۰۰۰۲۵۷۲۰۱۶۴۶۰۹ \\ ۰٫۰۱۶۲۰۳۷۰۳۷۰۳۷۰ & -۰٫۰۰۲۳۱۴۸۱۴۸۱۴۸۱ & ۰٫۰۱۶۲۰۳۷۰۳۷۰۳۷۰ & -۰٫۰۰۲۳۱۴۸۱۴۸۱۴۸۱ \\ ۰٫۰۶۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ & ۰٫۰۶۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ & ۰٫۰۶۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ & ۰٫۰۶۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با حل دستگاه (۳.۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{۰,۰} &= [U_{۰۱,۰۱}, U_{۰۱,۰۲}, U_{۰۲,۰۱}, U_{۰۲,۰۲}]^{T} \\ &= [۰٫۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰, ۰٫۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۴, ۰٫۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳, ۱]^{T}, \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده $U_{۰i,۰j}$ برای $i, j = ۱, ۲$ در (۲.۵) خواهیم داشت

$$u_{h,k}(x,y) = ۰٫۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۸xy + ۰٫۱ \times ۱۰^{-۱۵}x + ۰٫۴ \times ۱۰^{-۱۵}y - ۰٫۲ \times ۱۰^{-۱۵},$$

واضح است که روش هم‌محلی برای این مثال در واقع جواب دقیق را به‌دست می‌دهد.
این مسئله در مرجع [۱۲] با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین بررسی شده است. هم‌چنین خطای مطلق حاصل از روش برنشتاین به‌ازای $m=n=6$ و روش هم‌محلی به‌ازای $m=n=2$ در برخی نقاط از Ω در جدول ۱ گزارش شده است. مقایسه بین نتایج حاصل از هر دو روش نشان‌می‌دهد روش هم‌محلی تقریب‌های دقیق‌تری نسبت به روش برنشتاین برای این مسئله به‌دست می‌دهد.

نقاط	خطای روش هم‌محلی	خطای روش برنشتاین
$(0,0)$	2×10^{-16}	1.8485×10^{-14}
$(0.2,0.2)$	2.1×10^{-16}	6.0285×10^{-10}
$(0.4,0.4)$	1×10^{-16}	1.3955×10^{-7}
$(0.6,0.6)$	0	4.6421×10^{-7}
$(0.8,0.8)$	0	1.8393×10^{-5}
$(1,1)$	0	4.4512×10^{-4}

جدول ۱: مقایسه خطای مطلق روش هم‌محلی و روش برنشتاین [۱۲] در مثال ۱.۶.۲

مثال ۲.۶.۲. [۱۲] معادله انتگرال ولترای دوبعدی

$$u(x,y)=-1+e^x+e^y+\int_0^y\int_0^x u(w,v)dwdv,\quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \tag{4.5}$$

را با جواب دقیق $u(x,y)=e^{x+y}$ در نظر بگیرید.
با انتخاب $m=n=5$ و پارامترهای هم‌محلی به‌صورت

$$c_1=0,\ c_2=\frac{1}{3},\ c_3=\frac{1}{2},\ c_4=\frac{2}{3},\ c_5=1$$

و

$$d_1=0,\ d_2=\frac{1}{3},\ d_3=\frac{1}{2},\ d_4=\frac{2}{3},\ d_5=1$$

جواب مسئله را در فضای $S_{4,4}^{(-1,-1)}$ تقریب می‌کنیم. هم‌چنین جواب این مسئله در مرجع [۱۲] با استفاده از چندجمله‌ای‌های دو بعدی برنشتاین تقریب زده شده است. خطای مطلق با استفاده از روش هم‌محلی به‌ازای $M=N=8$ $(h=k=\frac{1}{8})$ و روش برنشتاین به‌ازای $m=n=6$ در برخی نقاط از Ω در جدول ۲ ارائه شده است. مقایسه بین نتایج حاصل از هر دو روش نشان می‌دهد علی‌رغم اینکه در روش برنشتاین از چندجمله‌ای درجه بالاتری نسبت به روش هم‌محلی استفاده شده است اما روش هم‌محلی تقریبات دقیق‌تری نسبت به روش برنشتاین برای این مسئله به‌دست می‌دهد.

