



## ارائه‌ی یک روش تکراری برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی گسسته شامل سیستم‌های به هم متصل غیرخطی

منیژه حسن‌آبادی<sup>(۱)</sup>، اسداله محمودزاده وزیری<sup>(۱)</sup> و امین جاجرمی<sup>(۲)</sup>  
<sup>(۱)</sup> گروه ریاضیات کاربردی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران  
<sup>(۲)</sup> گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

دبیر مسئول: علی رضا فخارزاده چهارمی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۱۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۴

**چکیده:** این مقاله ارائه دهنده‌ی یک روش تکراری برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی گسسته شامل سیستم‌های به هم متصل غیرخطی می‌باشد. با این روش، مسأله‌ی مقدار مرزی گسسته و به هم متصل غیرخطی، به دست آمده از شرایط لازم بهینگی، به دنباله‌ای از مسائل مقدار مرزی گسسته‌ی خطی نامتغیر با زمان تبدیل می‌شود. همچنین، مسأله‌ی مقدار مرزی خطی در هر تکرار از روش پیشنهادی شامل چندین زیرمسأله‌ی خطی جدا از هم بوده که به صورت موازی و مستقل از هم قابل حل می‌باشند. حل مسائل اشاره‌شده با استفاده از تکنیک‌های مرسوم یافتن پاسخ معادلات تفاضلی خطی منجر به قانون کنترل بهینه به فرم سری با همگرایی یکنواخت می‌گردد. افزون بر آن، یک رویکرد کاربردی برای تعمیم کنترل بهینه‌ی طراحی شده به فرم فیدبک حالت ارائه می‌شود. در ادامه، پیاده‌سازی روش پیشنهادی با طراحی یک الگوریتم تکراری با دقت بالا و پیچیدگی محاسباتی کم انجام می‌شود به طوری که قانون کنترل زیربهینه تنها با تعداد کمی تکرار از این الگوریتم حاصل می‌شود. در نهایت، کارایی این روش با شبیه‌سازی و حل چند مثال عددی نشان داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم‌های به هم متصل غیرخطی، کنترل بهینه، معادلات گسسته، روش تکراری.

رده‌بندی ریاضی: 49-XX; 49M05

### ۱ مقدمه

سیستم‌های به هم متصل<sup>۲</sup> دسته‌ی مهمی از سیستم‌های دینامیکی هستند که به چند زیرسیستم تقسیم می‌شوند. این سیستم‌ها، مرکب<sup>۳</sup> یا مقیاس بزرگ<sup>۴</sup> نیز نامیده می‌شوند که می‌توانند پیوسته و یا گسسته در زمان باشند [۸، ۲۰]. سیستم‌های به هم متصل گسسته کاربردهای

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول مقاله

<sup>۲</sup> Interconnected system

<sup>۳</sup> Composite system

<sup>۴</sup> Large-scale system

(M. Hasanabadi) [manijehasanabadi@yahoo.com](mailto:manijehasanabadi@yahoo.com), (A. Mahmoudzadeh) [amvaziri@birjand.ac.ir](mailto:amvaziri@birjand.ac.ir)

(A. Jajarmi) [a.jajarmi@ub.ac.ir](mailto:a.jajarmi@ub.ac.ir)

مختلفی در کنترل فرایند، اقتصاد، سیستم‌های قدرت، کامپیوتر و شبکه‌های ترافیک شهری دارند. ولی پیچیدگی محاسباتی و حجم بالای محاسبات برای این سیستم‌ها همواره چالشی بزرگ برای تحلیل و کنترل آن‌ها بوده است [۲۴]. در میان راهبردهای کنترل، روش بازخورد غیرخطی مرکب<sup>۵</sup> تاکنون برای کنترل چنین سیستم‌هایی استفاده شده است [۲]؛ اما روش اشاره‌شده نیاز به انتخاب یک تابع لیاپانوف مناسب دارد که به‌دست آوردن چنین تابعی معمولاً دشوار می‌باشد. استراتژی دیگر برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی گسسته‌ی غیرخطی مرکب، کنترل غیرمتمرکز<sup>۶</sup> است که اجرای آن ساده‌تر از روش کنترل متمرکز<sup>۷</sup> بوده، اما طراحی آن سخت‌تر است [۲۵]. با توجه به [۱۲]، کنترل بهینه‌ی غیرمتمرکز سیستم‌های گسسته‌ی به هم متصل غیرخطی به کمک تکنیک برنامه‌ریزی پویای عصبی<sup>۸</sup> طراحی می‌شود. همچنین، معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت گسسته<sup>۹</sup> نیز یک روش سیستماتیک بوده که برای سیستم‌های مرکب گسسته‌ی غیرخطی نیاز به حل یک دنباله از معادلات ماتریسی جبری ریکاتی در طول مسیر دارد، ولی در هر لحظه از نمونه‌برداری، فضای حافظه‌ی بالا و زمان محاسباتی زیادی به آن اختصاص داده می‌شود [۲۶]. روش برنامه‌ریزی پویای بلمن ارائه‌دهنده‌ی شرایط لازم و کافی بهینگی برای مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی گسسته است و منجر به یک معادله‌ی تفاضلی غیرخطی به نام معادله‌ی همیلتون ژاکوبی بلمن می‌شود، که با حل آن یک قانون کنترل بهینه‌ی مداربسته حاصل می‌شود. اما حل تحلیلی این معادله در حالت کلی بسیار مشکل و حتی گاهی غیرممکن است. بنابراین، عموماً معادله‌ی همیلتون ژاکوبی بلمن باید با روش‌های تکراری و به‌صورت تقریبی حل گردد. روش‌های زیادی برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی معادله‌ی همیلتون ژاکوبی بلمن ارائه شده است. یکی از تکنیک‌های قدرتمند برای حل این معادله، روش برنامه‌ریزی پویای تطبیقی<sup>۱۰</sup> می‌باشد [۲۳]. اما این روش اغلب برای به‌دست آوردن جواب‌های بهینه به شرایط اولیه نیاز دارد و کنترل متناوب حاصل، پایداری سیستم را نیز تضمین نمی‌کند. روش دیگر که برای حل معادلات همیلتون ژاکوبی بلمن مورد استفاده قرار گرفته، روش کنترل بهینه‌ی معکوس<sup>۱۱</sup> می‌باشد [۱۳]. ایده‌ی اصلی این روش، طراحی قانون کنترل پایدار با شناخت یک تابع لیاپانوف است که پارامترهای آن توسط الگوریتم فیلتر کالمن مشخص می‌شود. اما شناخت چنین تابعی برای سیستم‌های غیرخطی در حالت کلی کار سختی است. در مقاله‌ی [۳]، دو روش برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی گسسته شامل سیستم‌های دوخطی ارائه شده است. روش اول یک رویکرد تحلیلی است بر پایه‌ی یک الگوریتم تکراری که بر اساس سری‌های نامتناهی از توان کرونیگر تعریف شده است [۲۷]، و روش دوم روش معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت گسسته می‌باشد. با مقایسه‌ی این دو روش به کمک کدهای متلب، برتری روش معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت نسبت به روش تحلیلی نشان داده شده است، که راحتی پیاده‌سازی و جواب‌های صریح از جمله مزایای آن دانسته شده است. اما حل معادله‌ی ریکاتی وابسته به حالت گسسته نیاز به فضای حافظه‌ی بالا و زمان محاسباتی زیادی دارد که این از مهم‌ترین معایب این روش محسوب شده و با افزایش ابعاد مسأله، چالشی بزرگ خواهد بود [۲]. در روشی دیگر به نام نگرش تقریب متوالی، به‌جای حل مستقیم مسأله‌ی مقدار مرزی غیرخطی مقیاس بزرگ، به‌دست آمده از اصل ماکزیم‌یابی پونتریاگین<sup>۱۲</sup>، دنباله‌ای از مسائل مقدار مرزی خطی متغیر با زمان مقیاس بزرگ غیرهمگن به‌طور تکراری حل می‌شود [۲۱]. اگرچه این روش در کاربردهای متعددی مورد استفاده قرار گرفته است، با این وجود حل معادلات متغیر با زمان به‌خصوص در مقیاس بزرگ بسیار مشکل‌تر از حل معادلات نامتغیر با زمان است.

در مرجع [۱۴] یک روش عددی معرفی شده است که دیدگاه خوبی از رفتار دینامیکی سیستم‌های غیرخطی ارائه می‌دهد [۱۱، ۱۸]. این روش ابتدا برای آنالیز سیستم‌های دینامیکی با جملات غیرخطی بسط داده شد [۱۵، ۱۹] و سپس برای کنترل بهینه و کنترل مدل پیش‌بین سیستم‌های دینامیکی غیرخطی توسعه یافت [۵، ۷، ۱۶]. همچنین، این تکنیک برای حل مسائل کنترل بهینه با افق نامتناهی شامل سیستم‌های دینامیکی مقیاس بزرگ به‌کار گرفته شده است [۶، ۷]. اخیراً نیز در مرجع [۴] از این روش برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه‌ی گسسته استفاده شده است. با توجه به مزیت‌های قابل توجه این تکنیک، در این مقاله تئوری‌های جدیدی را برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم‌های گسسته ارائه خواهیم داد. در این مقاله قصد داریم این روش را برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم‌های به هم متصل غیرخطی گسسته گسترش دهیم. بر اساس این روش، متغیر حالت و قانون کنترل بهینه به‌فرم سری‌هایی با همگرایی یکنواخت به‌دست می‌آیند. همچنین، پاسخ بهینه تنها با حل دنباله‌ای از مسائل مقدار مرزی خطی نامتغیر با زمان حاصل می‌شود. افزون بر این، مسأله‌ی مقدار مرزی خطی در هر تکرار شامل چندین زیرمسأله‌ی جدا از هم بوده به‌طوری که می‌توانند به‌صورت موازی و مستقل از هم حل شوند. در نتیجه، پاسخ بهینه تنها با به‌کارگیری روش‌های مرسوم حل معادلات تفاضلی خطی قابل دست‌یابی می‌باشد. افزون بر آن، در نظر گرفتن تعداد محدودی از جملات سری‌های مربوطه منجر به پاسخ‌هایی به‌فرم بسته برای متغیر حالت و قانون کنترل زیربهینه می‌شود. افزون بر این، یک الگوریتم تکراری با پیچیدگی محاسباتی کم برای به‌دست آوردن قانون کنترل زیربهینه پیشنهاد می‌شود. نتایج شبیه‌سازی و مثال‌های عددی کارایی روش ارائه شده را تایید می‌کنند. از مهمترین نوآوری‌های این مقاله و همچنین مزایای روش پیشنهادی، می‌توان موارد زیر را برشمرد:

- این روش هیچ نیازی به حدس اولیه برای شروع فرایند تکراری ندارد.

<sup>5</sup>Composite nonlinear feedback approach

<sup>6</sup>Decentralized control

<sup>7</sup>Centralized control

<sup>8</sup>Neural dynamic programming technique

<sup>9</sup>Discrete-time state-dependent Riccati equation

<sup>10</sup>Adaptive dynamic programming

<sup>11</sup>Inverse optimal control

<sup>12</sup>Pontryagin's maximum principle

- همگرایی یکنواخت پاسخ به‌دست آمده به پاسخ بهینه تضمین شده است. بنابراین، تنها بعد از تعداد کمی تکرار، الگوریتم پیشنهادی به پاسخ دقیقی از مسأله‌ی مفروض همگرا می‌شود.
  - روش ارائه شده از حل مستقیم مسأله‌ی مقدار مرزی غیرخطی پرهیز می‌کند. در هر تکرار از الگوریتم پیشنهادی، تنها به حل یک مسأله‌ی مقدار مرزی خطی نامتغیر با زمان نیاز می‌باشد. افرون بر این، ساختار محاسباتی روش پیشنهادی به گونه‌ای است که قابلیت انجام فرایندها به‌طور موازی را دارد. بنابراین، پاسخ تنها با به‌کارگیری روش‌های مرسوم حل معادلات تفاضلی معمولی خطی قابل دستیابی می‌باشد. این ویژگی، منجر به کاهش قابل ملاحظه‌ای در زمان لازم برای محاسبات می‌شود.
  - بر اساس روش پیشنهادی، تنها کافی است فقط یک بار پاسخ مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی غیرخطی مفروض با یک شرط مرزی دلخواه توسط الگوریتم ارائه شده محاسبه شود. در این صورت، پاسخ مسأله برای هر شرط مرزی دیگر به سادگی و بدون نیاز به تکرار الگوریتم قابل دستیابی می‌باشد.
  - همچنین، کنترل بهینه‌ی طراحی شده قابلیت تعمیم به فرم فیدبک حالت را دارد به‌طوری که قانون فیدبک حالت هر زیرسیستم تنها به حالت‌های همان زیرسیستم وابسته است.
- بنابراین، معادلات و روش طراحی ارائه شده در این مقاله هم از لحاظ تئوری و هم از نظر کاربردی جدید بوده، شامل اطلاعات کاملاً متفاوتی نسبت به کارهای مشابه می‌باشد و برای غلبه بر پیچیدگی محاسبات ناشی از ابعاد بالا بسیار مفید است.
- این مقاله به هفت بخش تقسیم می‌شود. در بخش دوم به بیان مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی گسسته‌ی به هم متصل غیرخطی می‌پردازیم. بخش سوم بر روی استراتژی طراحی کنترل بهینه متمرکز می‌شود. در بخش چهارم یک الگوریتم تکراری با دقت بالا و پیچیدگی محاسباتی کم برای به‌دست آوردن قانون کنترل زیربهینه معرفی می‌شود. بخش پنجم به تعمیم قانون کنترل بهینه‌ی پیشنهادی به فرم فیدبک حالت می‌پردازد. به‌منظور بررسی کارایی تکنیک جدید ارائه شده، نتایج شبیه‌سازی با استفاده از برنامه‌نویسی متلب در بخش ششم ذکر می‌گردد و سرانجام نتیجه‌گیری در بخش پایانی مطرح می‌شود.

## ۲ بیان مسأله‌ی کنترل بهینه

در این بخش، مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی گسسته شامل سیستم‌های به هم متصل غیرخطی را فرمول‌بندی کرده و شرایط لازم بهینگی را به مسأله اعمال می‌کنیم. مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی گسسته‌ی زیر را که دارای تابعی عملکرد مربعی است و به  $M$  زیرمسأله‌ی به هم متصل غیرخطی تجزیه می‌شود در نظر بگیرید:

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^M \left[ \sum_{k=0}^{N-1} x_i^T(k) Q_i x_i(k) + u_i^T(k) R_i u_i(k) \right], \\ x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + f_i(x(k)), \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad i = 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

که  $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  و  $Q_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  به ترتیب ماتریس‌های معین مثبت و نیمه‌معین مثبت هستند. افزون بر آن،  $A_i$  و  $B_i$  ماتریس‌های ثابت با ابعاد مناسب برای مسأله‌ی (۱.۲) بوده به‌طوری که زوج مرتب  $(A_i, B_i)$  کاملاً کنترل‌پذیر فرض شده است. همچنین، بردارهای کنترل و حالت  $i$  امین زیرسیستم به ترتیب  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  و  $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  می‌باشند. افرون بر این، فرض می‌شود  $x_i(0) = x_{i0}$ ،  $u = (u_1^T, u_2^T, \dots, u_M^T)^T$ ،  $x = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_M^T)^T$ ،  $\sum_{i=1}^M m_i = m$  و  $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$  یک تابع برداری تحلیلی غیرخطی است که تداخل بین زیرسیستم‌ها را مدل می‌کند. در نهایت، بر اساس موارد مورد نیاز روش پیشنهادی در بخش ۳ فرض می‌کنیم  $f_i(0) = 0$ . در این حالت،  $(x, u) = (0, 0)$  نقطه‌ی تعادل سیستم دینامیکی در (۱.۲) خواهد بود. یعنی طبق تعریف نقطه‌ی تعادل اگر  $x_i(0) = 0$  و  $u_i(0) = 0$ ، در این صورت، به‌ازای تمام  $k$  ها  $x_i(k+1) = x_i(k) = 0$  خواهد بود. اما از آنجایی که سیستم دینامیکی در (۱.۲) خودگردان<sup>۱۳</sup> است، این فرض از عمومیت مسأله کم‌نکرده و محدودیت اضافی ایجاد نمی‌کند. زیرا در صورتی که نقطه‌ی تعادل سیستم مفروض نقطه‌ی دیگری غیر از مبدأ مختصات باشد، می‌توان با تغییر محورهای مختصات<sup>۱۴</sup> نقطه‌ی تعادل را به مبدأ منتقل نمود.

<sup>13</sup>Autonomous

<sup>14</sup>Change of coordinates

برای به‌دست آوردن شرایط لازم بهینگی برای مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی تعریف شده، ابتدا تابع همیلتونین  $H_i$  را برای زیرمسأله‌ی  $i$  ام  $(i = 1, \dots, M)$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_i(k) = p_i(k+1)[A_i x_i(k) + B_i u_i(k) + f_i(x(k))] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [x_i^T(k) Q_i x_i(k) + u_i^T(k) R_i u_i(k)], \quad (2.2)$$

که  $p_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  ضریبگر لاگرانژ یا بردار کمک حالت زیرمسأله‌ی  $i$  ام می‌باشد. در این صورت، شرایط لازم بهینگی بر اساس اصل ماکزیمم‌یابی پونتریاگین [۹] از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = \frac{\partial H_i(k)}{\partial p_i(k+1)}, \\ p_i(k) = \frac{\partial H_i(k)}{\partial x_i(k)}, \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad p_i(N) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (3.2)$$

خاطر نشان کنیم از آنجایی که در مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی (۱.۲)، زمان نهایی مشخص و حالت نهایی آزاد یا نامعین می‌باشد، از این رو شرط نهایی در رابطه‌ی (۳.۲) به صورت  $p_i(N) = 0$  در نظر گرفته شده است. با توجه به معادلات (۳.۲)، شرایط لازم بهینگی برای مسأله‌ی (۱.۲) به فرم مسأله‌ی مقدار مرزی گسسته‌ی زیر (شامل چندین مسأله‌ی به هم متصل غیرخطی) حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = A_i x_i(k) + f_i(x(k)) - B_i R_i^{-1} B_i^T p_i(k+1), \\ p_i(k) = Q_i x_i(k) + A_i^T p_i(k+1) + g_i(x(k), p(k+1)), \\ x_i(0) = x_{i0}, \quad p_i(N) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.2)$$

که:

$$g_i(x(k), p(k+1)) \triangleq \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial f_j(x(k))}{\partial x_i(k)} \right)^T p_j(k+1). \quad (5.2)$$

افزون بر آن،  $i$  امین قانون کنترل بهینه از رابطه‌ی  $\frac{\partial H_i(k)}{\partial u_i(k)} = 0$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_i(k) = -R_i^{-1} B_i^T p_i(k+1), \quad i = 1, \dots, M. \quad (6.2)$$

### ۳ استراتژی طراحی کنترل بهینه

از آنجایی که مسأله‌ی مقدار مرزی گسسته‌ی به هم متصل غیرخطی در (۴.۲) به جز در برخی حالت‌های بسیار ساده به‌طور تحلیلی قابل حل نمی‌باشد، بنابراین در این بخش به ارائه‌ی یک روش عددی برای حل این مسأله می‌پردازیم. بدین منظور، ابتدا از معادله‌ی (۴.۲) مشاهده می‌شود که اگر  $x_i(0) = 0$  و  $p_i(N) = 0$  در این صورت به‌ازای تمام  $k$  ها  $x_i(k+1) = x_i(k) = 0$  و  $p_i(k) = p_i(k+1) = 0$  خواهد بود. زیرا بدون از دست دادن عمومیت مسأله در بخش ۲ فرض شده است که  $f_i(0) = 0$ . بنابراین  $(x, p) = (0, 0)$  نقطه‌ی تعادل سیستم دینامیکی در مسأله‌ی مقدار مرزی (۴.۲) است. خاطر نشان شود که این نکته یکی از موارد مورد نیاز پیاده‌سازی روش پیشنهادی در این بخش می‌باشد، زیرا گام اول در این روش مستلزم یافتن بسط تیلور جملات غیرخطی و غیرچندجمله‌ای در مسأله‌ی (۴.۲) حول نقطه‌ای است که جمله‌ی اول (ثابت) بسط مربوطه صفر شود [۱۴]. با نوشتن این بسط حول نقطه‌ی

تعالد  $(x, p) = (\circ, \circ)$  داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k+1) = A_i x_i(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T p_i(k+1) + \underbrace{f_{i,\circ}}_{\circ} + f_{i,1} x(k) + f_{i,2} x(k) \otimes x(k) \\ + f_{i,3} x(k) \otimes x(k) \otimes x(k) + \dots, \\ p_i(k) = Q_i x_i(k) + A_i^T p_i(k+1) + \underbrace{g_{i,\circ}}_{\circ} + g_{i,1} p(k+1) + g_{i,2} p(k+1) \otimes x(k) \\ + g_{i,3} p(k+1) \otimes x(k) \otimes x(k) + \dots, \end{array} \right. \quad (۱.۳)$$

که در آن  $f_{i,j}, g_{i,j} \in \mathbb{R}^{m_i \times m^j}$  ماتریس‌هایی با مقادیر حقیقی و ثابت با ابعاد مناسب بوده،  $g_{i,\circ} = f_{i,\circ} = f_i(\circ) = \circ$ ،  $f_{i,2} = \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=\circ}$ ،  $g_{i,1} = \frac{\partial g_i(x,p)}{\partial p} \Big|_{x=\circ, p=\circ}$ ،  $f_{i,1} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \Big|_{x=\circ}$ ، ((۵.۲) (طبق رابطه))  $g_i(\circ, \circ) = \circ$  افزون بر آن، با توجه به معادله‌ی (۵.۲) داریم:

$$g_{i,1} = \left[ \left( \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} \right)^T \dots \left( \frac{\partial f_M(x)}{\partial x_i} \right)^T \right] \Big|_{x=\circ} \quad (۲.۳)$$