نقاط	خطای روش هم‌محلی	خطای روش برنشتاین
$(0,0)$	0	9.5454×10^{-10}
$(0.2,0.2)$	3.2733×10^{-10}	4.4433×10^{-8}
$(0.4,0.4)$	3.4387×10^{-9}	5.0967×10^{-8}
$(0.6,0.6)$	4.7581×10^{-9}	3.5705×10^{-8}
$(0.8,0.8)$	9.6059×10^{-10}	1.2625×10^{-8}
$(1,1)$	4.9810×10^{-11}	1.4476×10^{-8}

جدول ۲: مقایسه خطای مطلق روش هم‌محلی و روش برنشتاین [۱۲] در مثال ۲.۶.۲

حال مرتبه همگرایی روش را به‌دست می‌آوریم. همواری K و g در مثال ۲.۶.۲ همواری جواب را نتیجه می‌دهد. با توجه به قضیه ۲.۴ می‌دانیم که برای جواب هموار مرتبه همگرایی روش وابسته به درجه چندجمله‌ای تقریب‌زننده است. ابتدا پارامترهای هم‌محلی $c_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$، $c_2=\frac{1}{2}$، $c_3=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$، $d_1=\frac{1}{3}$ و $d_2=1$ را انتخاب می‌کنیم و جواب مسئله را در $S_{2,1}^{(-1,-1)}$ تقریب می‌کنیم. سپس پارامترهای

هم‌محلی $c_1=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$، $c_2=\frac{1}{2}$، $c_3=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$، $c_4=1$، $d_1=\frac{1}{4}$، $d_2=\frac{1}{2}$، $d_3=\frac{2}{3}$ و $d_4=\frac{3}{4}$ را در نظر می‌گیریم و جواب مسئله را در فضای $S_{3,3}^{(-1,-1)}$ تقریب می‌کنیم. نرم خطا به‌صورت

$$\|e_{h,k}\|_\infty := \max\Big\{|u(x,y)-u_{h,k}(x,y)|,\quad (x,y)\in\Omega_{h,k}\Big\}, \qquad (۵.۵)$$

و نرخ همگرایی به‌صورت [۶]

$$\text{نرخ همگرایی} := \log_2\left(\frac{\|e_{h,k}\|_\infty}{\|e_{\frac{h}{2},\frac{k}{2}}\|_\infty}\right), \qquad (۶.۵)$$

محاسبه شده و در جدول ۳ ارائه شده است.

	$m=3,\ n=2$		$m=n=4$	
طول گام	خطا	مرتبه همگرایی	خطا	مرتبه همگرایی
$\frac{1}{2}$	1.5678×10^{-1}		1.0533×10^{-3}	
$\frac{1}{4}$	3.3377×10^{-2}	2.2318	5.6851×10^{-5}	4.2116
$\frac{1}{8}$	7.6902×10^{-3}	2.1178	3.3036×10^{-6}	4.1051
$\frac{1}{16}$	1.8449×10^{-3}	2.0595	1.9911×10^{-7}	4.0524

جدول ۳: نرم‌های خطا و مرتبه همگرایی روش هم‌محلی در مثال ۲.۶.۲

بنابر قضیه ۲.۴ مرتبه همگرایی روش وقتی در فضای $S_{2,1}^{(-1,-1)}$ و $S_{3,3}^{(-1,-1)}$ تقریب می‌کنیم به‌ترتیب برابر با ۲ و ۴ است. مرتبه همگرایی در ستون سوم جدول (۳) به عدد ۲ و در ستون پنجم جدول (۳) به عدد ۴ نزدیک می‌شود و نتایج تحلیلی به‌دست آمده در قضیه ۲.۴ را تایید می‌کند.