همچنین، عبارت  $x^{[j]}(k)$  از  $j$  بار ضرب  $x(k)$  حاصل می‌شود:  $x^{[j]}(k) = x(k) \otimes \dots \otimes x(k)$ . با فرض اینکه گرادیان تابع  $f_i(x)$  در مبدا مختصات صفر باشد خواهیم داشت:  $f_{i,1} = g_{i,1} = \circ$ . بنابراین سری تیلور در (۱.۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k+1) = A_i x_i(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T p_i(k+1) + \sum_{j=2}^{\infty} f_{i,j} x^{[j]}(k), \\ p_i(k) = Q_i x_i(k) + A_i^T p_i(k+1) + \sum_{j=2}^{\infty} g_{i,j} p(k+1) \otimes x^{[j-1]}(k). \end{array} \right. \quad (۳.۳)$$

جواب مسأله‌ی مقدار مرزی گسسته‌ی غیرخطی (۴.۲) برای یک شرط اولیه دلخواه مانند  $x_{\circ} = (x_{1\circ}^T, x_{2\circ}^T, \dots, x_{M\circ}^T)^T$  می‌توان به فرم زیر بیان کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) = \Psi_i(x_{\circ}, k), \quad i = 1, \dots, M, \\ p_i(k+1) = \bar{\Psi}_i(x_{\circ}, k+1), \quad i = 1, \dots, M. \end{array} \right. \quad (۴.۳)$$

چون  $f_i$  و  $g_i$  نسبت به شرط اولیه‌ی دلخواه  $x_{\circ}$  تحلیلی هستند، بنابراین  $\Psi_i: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$  و  $\bar{\Psi}_i: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$  نیز توابع برداری تحلیلی نسبت به شرط اولیه‌ی  $x_{\circ}$  می‌باشند [۱]. از این رو، سیستم (۴.۳) را می‌توان به صورت سری‌های مک‌لوران حول نقطه  $x_{\circ}$  بسط داد:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) = \Psi_{i,\circ}(k) + \underbrace{\Psi_{i,1}(k)x_{\circ}}_{\mu_{i,1}(k)} + \underbrace{\Psi_{i,2}(k)x_{\circ} \otimes x_{\circ}}_{\mu_{i,2}(k)} + \underbrace{\Psi_{i,3}(k)x_{\circ} \otimes x_{\circ} \otimes x_{\circ}}_{\mu_{i,3}(k)} + \dots, \\ p_i(k+1) = \bar{\Psi}_{i,\circ}(k+1) + \underbrace{\bar{\Psi}_{i,1}(k+1)x_{\circ}}_{\bar{\mu}_{i,1}(k+1)} + \underbrace{\bar{\Psi}_{i,2}(k+1)x_{\circ} \otimes x_{\circ}}_{\bar{\mu}_{i,2}(k+1)} + \underbrace{\bar{\Psi}_{i,3}(k+1)x_{\circ} \otimes x_{\circ} \otimes x_{\circ}}_{\bar{\mu}_{i,3}(k+1)} \\ + \dots. \end{array} \right. \quad (۵.۳)$$

همچنین، به ازای  $k = \circ, 1, \dots, N-1$  می‌توان نشان داد  $\Psi_i(\circ, k) = \bar{\Psi}_i(\circ, k+1) = \circ$ ، بنابراین خواهیم داشت  $\mu_{i,\circ}(k) = \bar{\mu}_{i,\circ}(k+1) = \circ$ . در نتیجه، سری‌های مک‌لوران در (۵.۳) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i,j}(k), \quad i = 1, \dots, M, \\ p_i(k+1) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}_{i,j}(k+1), \quad i = 1, \dots, M, \end{array} \right. \quad (۶.۳)$$

که در آن  $\mu_{i,j}(k)$  و  $\bar{\mu}_{i,j}(k+1)$  برای  $j \geq 1$  با حل دنباله‌ای از مسائل مقدار مرزی گسسته‌ی غیرمتصل خطی به دست می‌آیند،  $\bar{\Psi}_i = \bar{\Psi}_i(x_0^j)$  و  $\Psi_i = \Psi_i(x_0^j)$  به ترتیب مؤلفه‌های  $\bar{\Psi}_i$  و  $\Psi_i$  بردارهای  $\bar{\mu}_{i,j}(k+1)$  و  $\mu_{i,j}(k)$  هستند،  $\bar{\mu}_{i,j}(k+1) = \bar{\Psi}_{i,j}(k+1)x_0^j$ ،  $\mu_{i,j}(k) = \Psi_{i,j}(k)x_0^j$  هستند. افرون بر این، مؤلفه‌های  $\bar{\mu}_{i,j}$  و  $\mu_{i,j}$  شامل یک ترکیب خطی از ضرب  $j$  مؤلفه از بردار  $x_0$  می‌باشند. برای نمونه،  $\bar{\mu}_{i,2}$  و  $\mu_{i,2}$  شامل ترکیب خطی  $x_{0,k}x_{0,l}$  برای همه‌ی  $k, l \in \{1, \dots, m\}$  هستند که  $x_{0,j}$   $j$  امین مؤلفه از بردار  $x_0$  است. اکنون فرض کنید  $x_i(0) = \varepsilon x_{i0} \in \Theta$  شرط اولیه‌ی متعلق به دامنه‌ی همگرایی  $\Theta$  برای  $i = 1, \dots, M$  باشد، که  $\varepsilon$  یک پارامتر دلخواه است. با فرض ناتمامی بودن  $\Theta$ ، چنین پارامتر  $\varepsilon$  ای وجود دارد. همچنین، مقدار عددی  $\varepsilon$  مهم نیست و این پارامتر تنها باعث سادگی محاسبات می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی (۵.۳) را با توجه به  $\varepsilon x_{i0}$  مجدداً بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_i(k) = \Psi_i(\varepsilon x_{i0}, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \mu_{i,j}(k), \\ p_i(k+1) = \bar{\Psi}_i(\varepsilon x_{i0}, k+1) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \bar{\mu}_{i,j}(k+1). \end{cases} \quad (۷.۳)$$

از آن جایی که  $\varepsilon x_{i0} \in \Theta$  است، معادله (۷.۳) باید در (۳.۳) صدق کند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \varepsilon \mu_{i,1}(k) + \varepsilon^2 \mu_{i,2}(k) + \varepsilon^3 \mu_{i,3}(k) + \dots = \varepsilon (A_i \mu_{i,1}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1)) \\ + \varepsilon^2 (A_i \mu_{i,2}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,2}(k+1) + f_{i,2} \mu_1(k) \otimes \mu_1(k)) + \varepsilon^3 (A_i \mu_{i,3}(k) \\ - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,3}(k+1) + f_{i,2} (\mu_1(k) \otimes \mu_2(k)) + f_{i,3} \mu_1^{[2]}(k)) + \dots, \end{cases} \quad (۸.۳)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \bar{\mu}_{i,1}(k+1) + \varepsilon^2 \bar{\mu}_{i,2}(k+1) + \varepsilon^3 \bar{\mu}_{i,3}(k+1) + \dots = \varepsilon (Q_i \mu_{i,1}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1)) \\ + \varepsilon^2 (Q_i \mu_{i,2}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,2}(k+1) + g_{i,2} \mu_1(k+1) \otimes \mu_1(k)) + \varepsilon^3 (Q_i \mu_{i,3}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,3}(k+1) \\ + g_{i,2} (\bar{\mu}_1(k+1) \otimes \mu_2(k) + \bar{\mu}_2(k+1) \otimes \mu_1(k)) + g_{i,3} \bar{\mu}_1(k+1) \otimes \mu_1^{[2]}(k)) + \dots, \end{cases} \quad (۹.۳)$$

که  $\mu_j(k) = (\mu_{1,j}^T, \dots, \mu_{M,j}^T)^T$  و  $\bar{\mu}_j(k+1) = (\bar{\mu}_{1,j}^T, \dots, \bar{\mu}_{M,j}^T)^T$  می‌باشند. در ادامه، با مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های  $\varepsilon$  در دو طرف تساوی، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon : \begin{cases} \mu_{i,1}(k+1) = A_i \mu_{i,1}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1), \\ \bar{\mu}_{i,1}(k) = Q_i \mu_{i,1}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1), \end{cases} \quad (۱۰.۳)$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} \mu_{i,2}(k+1) = A_i \mu_{i,2}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,2}(k+1) + f_{i,2} \mu_1(k) \otimes \mu_1(k), \\ \bar{\mu}_{i,2}(k) = Q_i \mu_{i,2}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,2}(k+1) + g_{i,2} \bar{\mu}_1(k+1) \otimes \mu_1(k), \end{cases} \quad (۱۱.۳)$$

$$\varepsilon^3 : \begin{cases} \mu_{i,3}(k+1) = A_i \mu_{i,3}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,3}(k+1) + f_{i,2} (\mu_1(k) \otimes \mu_2(k)) + f_{i,3} \mu_1^{[2]}(k), \\ \bar{\mu}_{i,3}(k) = Q_i \mu_{i,3}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,3}(k+1) + g_{i,2} (\bar{\mu}_1(k+1) \otimes \mu_2(k) + \bar{\mu}_2(k+1) \otimes \mu_1(k)) \\ + g_{i,3} \bar{\mu}_1(k+1) \otimes \mu_1^{[2]}(k), \end{cases} \quad (۱۲.۳)$$

و این فرایند برای مراتب بالاتر  $\varepsilon$  ادامه داده می‌شود. بنابراین به‌ازای  $j = 4, 5, \dots$  داریم:

$$\varepsilon^j : \begin{cases} \mu_{i,j}(k+1) = A_i \mu_{i,j}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \\ + H_{i,j}(\mu_1(k), \dots, \mu_{j-1}(k)), \\ \bar{\mu}_{i,j}(k) = Q_i \mu_{i,j}(k) + A_i^T \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \\ + \bar{H}_{i,j}(\mu_1(k), \dots, \mu_{j-1}(k), \bar{\mu}_1(k), \dots, \bar{\mu}_{j-1}(k)), \end{cases} \quad (۱۳.۳)$$

به‌طوری که  $H_{i,j}$  و  $\bar{H}_{i,j}$  به ترتیب از معادلات (۸.۳) و (۹.۳) در  $j$  امین مرحله از ضریب  $\varepsilon^j$  به دست می‌آیند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطه‌ی (۱۰.۳) یک سیستم از معادلات تفاضلی مرتبه‌ی اول نامتغیر با زمان خطی همگن و معادلات (۱۱.۳)، (۱۲.۳) و (۱۳.۳) سیستم‌هایی از معادلات تفاضلی مرتبه‌ی اول نامتغیر با زمان خطی ناهمگن هستند. در مرحله اول، فرض می‌کنیم  $\mu_{i,1}$  و  $\bar{\mu}_{i,1}$  از (۱۰.۳) به‌دست آمده باشند. سپس در مرحله دوم  $\mu_{i,2}$  و  $\bar{\mu}_{i,2}$  به راحتی و با جایگذاری جواب‌های مرحله‌ی اول در (۱۱.۳) محاسبه می‌شوند. با ادامه‌ی این فرایند،  $\mu_{i,j}$  و  $\bar{\mu}_{i,j}$  برای  $j \geq 3$  تنها با حل معادلات تفاضلی مرتبه‌ی اول نامتغیر با زمان خطی و ناهمگن در  $j$  امین مرحله به‌دست می‌آیند. همچنین، در این فرایند تکراری، جملات ناهمگن با استفاده از جواب‌های به‌دست آمده از مرحله‌ی قبل محاسبه می‌شوند. بنابراین در هر مرحله، هیچ تداخلی بین زیرسیستم‌ها برای حل دستگاه معادلات تفاضلی وجود ندارد. به عبارت دیگر، دستگاه معادلات تفاضلی در هر تکرار به‌صورت ترکیب موازی از چندین زیر معادله‌ی خطی قابل حل می‌باشد، که این ویژگی منجر به کاهش قابل ملاحظه‌ای در پیچیدگی محاسباتی می‌شود.

برای محاسبه‌ی شرایط مرزی برای معادلات فوق، در معادله‌ی (۷.۳) قرار می‌دهیم  $k = 0$  و  $k = N - 1$ . از این‌رو، به‌ازای  $i = 1, \dots, M$  داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon x_{i_0} &= x_i(0) = \Psi_i(\varepsilon x_0, 0) = \varepsilon \mu_{i,1}(0) + \varepsilon^2 \mu_{i,2}(0) + \dots, \\ 0 &= p_i(N) = \bar{\Psi}_i(\varepsilon x_0, N) = \varepsilon \bar{\mu}_{i,1}(N) + \varepsilon^2 \bar{\mu}_{i,2}(N) + \dots \end{aligned} \quad (14.3)$$

اکنون ضرایب جملات با توان‌های یکسان از  $\varepsilon$  در دو سوی معادله (۱۴.۳) را با هم مساوی قرار می‌دهیم؛ بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \mu_{i,1}(0) = x_{i_0}, & \mu_{i,j}(0) = 0, & j \geq 2, & i = 1, \dots, M, \\ \bar{\mu}_{i,1}(N) = 0, & \bar{\mu}_{i,j}(N) = 0, & j \geq 2, & i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (15.3)$$

در نهایت، بر اساس مطالب بیان شده‌ی فوق، قضیه‌ی زیر ارائه می‌شود:

**قضیه ۱.۳.** فرض کنید جواب مسأله‌ی مقدار مرزی گسسته و به هم متصل غیرخطی (۴.۲) به‌صورت معادله‌ی (۶.۳) بیان شده باشد. در این صورت،  $\mu_{i,j}(k)$  و  $\bar{\mu}_{i,j}(k+1)$  به‌ازای  $k = 0, 1, \dots, N-1$  با حل دنباله‌ی بازگشتی از مسائل مقدار مرزی نامتغیر با زمان غیرمتصل خطی (۱۰.۳)-(۱۳.۳) با شرایط مرزی (۱۵.۳) به‌دست می‌آیند. همچنین، قانون کنترل بهینه و مسیر بهینه‌ی  $i$  امین زیرسیستم در مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی (۱.۲) به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} x_i^*(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i,j}(k), & i = 1, \dots, M, \\ u_i^*(k) = -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}_{i,j}(k+1), & i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (16.3)$$

در مقایسه با سایر روش‌های تقریبی از جمله نگرش تقریب متوالی و تحلیل حساسیت، از آنجایی که این روش‌ها به حل یک دنباله از مسائل مقدار مرزی متغیر با زمان و خطی نیاز دارند [۲۲، ۲۱]، بنابراین روش ارائه شده در این مقاله فضای حافظه‌ی کمتری اشغال می‌کند و زمان محاسبات نیز کمتر از روش‌های دیگر می‌باشد. افزون بر این، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، هیچ تداخلی بین زیرسیستم‌های موجود در دستگاه معادلات تفاضلی در هر تکرار از روش پیشنهادی وجود ندارد. بنابراین، این دستگاه در هر تکرار به‌صورت ترکیب موازی از چندین زیرمسأله‌ی تفاضلی قابل حل می‌باشد. همگرایی یکنواخت جواب‌ها در (۱۶.۳) با استفاده از قضیه‌ی بعدی اثبات می‌شود.

**قضیه ۲.۳.** اگر دنباله‌های حالت، کمک حالت و کنترل به‌ازای  $i = 1, \dots, M$  به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{cases} x_{i,l}(k) \triangleq \sum_{j=1}^l \mu_{i,j}(k), \\ p_{i,l}(k+1) \triangleq \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_{i,j}(k+1), \\ u_{i,l}(k) \triangleq -R_i^{-1} B_i^T p_{i,l}(k+1), \end{cases} \quad (17.3)$$

در این صورت، دنباله‌های ارائه شده در (۱۷.۳) به ترتیب به‌طور یکنواخت به جواب‌های بهینه‌ی حالت، کمک حالت و کنترل همگرا هستند. اثبات. با توجه به قضیه ۱.۳، سری‌های  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i,j}(k)$  و  $\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}_{i,j}(k+1)$  به‌طور یکنواخت به جواب‌های دقیق  $x_i(k)$  و  $p_i(k+1)$  همگرا خواهند شد. یعنی:

$$\begin{cases} x_i(k) \triangleq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \mu_{i,j}(k) \Leftrightarrow x_{i,l}(k) \xrightarrow{\text{به‌طور یکنواخت}} x_i(k), & i = 1, \dots, M, \\ p_i(k+1) \triangleq \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \Leftrightarrow p_{i,l}(k+1) \xrightarrow{\text{به‌طور یکنواخت}} p_i(k+1), & i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (18.3)$$

بنابراین، دنباله‌ی کنترل که تنها به دنباله‌ی کمک حالت وابسته است، به‌طور یکنواخت به قانون کنترل بهینه همگرا می‌شود؛ یعنی داریم:

$$\begin{aligned} u_i^*(k) &= -R_i^{-1} B_i^T p_i(k+1) = -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \\ &= -R_i^{-1} B_i^T \left( \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \right) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ -R_i^{-1} B_i^T \left( \sum_{j=1}^l \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \right) \right\} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left\{ -R_i^{-1} B_i^T p_{i,l}(k+1) \right\} = \lim_{l \rightarrow \infty} u_{i,l}(k), \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (19.3)$$

□

بدین صورت اثبات قضیه تکمیل می‌گردد.

**ملاحظه ۳.۳.** فرض کنید جواب مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی گسسته‌ی غیرخطی (۱.۲) با شرط اولیه‌ی  $x_0 \in \Theta$  به‌صورت (۱۶.۳) وجود داشته باشد. در این صورت، برای یافتن جواب به‌ازای هر شرط اولیه‌ی دیگر  $x_0 \in \Theta$ ، نیازی به تکرار مجدد فرایند پیشنهادی نیست. در این حالت، قانون کنترل و مسیر بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_i^*(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \mu_{i,j}(k), & i = 1, \dots, M, \\ u_i^*(k) = -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \bar{\mu}_{i,j}(k+1), & i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (20.3)$$

## ۴ طراحی کنترل زیربهینه و معرفی الگوریتم

در این بخش، یک قانون کنترل زیربهینه و یک الگوریتم تکراری برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی (۱.۲) ارائه می‌کنیم. از آنجایی که کنترل و مسیر بهینه در (۱۶.۳) شامل سری‌های نامتناهی هستند، بنابراین به‌دست آوردن جواب به این فرم غیرممکن می‌باشد. برای حل این مشکل، در جواب به‌فرم سری،  $\infty$  را با یک عدد مثبت متناهی  $L$  جایگزین می‌کنیم. بنابراین، جواب‌های تقریبی قانون کنترل و مسیر زیربهینه از مرتبه  $L$  به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} x_{i,L}(k) = \sum_{j=1}^L \mu_{i,j}(k), & i = 1, \dots, M, \\ u_{i,L}(k) = -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^L \bar{\mu}_{i,j}(k+1), & i = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (1.4)$$

در کاربردهای عملی، عدد صحیح  $L$  با توجه به نیاز واقعی مسأله مشخص می‌شود. افزون بر آن، شاخص عملکرد تقریبی می‌تواند از طریق رابطه‌ی زیر محاسبه شود:

$$J_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} x_{i,L}^T(k) Q_i x_{i,L}(k) + u_{i,L}^T(k) R_i u_{i,L}(k) \right\}. \quad (2.4)$$

همچنین، کنترل زیربهینه‌ی مرتبه‌ی  $L$  به اندازه‌ی کافی دقیق است اگر برای یک ثابت مثبت داده شده ( $\gamma > 0$ )، شرط زیر برقرار باشد:

$$\left| \frac{J_L - J_{L-1}}{J_L} \right| < \gamma. \quad (3.4)$$

در صورتی که کران خطا به اندازه‌ی کافی کوچک انتخاب شده باشد، مقادیر شاخص عملکرد و کنترل زیربهینه‌ی مرتبه‌ی  $L$  به ترتیب به جواب‌های بهینه‌ی  $J^*$  و  $u^*(k)$  بسیار نزدیک خواهند بود. در نهایت، به‌منظور به‌دست آوردن پاسخ‌های زیربهینه، الگوریتم تکراری زیر ارائه می‌شود:



## ۱.۴ الگوریتم تکراری

(i)  $j$  را مساوی ۱ قرار دهید.

(ii)  $\mu_{i,j}(k)$  و  $\bar{\mu}_{i,j}(k+1)$  را برای  $i = 1, \dots, M$  با استفاده از معادلات (۱۰.۳)-(۱۳.۳) محاسبه کنید.

(iii) قرار دهید  $j = L$ . سپس  $x_{i,L}(k)$  و  $u_{i,L}(k)$  را از (۱.۴) و  $J_L$  را از (۲.۴) به دست آورید.

(iv) اگر شرط (۳.۴) برای  $\gamma > 0$  داده شده برقرار بود به گام پنجم بروید؛ در غیر این صورت، قرار دهید  $j = j + 1$  و به گام دوم بروید.

(v)  $x_{i,L}(k)$  و  $u_{i,L}(k)$  برای  $i = 1, \dots, M$  به ترتیب مسير و کنترل زیربهبینه‌ی قابل قبول می‌باشند. الگوریتم را متوقف کنید.

الگوریتم بالا بر اساس قضیه‌ی ۲.۳، نرخ همگرایی سریعی دارد. بنابراین، تنها تعداد کمی تکرار برای رسیدن به دقت قابل قبول مورد نیاز می‌باشد، که این مسئله حجم محاسبات را به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد.