مثال ۳.۶.۲. معادله انتگرال ولترای دوبعدی

$$u(x,y)=g(x,y)+\int_0^y\int_0^x (xw^2+v)u(w,v)\,dw\,dv,\quad (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \qquad (۷.۵)$$

با

$$g(x,y)=xy+y^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{18}x^5y^2-\frac{2}{21}x^4y^{7/2}-\frac{1}{6}x^2y^3-\frac{2}{9}xy^{9/2},$$

و جواب دقیق $u(x,y)=xy+y^{\frac{5}{2}}$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض‌کنید پارامترهای هم‌محلی $c_1=\frac{1}{3}$ و $c_2=1$. با انتخاب پارامترهای هم‌محلی $d_1=0$ و $d_2=1$ جواب را در $S_{1,1}^{(-1)}$ پارامترهای $d_1=0$، $d_2=\frac{2}{3}$ و $d_3=1$ جواب را در $S_{1,2}^{(-1,-1)}$ و به‌کمک پارامترهای $d_1=0$، $d_2=\frac{1}{3}$، $d_3=\frac{2}{3}$ و $d_4=1$ جواب را در $S_{1,3}^{(-1,-1)}$ تقریب می‌کنیم. خطای مطلق در برخی نقاط از Ω به‌ازای $M=N=8$ $(h=k=\frac{1}{8})$ در جدول ۴ ارائه شده است. نتایج لیست‌شده در جدول ۴ نشان می‌دهد که با افزایش درجه چندجمله‌ای تقریب‌زننده، خطای عددی بهبود می‌یابد و همچنین می‌توان نتیجه گرفت روش ارائه شده برای معادلات با جواب ناهموار نیز از دقت خوبی برخوردار است.

نقاط	$m=n=2$	$m=2,n=3$	$m=2,n=4$
$(0,0)$	0	0	0
$(0.2,0.2)$	3.0793×10^{-3}	2.2406×10^{-5}	7.8741×10^{-7}
$(0.4,0.4)$	3.1421×10^{-3}	7.0591×10^{-5}	2.7245×10^{-7}
$(0.6,0.6)$	3.9616×10^{-3}	1.2841×10^{-5}	6.3137×10^{-7}
$(0.8,0.8)$	7.6386×10^{-3}	5.4904×10^{-5}	2.8093×10^{-7}
$(1,1)$	3.5560×10^{-3}	2.5706×10^{-5}	6.9211×10^{-7}

جدول ۴: خطای مطلق روش هم‌محلی در مثال ۳.۶.۲

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات انتگرال دوبعدی ولترا با استفاده از روش هم محلی حل شد. در اینجا ضمن اثبات وجود و یکتایی جواب چنین معادلاتی، قضیه نمایش برای جواب این دسته از معادلات نیز ثابت شد. هم‌چنین همگرایی روش ثابت شده و مرتبه همگرایی روش هم به‌دست آمد و مثالهایی برای تایید دقت و مرتبه همگرایی ارائه شد. به‌نظر می‌رسد روش ارائه شده در این مقاله را می‌توان برای معادلات انتگرال–دیفرانسیل دوبعدی فردهلم خطی و غیرخطی، هم‌چنین معادلات انتگرال–دیفرانسیل غیرخطی ولترا نیز بسط داد.

فهرست منابع

[1] Bechouat, T., 2023. A collocation method for Fredholm integral equations of the first kind via iterative regularization scheme. *Mathematical Modelling and Analysis*, **28(2)**, pp. 237–254. doi: https://doi.org/10.3846/mma.2023.16453.

[2] Bhrawya, A. H., Abdelkawy, M. A., Machadoc, J. T. and Amin, A. Z. M., 2016. Legendre–Gauss–Lobatto collocation method for solving multi-dimensional Fredholm integral equations. *Computers and Mathematics with Applications*, in press. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.011.

[3] Brunner, H., 2004. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. *Cambridge University Press*.

[4] Brunner, H., 2017. Volterra integral equations: an introduction to theory and applications. *Cambridge University Press, Cambridge*.

[5] Ebrahimi, N. and Rashidinia, J., 2015. Collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, **270**, pp: 156–164. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.032.