## ۵ تعمیم به کنترل فیدبک حالت

در این قسمت، نتایج بخش‌های قبل به گونه‌ای تعمیم داده می‌شوند تا کنترل بهینه (یا زیربهبینه‌ی) طراحی شده به‌فرد فیدبک حالت تبدیل شود. بدین منظور، ابتدا اجازه دهید جمله‌ی مرتبه‌ی اول از بردار کمک حالت  $p_i(k)$  برای زیرسیستم  $i$  ام، یعنی  $\bar{\mu}_{i,1}(k)$ ، را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\bar{\mu}_{i,1}(k) = S_i(k)\mu_{i,1}(k), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (۱.۵)$$

که در آن  $S_i(k)$  یک ماتریس نیمه‌معین مثبت و متقارن با ابعاد  $m_i \times m_i$  است که توسط معادله‌ی تفاضلی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} S_i(k) = A_i^T \left[ I - S_i(k+1)B_i (R_i + B_i^T S_i(k+1)B_i)^{-1} B_i^T \right] S_i(k+1)A_i + Q_i, \\ S_i(N) = 0. \end{cases} \quad (۲.۵)$$

برای به‌دست آوردن معادله‌ی فوق به‌شکل زیر عمل می‌کنیم. ابتدا از معادله‌ی (۱.۵) خواهیم داشت:

$$\bar{\mu}_{i,1}(k+1) = S_i(k+1)\mu_{i,1}(k+1) \Rightarrow A_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1) = A_i^T S_i(k+1)\mu_{i,1}(k+1). \quad (۳.۵)$$

با جایگزینی  $A_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1)$  از رابطه‌ی دوم در (۱۰.۳) و سپس استفاده از (۱.۵) برای  $\bar{\mu}_{i,1}(k)$  به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{i,1}(k) - Q_i \mu_{i,1}(k) &= A_i^T S_i(k+1)\mu_{i,1}(k+1) \\ \Rightarrow (S_i(k) - Q_i)\mu_{i,1}(k) &= A_i^T S_i(k+1)\mu_{i,1}(k+1). \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

اکنون عبارت  $\mu_{i,1}(k+1)$  را از رابطه‌ی اول در (۱۰.۳) در معادله‌ی فوق جایگزین می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (S_i(k) - Q_i)\mu_{i,1}(k) &= A_i^T S_i(k+1) (A_i \mu_{i,1}(k) - B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1)) \\ \Rightarrow (Q_i + A_i^T S_i(k+1)A_i - S_i(k))\mu_{i,1}(k) &= A_i^T S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1). \end{aligned} \quad (۵.۵)$$

برای یافتن یک عبارت مناسب برای  $\bar{\mu}_{i,1}(k+1)$  بر حسب  $\mu_{i,1}(k)$  به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. با شروع از رابطه‌ی اول در (۱۰.۳) و ضرب آن در  $S_i(k+1)$  داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{S_i(k+1)\mu_{i,1}(k+1)}_{\bar{\mu}_{i,1}(k+1)} &= S_i(k+1)A_i \mu_{i,1}(k) - S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T \bar{\mu}_{i,1}(k+1) \\ \Rightarrow (I + S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T)\bar{\mu}_{i,1}(k+1) &= S_i(k+1)A_i \mu_{i,1}(k) \\ \Rightarrow \bar{\mu}_{i,1}(k+1) &= (I + S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} S_i(k+1)A_i \mu_{i,1}(k). \end{aligned} \quad (۶.۵)$$

در ادامه با جایگذاری  $\mu_{i,1}(k+1)$  از رابطه‌ی (۶.۵) در (۵.۵) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
(Q_i + A_i^T S_i(k+1)A_i - S_i(k)) \mu_{i,1}(k) &= \\
A_i^T S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T (I + S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} S_i(k+1)A_i \mu_{i,1}(k) \\
\Rightarrow Q_i + A_i^T S_i(k+1)A_i - S_i(k) &= \\
A_i^T S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T (I + S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} S_i(k+1)A_i \\
\Rightarrow Q_i + A_i^T S_i(k+1)A_i - S_i(k) &= \\
A_i^T S_i(k+1) \left( (B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} \right)^{-1} (I + S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} S_i(k+1)A_i & \quad (۷.۵) \\
\Rightarrow Q_i + A_i^T S_i(k+1)A_i - S_i(k) &= \\
A_i^T S_i(k+1) \left( (I + S_i(k+1)B_i R_i^{-1} B_i^T) (B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} \right)^{-1} S_i(k+1)A_i \\
\Rightarrow Q_i + A_i^T S_i(k+1)A_i - S_i(k) &= \\
A_i^T S_i(k+1) \left( (B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} + S_i(k+1) \right)^{-1} S_i(k+1)A_i.
\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_i(k) = A_i^T [I - S_i(k+1)\Omega_i^{-1}(k+1)] S_i(k+1)A_i + Q_i, \quad (۸.۵)$$

که در آن:

$$\Omega_i(k+1) = (B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} + S_i(k+1). \quad (۹.۵)$$

در ادامه، برای محاسبه‌ی عبارت  $\Omega_i^{-1}(k+1)$  در (۸.۵) به صورت زیر عمل می‌کنیم. از رابطه‌ی (۹.۵) داریم:

$$\begin{aligned}
\Omega_i(k+1) &= (B_i^T)^{-1} R_i B_i^{-1} + S_i(k+1) \\
\Rightarrow B_i^T \Omega_i(k+1) B_i &= R_i + B_i^T S_i(k+1) B_i \\
\Rightarrow B_i^{-1} \Omega_i^{-1}(k+1) (B_i^T)^{-1} &= (R_i + B_i^T S_i(k+1) B_i)^{-1} \\
\Rightarrow \Omega_i^{-1}(k+1) &= B_i (R_i + B_i^T S_i(k+1) B_i)^{-1} B_i^T.
\end{aligned} \quad (۱۰.۵)$$

با جایگذاری  $\Omega_i^{-1}(k+1)$  از (۱۰.۵) در (۸.۵)، معادله‌ی مفروض در (۲.۵) به فرم زیر به دست می‌آید:

$$S_i(k) = A_i^T \left[ I - S_i(k+1)B_i (R_i + B_i^T S_i(k+1)B_i)^{-1} B_i^T \right] S_i(k+1)A_i + Q_i. \quad (۱۱.۵)$$

از طرفی، با توجه به رابطه‌ی (۱.۵) در  $k = N$  داریم:

$$\bar{\mu}_{i,1}(N) = S_i(N)\mu_{i,1}(N). \quad (۱۲.۵)$$

از آنجایی که طبق رابطه‌ی (۱۵.۳)،  $\bar{\mu}_{i,1}(N) = 0$  و  $\mu_{i,1}(N)$  در حالت کلی غیر صفر است، از این رو باید داشته باشیم  $S_i(N) = 0$ ، فرضی که تکمیل کننده‌ی دستگاه معادلات تفاضلی (۲.۵) خواهد بود. در ادامه، برای طراحی کنترل بهینه به فرم پیش‌رو پس‌رو<sup>۱۵</sup>، فرض کنید عبارت مرتبه‌ی  $j$  از بردار کمک حالت  $p_i(k)$  برای زیرسیستم  $i$  ام، یعنی  $\bar{\mu}_{i,j}(k)$ ، به صورت زیر باشد:

$$\bar{\mu}_{i,j}(k) = S_i(k)\mu_{i,j}(k) + w_{i,j}(k), \quad j \geq 2, \quad (۱۳.۵)$$

که در آن  $S_i(k)$  جواب معادله‌ی تفاضلی (۲.۵) بوده و  $w_{i,j}(k)$  بردار الحاقی مرتبه  $j$  ام نامیده می‌شود. خاطر نشان کنیم که  $w_{i,j}(k)$  می‌تواند به راحتی با حل دنباله‌ی بازگشتی از مسائل مقدار مرزی (۱۰.۳)–(۱۳.۳) با شرایط مرزی (۱۵.۳) به دست آید. بدین منظور، فرض

<sup>15</sup>Feedforward feedback

کنید  $\mu_{i,j}(k)$  و  $\bar{\mu}_{i,j}(k)$  در تکرار  $j$  ام از روش پیشنهادی محاسبه شده باشند. در این صورت،  $w_{i,j}(k)$  به سادگی از فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$w_{i,j}(k) = \bar{\mu}_{i,j}(k) - S_i(k)\mu_{i,j}(k), \quad j \geq 2. \quad (14.5)$$

سرانجام، کنترل بهینه‌ی پیشنهادی زیرسیستم  $i$  ام با استفاده از عبارات (۱.۵) و (۱۳.۵) در رابطه‌ی دوم از (۱۶.۳) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_i^*(k) &= -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \\ &= -R_i^{-1} B_i^T \left[ \bar{\mu}_{i,1}(k+1) + \sum_{j=2}^{\infty} \bar{\mu}_{i,j}(k+1) \right] \\ &\quad - R_i^{-1} B_i^T \left[ S_i(k+1)\mu_{i,1}(k+1) + \sum_{j=2}^{\infty} [S_i(k+1)\mu_{i,j}(k+1) + w_{i,j}(k+1)] \right] \\ &\quad - R_i^{-1} B_i^T \left[ S_i(k+1) \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_{i,j}(k+1)}_{x_i^*(k+1)} + \sum_{j=2}^{\infty} w_{i,j}(k+1) \right] \\ &= \underbrace{-R_i^{-1} B_i^T S_i(k+1) x_i^*(k+1)}_{\text{Feedback}} - \underbrace{R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=2}^{\infty} w_{i,j}(k+1)}_{\text{Feedforward}}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

همان‌طور که از معادله‌ی (۱۵.۵) مشاهده می‌شود، کنترل بهینه از یک قسمت فیدبک حالت و یک بخش پیش‌رو<sup>۱۶</sup> تشکیل شده است. افزون بر این، فیدبک حالت زیرسیستم  $i$  ام تنها به حالت‌های همان زیرسیستم وابسته است. به عبارت دیگر، اطلاعات فیدبک برای هر زیرسیستم فقط به وضعیت همان زیرسیستم مربوط است. افزون بر آن، جمله‌ی پیش‌رو برای کنترل زیرسیستم  $i$  ام تنها با استفاده از اطلاعات محلی همان زیرسیستم (به کمک رابطه‌ی (۱۴.۵)) تعیین می‌شود. در این حالت، قانون کنترل زیربهینه نیز به فرم زیر خواهد بود:

$$u_{i,L}(k) = -R_i^{-1} B_i^T S_i(k+1) x_i(k+1) - R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=2}^L w_{i,j}(k+1), \quad i = 1, \dots, M. \quad (16.5)$$

## ۶ مثال‌های عددی

در این بخش، الگوریتم تکراری ارائه شده برای حل مثال‌های عددی به‌منظور نشان دادن اعتبار و کارایی روش معرفی شده به کار می‌رود.

**مثال ۱.۶.** شاخص عملکرد مربعی زیر به همراه یک سیستم به هم متصل غیرخطی گسسته داده شده است:

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{100} [x_i^T(k) x_i(k) + u_i^T(k) u_i(k)], \\ x_1(k+1) = 1.03 x_1(k) + 0.06 u_1(k) + 0.03 x_1(k), \\ x_2(k+1) = 1.06 x_2(k) + 0.06 u_2(k) + 0.03 x_1(k) x_2(k), \\ x_1(0) = -0.5, \quad x_2(0) = -0.3, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.6)$$

<sup>16</sup>Feedforward

در این مثال داریم:  $A_1 = 1/0^3$ ,  $A_2 = 1/0^6$ ,  $B_1 = B_2 = 0/0^6$ ,  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $Q_1 = Q_2 = 1$ ,  $f_1(x(k)) = 0/0^3 x_1(k) x_2(k)$  و  $f_2(x(k)) = 0/0^3 x_1(k) x_2(k)$  برای حل مسأله‌ی کنترل بهینه‌ی فوق، الگوریتم ارائه شده در بخش ۴ را به کار می‌بریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\varepsilon : \begin{cases} \mu_{1,1}(k+1) = 1/0^3 \mu_{1,1}(k) - 0/0^6 \mu_{1,1}(k+1), \\ \mu_{2,1}(k+1) = 1/0^6 \mu_{2,1}(k) - 0/0^6 \mu_{2,1}(k+1), \\ \bar{\mu}_{1,1}(k) = \mu_{1,1}(k) + 1/0^3 \bar{\mu}_{1,1}(k+1), \\ \bar{\mu}_{2,1}(k) = \mu_{2,1}(k) + 1/0^6 \bar{\mu}_{2,1}(k+1), \\ \mu_1(\circ) = \begin{bmatrix} \mu_{1,1}(\circ) \\ \mu_{2,1}(\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/0^5 \\ -0/0^3 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mu}_1(100) = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{1,1}(100) \\ \bar{\mu}_{2,1}(100) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} \mu_{1,2}(k+1) = 1/0^3 \mu_{1,2}(k) - 0/0^6 \mu_{1,2}(k+1), \\ \mu_{2,2}(k+1) = 1/0^6 \mu_{2,2}(k) - 0/0^6 \mu_{2,2}(k+1) + 0/0^3 \mu_{1,1}(k) \mu_{2,1}(k), \\ \bar{\mu}_{1,2}(k) = \mu_{1,2}(k) + 1/0^3 \bar{\mu}_{1,2}(k+1) + 0/0^6 \bar{\mu}_{2,1}(k+1) \mu_{2,1}(k), \\ \bar{\mu}_{2,2}(k) = \mu_{2,2}(k) + 1/0^6 \bar{\mu}_{2,2}(k+1) + 0/0^3 \bar{\mu}_{2,1}(k+1) \mu_{1,1}(k), \\ \mu_2(\circ) = \begin{bmatrix} \mu_{1,2}(\circ) \\ \mu_{2,2}(\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mu}_2(100) = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{1,2}(100) \\ \bar{\mu}_{2,2}(100) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (3.6)$$

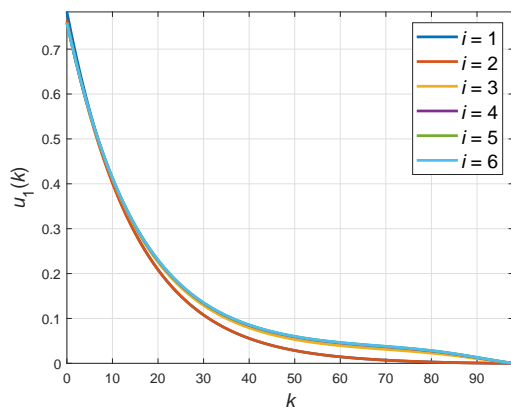
و این فرایند برای مراتب بالاتر  $\varepsilon$  ادامه داده می‌شود. نتایج به‌دست آمده از روش پیشنهادی در جدول ۱ ارائه شده‌اند. همان‌طور که از جدول ۱ برداشت می‌شود، الگوریتم مفروض با حد مجاز خطای  $\gamma = 1 \times 10^{-3}$  بعد از ۳ تکرار با  $J_3 = 5/12942$  به قانون کنترل زیربهینه همگرا می‌شود. زیرا:

$$\left| \frac{J_3 - J_2}{J_3} \right| = 0/7 \times 10^{-3} < 1 \times 10^{-3}. \quad (4.6)$$

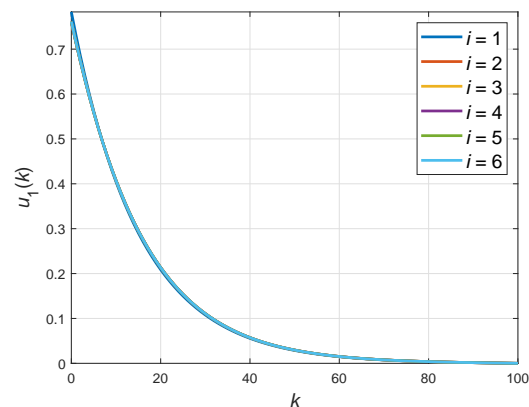
در ادامه، با هدف مقایسه‌ی منصفانه و با توجه به ماهیت روش پیشنهادی مبنی بر تعیین پاسخ تقریبی به‌صورت تکراری و تحت یک فرایند بازگشتی، تکنیک عددی نگرش تقریب متوالی [۲۱]، که به‌طور مشابه از یک فرایند تکراری و بازگشتی برای تعیین پاسخ تقریبی استفاده می‌کند، برای مقایسه در این مثال انتخاب شد. نتایج شبیه‌سازی روش تقریب متوالی در جداول ۲ و ۳ و همچنین شکل‌های ۱ تا ۴ گزارش شده‌اند. مقایسه‌ی داده‌های جداول ۱ و ۲ نشان می‌دهد که زمان پردازش برای هر دو روش در هر تکرار تقریباً یکسان است. اما جدول ۲ بیان می‌کند که روش تقریب متوالی با حد مجاز خطای  $\gamma = 1 \times 10^{-3}$  بعد از ۶ تکرار با خطای  $0/009$  به  $J_6 = 6/2946$  همگرا می‌شود، درحالی‌که این عدد برای تکنیک ارائه شده ۳ تکرار است (جدول ۱). بنابراین، با توجه به اینکه روش پیشنهادی در تعداد تکرارهای کمتری به دقت مفروض می‌رسد، در مقایسه با روش دیگر همگرایی سریعتری دارد، که این مسأله منجر به کاهش قابل ملاحظه‌ای در حجم محاسبات و زمان پردازش متناظر با آن می‌شود. مقایسه‌ی شکل‌های ۱ تا ۴ نیز بیانگر این مهم بوده که خروجی روش پیشنهادی در تکرارهای مختلف، در مقایسه با نگرش تقریب متوالی، بسیار به هم نزدیک هستند، که این مسأله تأیید دیگری بر سرعت همگرایی بالای این تکنیک

جدول ۱: نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۶).

تکرار	شاخص عملکرد	خطا	زمان تقریبی پردازش (ثانیه)
۱	۵,۳۷۲۹۲	—	۰,۰۱
۲	۵,۱۳۳۴۹	۰,۰۴	۰,۰۲
۳	۵,۱۲۹۴۲	۰,۰۰۰۷	۰,۰۲
۴	۵,۱۲۹۷۲	$۰,۵ \times 10^{-۴}$	۰,۰۳
۵	۵,۱۲۹۷۶	$۰,۷ \times 10^{-۵}$	۰,۰۴
۶	۵,۱۲۹۷۶	$۰,۲ \times 10^{-۶}$	۰,۰۵



(ب)



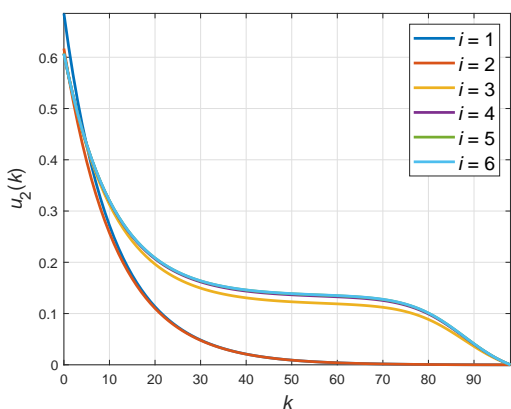
(الف)

شکل ۱: نتایج مقایسه‌ی  $u_1(k)$  بین (الف) روش پیشنهادی و (ب) نگرش تقریب متوالی در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۶).

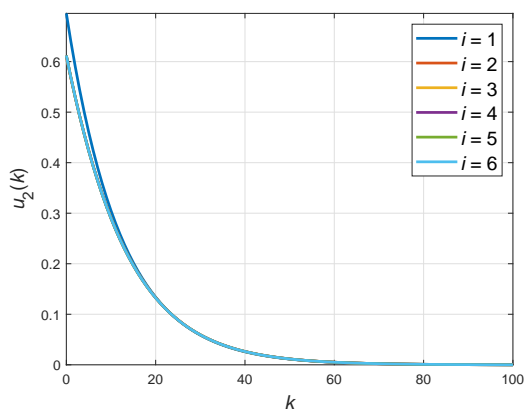
در مقایسه با روش عددی اشاره شده در بالا است. همچنین، جدول ۲ بیان می‌کند که تکنیک ارائه شده در این مقاله در تعداد تکرار و زمان پردازش مشابه (۶ تکرار و ۰,۰۵ ثانیه) منجر به پاسخ دقیق‌تر (خطای کمتر) و مقدار شاخص عملکرد کوچک‌تری در مقایسه با روش تقریب متوالی می‌شود.

جدول ۲: نتایج شبیه‌سازی نگرش تقریب متوالی در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۶).

تکرار	شاخص عملکرد	خطا	زمان تقریبی پردازش (ثانیه)
۱	۵,۱۴۱۴	—	۰,۰۱
۲	۵,۸۶۷۴	۰,۱۲۳۷	۰,۰۲
۳	۶,۱۰۶۴	۰,۰۳۹۱	۰,۰۳
۴	۶,۲۵۱۰	۰,۰۲۳۱	۰,۰۳
۵	۶,۲۸۸۹	۰,۰۰۶۰	۰,۰۴
۶	۶,۲۹۴۶	۰,۰۰۰۹	۰,۰۵

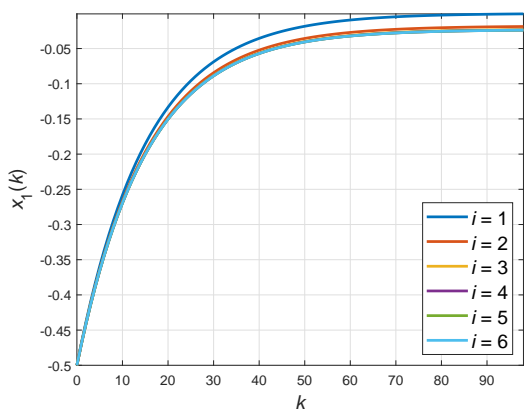


(ب)

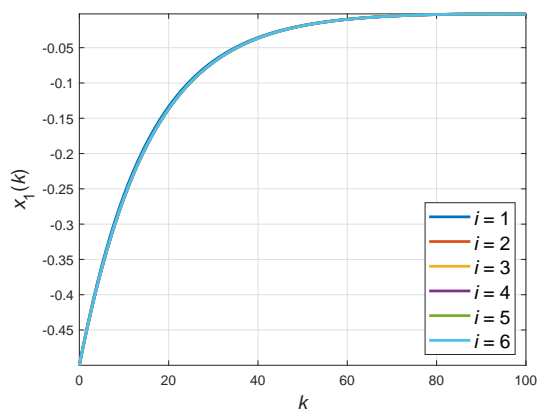


(الف)

شکل ۲: نتایج مقایسه‌ی  $u_2(k)$  بین روش پیشنهادی و (ب) نگرش تقریب متوالی در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۶).

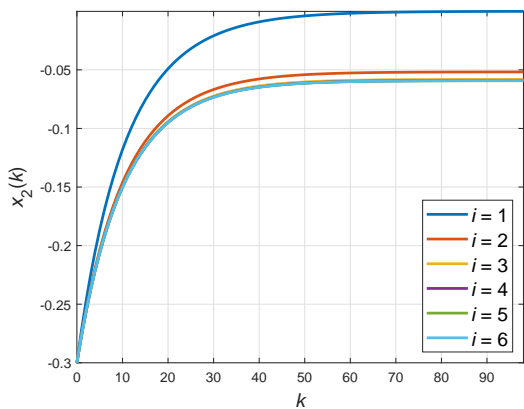


(ب)

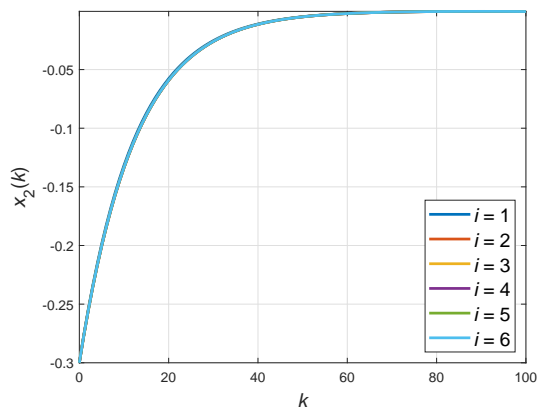


(الف)

شکل ۳: نتایج مقایسه‌ی  $x_1(k)$  بین روش پیشنهادی و (ب) نگرش تقریب متوالی در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۶).