[6] Guoqiang, H., Hayami, K., Sugihara, K. and Jiong, W., 2000. Extrapolation method of iterated collocation solution for two-dimensional nonlinear Volterra integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, **112**, pp: 49–69. doi: https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00036-3.

[7] Hoseini, S. H., Tari, A. and Hassanpour-Ezatti, M., 2017. Introducing an Integro-Differential Equation Model for Spread of Addictive Drugs abuse *Quarterly Journal of Research on Addiction*, **10(40)**, pp: 255–266. doi: http://etiadpajohi.ir/article-1-1002-fa.html, (In Persian).

[8] Hutson, V. and Pym, J. S., 2004. Applications of functional analysis and operator theory. *Cambridge University Press*.

[9] Jerri, A. J., 1999. Introduction to integral equations with applications. *John Wiley and Sons, INC*.

[10] Kasture, D. Y. and Deo, G., 1977. Inequalities of Gronwall type in two independent variables. *Journal of Mathematical and Applications*, **58**, pp: 361–372.

[11] Kazemi, S. and Tari, A., 2022. Collocation Method for Solving Two-Dimensional Fractional Volterra Integro-Differential Equations. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, **46**, pp: 1629–1639. doi: https://doi.org/10.1007/s40995-022-01346-x.

[12] Khan, F., Omar M. and Ullah, Z., 2018. Discretization method for the numerical solution of 2D Volterra integral equation based on two-dimensional Bernstein polynomial. *AIP Advances*, **8**, pp: 1–9. doi: https://doi.org/10.1063/1.5051113.

[13] Liang, H. and Brunner, H., 2019. The Convergence of collocation solution in continuous piecewise polynomial spaces for weakly singular Volterra integral equations. *Siam J. Numerical Analysis*, **57(4)**, pp: 1875–1896. doi: https://doi.org/10.1137/19M1245062.

[14] Marasi, H.R., Soltani Joujehi, A. and Derakhshan, M.H., 2023. Solving Fractional Differential Equations Using Differential Transform Method Combined with Fractional Linear Multistep Methods. *Journal of Advanced Mathematical Modeling (JAMM)*, **13(1)**, pp: 1–16. doi: 10.22055/JAMM.2023.41315.2062, (In Persian).

[15] Rezazadeh, E., 2022. Investigation of a new method for the numerical solution of a system of hypersingular integral equations. *Journal of Advanced Mathematical Modeling (JAMM)*, **12(3)**, pp: 448–468. doi: 10.22055/JAMM.2022.40893.2042, (In Persian).

[16] Tari, A. 2012. The differential transform method for solving the model describing biological species living together. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **7(2)**, pp: 55–66. doi: 10.7508/ijmsi.2012.02.006.

[17] Tari, A. and Bildik, N., 2022. Numerical solution of Volterra series with error estimation. *Applied and Computational Mathematics*, **21(1)**, pp: 3–20. doi: 10.30546/1683-6154.21.1.2022.3.

[18] Wang, K. and Wang, Q., 2014. Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra–Fredholm integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **260**, pp: 294–300. doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.09.050.

Collocation method for numerical solution of two-dimensional Linear Volterra integral equations and prove its convergence

Abolfazl Tari, [2] Somayeh Kazemi

Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Shahed University, Tehran, Iran

Communicated by: Mohammad Esmaeil Samei

Received: 10 July 2023 Accepted: 27 December 2023

Abstract: In this paper, we extend the collocation method for the numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations. For this purpose, we first prove the existence and uniqueness of the solution of these types of equations and present a resolvent kernel representation for their solution. Then, we extend the collocation method using piecewise polynomials to solve the mentioned equations and obtain the corresponding algebraic system of equations and show that the system has a unique solution. We also prove the convergence of the method and obtain the order of convergence of the method by proving a theorem. Finally, we present some numerical examples to show the efficiency of the method and confirm the obtained theoretical results.

Keywords: Two-dimensional Volterra integral equations, Collocation method, Piecewise polynomials, convergence.

[2]Corresponding author

E-mail addresses: (A. Tari) tari@shahed.ac.ir, (S. Kazemi) somayeh.kazemi@shahed.ac.ir