(ب)



(الف)

شکل ۴: نتایج مقایسه‌ی  $x_2(k)$  بین روش پیشنهادی و (ب) نگرش تقریب متوالی در تکرارهای مختلف (مثال ۱.۶).

جدول ۳: مقایسه‌ی روش پیشنهادی و نگرش تقریب متوالی پس از ۶ تکرار (مثال ۱.۶).

روش	تکرار	شاخص عملکرد	خطا	زمان تقریبی پردازش (ثانیه)
روش پیشنهادی	۶	۵/۱۲۹۷۶	$۰/۲ \times ۱۰^{-۶}$	۰/۰۵
نگرش تقریب متوالی	۶	۶/۲۹۴۶۳	۰/۰۰۰۹	۰/۰۵

مثال ۲.۶. سیستم مرتبه‌ی چهار به هم متصل غیرخطی و گسسته با شاخص عملکرد مربعی زیر داده شده است:

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} [x_i^T(k) Q_i x_i(k) + u_i^T(k) R_i u_i(k)], \\ x_1(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0/15 \end{bmatrix} u_1(k) + 0/04 \begin{bmatrix} x_{11}^2(k) \\ x_{12}(k) - 5x_{21}(k) \end{bmatrix}, \\ x_2(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -0/2 \end{bmatrix} u_2(k) \\ \quad + 0/04 \begin{bmatrix} x_{21}(k) + x_{12}^2(k) + x_{11}(k)x_{12}(k)x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix}, \\ x_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2(0) = \begin{bmatrix} 0/1 \\ -0/05 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

که در آن  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0/2 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/15 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $f_2(x(k)) = 0/04 \begin{bmatrix} x_{21}(k) + x_{12}^2(k) + x_{11}(k)x_{12}(k)x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix}$  و  $f_1(x(k)) = 0/04 \begin{bmatrix} x_{11}^2(k) \\ x_{12}(k) - 5x_{21}(k) \end{bmatrix}$  همچنین داریم:  $x_2 = (x_{21}, x_{22})^T \in \mathbb{R}^2$  و  $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . بنا به الگوریتم ارائه شده در بخش ۴، قانون کنترل زیربهبینه با حد مجاز خطای  $\gamma = 1 \times 10^{-6}$  بعد از ۴ تکرار به دست می‌آید (جدول ۴). یعنی:  $\left| \frac{J_4 - J_3}{J_4} \right| = 0/9 \times 10^{-6} < 1 \times 10^{-6}$ . افزون بر آن، از معادله‌ی (۱.۴) داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,j}(k) = \sum_{j=1}^4 \mu_{1,j}(k), \\ x_{2,j}(k) = \sum_{j=1}^4 \mu_{2,j}(k), \\ u_{1,j}(k) = -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^4 \bar{\mu}_{1,j}(k+1), \\ u_{2,j}(k) = -R_i^{-1} B_i^T \sum_{j=1}^4 \bar{\mu}_{2,j}(k+1). \end{array} \right. \quad (6.6)$$

در این مثال، روش حساسیت [۲۲]، که مشابه با روش پیشنهادی از یک فرایند تکراری و بازگشتی برای تعیین پاسخ تقریبی استفاده می‌کند، برای مقایسه انتخاب شده است. جداول ۴ و ۵ نتایج شبیه‌سازی تکنیک پیشنهادی و روش حساسیت را تا تکرار چهارم گزارش می‌کنند. همچنین، جدول ۶ خروجی روش ارائه شده در این مقاله و نگرش حساسیت را در تکرار چهارم مقایسه می‌کند. بررسی داده‌های جداول ۴ و ۵ و همچنین مقایسه‌ی نتایج جدول ۶ نشان می‌دهد که اگرچه زمان پردازش برای هر دو روش در هر تکرار تقریباً یکسان است، اما تکنیک ارائه شده در این مقاله در یک مرتبه‌ی تکرار و زمان پردازش مشابه منجر به پاسخ دقیق‌تر (خطای کمتر) و مقدار شاخص عملکرد کوچک‌تری در مقایسه با روش حساسیت می‌شود. همچنین، با توجه به اینکه روش پیشنهادی در هر تکرار دقت بالاتری دارد، این تکنیک برای یک حد مجاز خطای از پیش تعیین شده ( $\gamma$ ) در مرتبه‌ی تکرار پایین‌تری (سرعت‌تر) نسبت به روش حساسیت همگرا می‌شود، که این مسأله منجر به کاهش قابل ملاحظه‌ای در حجم محاسبات و زمان پردازش متناظر با آن می‌شود. مقایسه‌ی شکل‌های ۵ تا ۱۰ نیز بیانگر این مطلب بوده

جدول ۴: نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

تکرار	شاخص عملکرد	خطا	زمان تقریبی پردازش (ثانیه)
۱	۱/۱۴۱۶	—	۰/۱
۲	۱/۱۴۱۸	$۰/۱۴ \times ۱۰^{-۳}$	۰/۲
۳	۱/۱۴۱۷	$۰/۱۳ \times ۱۰^{-۴}$	۰/۳
۴	۱/۱۴۱۷	$۰/۹ \times ۱۰^{-۶}$	۰/۴

جدول ۵: نتایج شبیه‌سازی روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

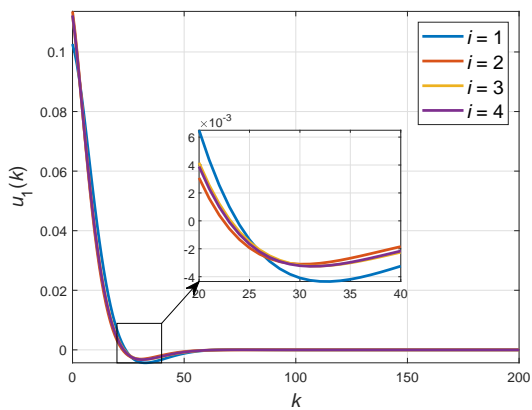
تکرار	شاخص عملکرد	خطا	زمان تقریبی پردازش (ثانیه)
۱	۱/۱۵۵۳۸	—	۰/۱
۲	۱/۱۴۳۶۵	۰/۰۱	۰/۲
۳	۱/۱۴۴۶	۰/۰۰۰۸	۰/۳
۴	۱/۱۴۴۲	۰/۰۰۰۱	۰/۴

که خروجی روش پیشنهادی در تکرارهای مختلف، در مقایسه با روش حساسیت، بسیار به هم نزدیک هستند، که این مسأله تأیید دیگری بر سرعت همگرایی بالای الگوریتم ارائه شده در مقایسه با روش عددی اشاره شده در بالا است.

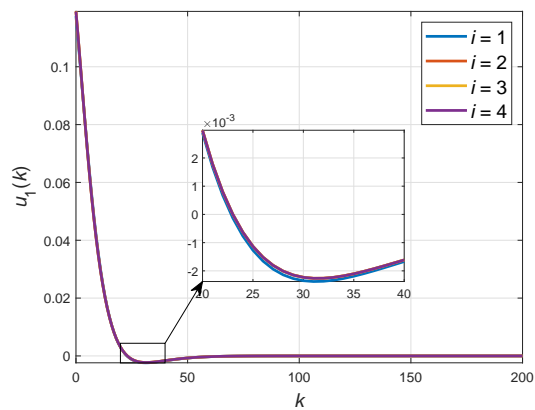
جدول ۶: مقایسه‌ی تکنیک پیشنهادی و روش حساسیت پس از ۴ تکرار (مثال ۲.۶).

روش	تکرار	شاخص عملکرد	خطا	زمان تقریبی پردازش (ثانیه)
تکنیک پیشنهادی	۴	۱/۱۴۱۷	$۰/۹ \times ۱۰^{-۶}$	۰/۴
روش حساسیت	۴	۱/۱۴۴۴	۰/۰۰۰۱	۰/۴



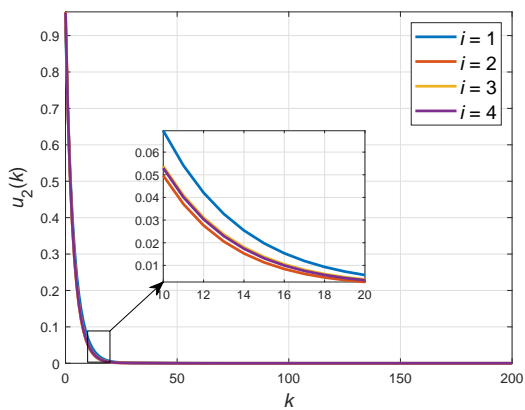


(ب)

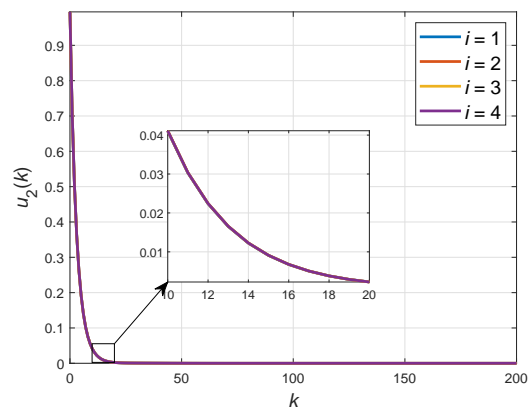


(الف)

شکل ۵: نتایج مقایسه‌ی  $u_1(k)$  بین (الف) تکنیک پیشنهادی و (ب) روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

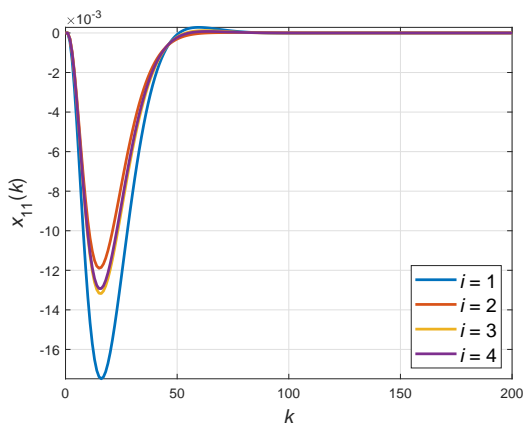


(ب)

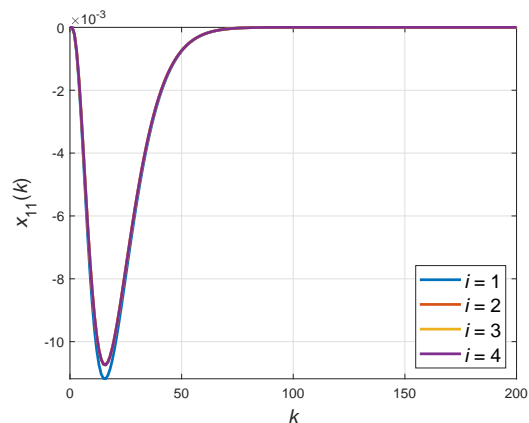


(الف)

شکل ۶: نتایج مقایسه‌ی  $u_2(k)$  بین (الف) تکنیک پیشنهادی و (ب) روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

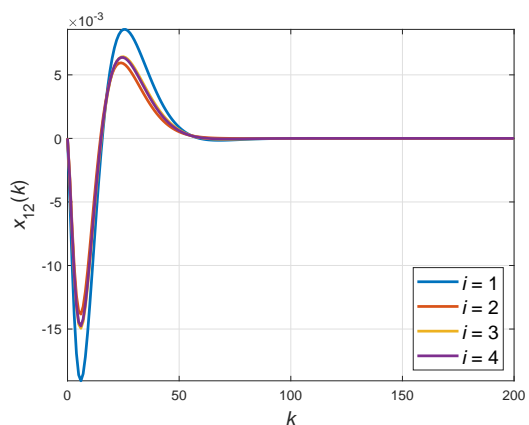


(ب)

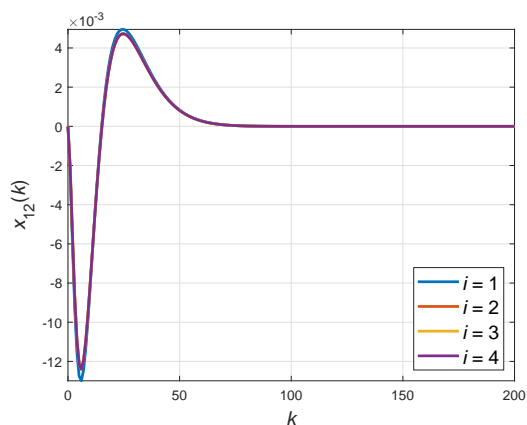


(الف)

شکل ۷: نتایج مقایسه‌ی  $x_{11}(k)$  بین (الف) تکنیک پیشنهادی و (ب) روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

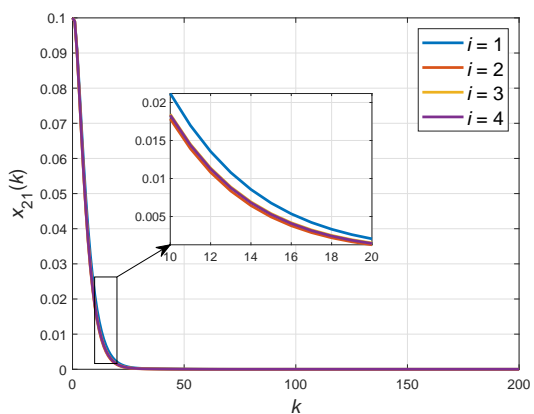


(ب)

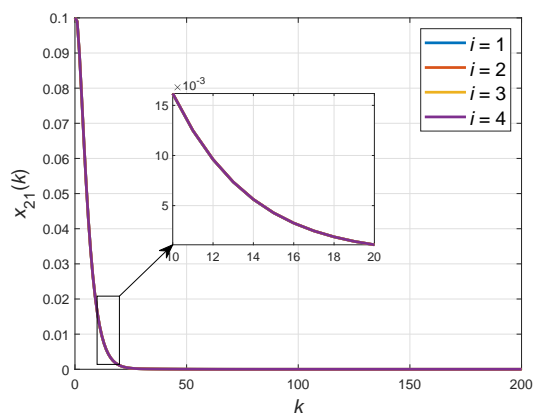


(الف)

شکل ۸: نتایج مقایسه‌ی  $x_{12}(k)$  بین (الف) تکنیک پیشنهادی و (ب) روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

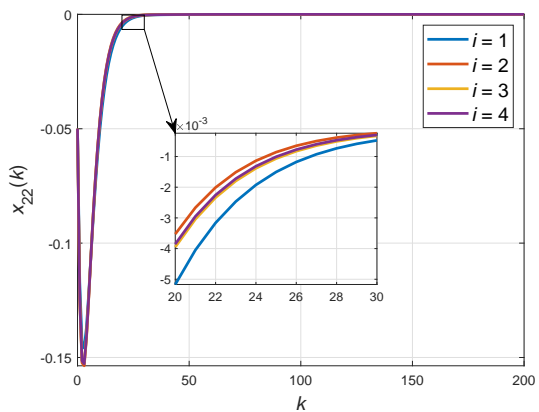


(ب)

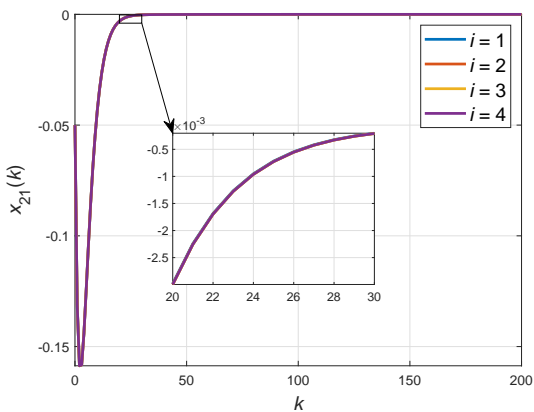


(الف)

شکل ۹: نتایج مقایسه‌ی  $x_{21}(k)$  بین (الف) تکنیک پیشنهادی و (ب) روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).



(ب)



(الف)

شکل ۱۰: نتایج مقایسه‌ی  $x_{22}(k)$  بین (الف) تکنیک پیشنهادی و (ب) روش حساسیت در تکرارهای مختلف (مثال ۲.۶).

## ۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک تکنیک کارا برای حل مسائل کنترل بهینه‌ی گسسته شامل سیستم‌های به هم متصل غیرخطی معرفی شد. در مقایسه با روش‌های تقریبی دیگر، از جمله روش تحلیل حساسیت و نگرش تقریب متوالی، روش ارائه شده از حل مسائل مقدار مرزی متغیر با زمان گسسته‌ی غیرخطی دوری کرده و تنها با حل یک دنباله از مسائل مقدار مرزی نامتغیر با زمان گسسته‌ی خطی سروکار دارد. همچنین، مسأله‌ی مقدار مرزی خطی در هر تکرار از روش پیشنهادی شامل چندین زیرمسأله‌ی جدا از هم بوده به طوری که این زیرمسائل می‌توانند به صورت موازی و مستقل از هم حل شوند. بنابراین، تنها تکنیک‌های مرسوم حل معادلات تفاضلی خطی برای دست‌یابی به جواب کافی است. همچنین، جواب به دست آمده به طور یکنواخت به جواب بهینه همگرا است. در نتیجه، پیچیدگی محاسباتی روش اشاره شده کمتر از روش‌های تقریبی دیگر است. افزون بر آن، کنترل بهینه‌ی طراحی شده قابلیت تعمیم به فرم فیدبک حالت را دارد. نتایج شبیه‌سازی، کارایی روش پیشنهادی را در مقایسه با سایر روش‌های تقریبی نشان داد.

## فهرست منابع

- [1] Agarwal R.P., 2000. *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- [2] Bayat, F., Mobayen, S. and Hatami, T., 2018. Composite nonlinear feedback design for discrete-time switching systems with disturbances and input saturation. *Int. J. Syst. Sci.*, 49(11), pp. 2362–2372. doi: <https://doi.org/10.1080/00207721.2018.1501830>
- [3] Elloumi, S., Mechichi, A.K. and Braiek, N.B., 2013. On quadratic optimal control of nonlinear discrete-time systems. *10th International Multi-Conferences on Systems, Signals & Devices*, Hammamet, Tunisia. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/SSD.2013.6564124>
- [4] Hassan Abadi, M., Mahmoudzadeh Vaziri, A. and Jajarmi, A., 2019. On a new and efficient numerical technique to solve a class of discrete-time nonlinear optimal control problems. *J. Eur. des Syst. Autom.*, 52(3), pp. 305–316. doi: <https://doi.org/10.18280/jesa.520312>
- [5] Jajarmi, A. and Baleanu, D., 2018. Optimal control of nonlinear dynamical systems based on a new parallel eigenvalue decomposition approach. *Optim. Control Appl. Methods*, 39(2), pp. 1071–1083. doi: <https://doi.org/10.1002/oca.2397>
- [6] Jajarmi, A. and Hajipour, M., 2017. An efficient parallel processing optimal control scheme for a class of nonlinear composite systems. *Acta. Math. Sci.*, 37(3), pp. 703–721. doi: [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(17\)30032-2](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30032-2)
- [7] Jajarmi, A., Pariz, N., Effati, S. and Vahidian Kamyad, A., 2012. Infinite horizon optimal control for nonlinear interconnected large-scale dynamical systems with an application to optimal attitude control. *Asian J. Control*, 14(5), pp. 1239–1250. doi: <https://doi.org/10.1002/asjc.452>
- [8] Janssen, L.A.L., Besselink, B., Fey, R.H.B. and van de Wouw, N., 2024. Modular model reduction of interconnected systems: A robust performance analysis perspective. *Automatica*, 160, p. 111423. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111423>
- [9] Jordan, B.W. and Polak, E., 1964. Theory of a class of discrete optimal control systems, *J. Electron. Control*, 17(6), pp. 697–711. doi: <https://doi.org/10.1080/00207216408937740>
- [10] Khatibi, M. and Shanechi, H.M., 2011. Using modal series to analyze the transient response of oscillators. *Int. J. Circ. Theor. App.*, 39(2), pp. 127–134. doi: <https://doi.org/10.1002/cta.621>

- [11] Khatibi, M. and Shanechi, H.M., 2015. Using a modified modal Series to analyse weakly nonlinear circuits. *Int. J. Electron.*, 102(9), pp. 1457–1474. doi: <https://doi.org/10.1080/00207217.2014.982212>
- [12] Mehraeen, S. and Jagannathan, S., 2011. Decentralized optimal control of a class of interconnected nonlinear discrete-time systems by using online Hamilton-Jacobi-Bellman formulation. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 22(11), pp. 1757–1769. doi: <https://doi.org/10.1109/TNN.2011.2160968>
- [13] Molloy, T.L., Ford, J.J. and Perez, T., 2018. Finite-horizon inverse optimal control for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 87, pp. 442–446. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.023>
- [14] Pariz, N., 2001. *Analysis of Nonlinear System Behavior: The Case of Stressed Power Systems*. Iran: PhD Thesis.
- [15] Pariz, N., Shanechi, H.M. and Vaahedi, E., 2003. Explaining and validating stressed power systems behavior using modal series. *IEEE Trans. Power. Syst.*, 18(2), pp. 778–785. doi: <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2003.811307>
- [16] Sajjadi, S.S., Pariz, N., Karimpour, A. and Jajarmi, A., 2014. An off-line NMPC strategy for continuous-time nonlinear systems using an extended modal series method. *Nonlinear Dyn.*, 78(4), pp. 2651–2674. doi: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1616-6>
- [17] Shankar, S., 1999. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control*. New York: Springer-Verlag.
- [18] Soltani, S., Pariz, N. and Ghazi R., 2009. Extending the perturbation technique to the modal representation of nonlinear systems. *Electr. Pow. Syst. Res.*, 79(8), pp. 1209–1215. doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2009.02.011>
- [19] Song, R., Xiao, W. and Sun, C., 2014. A new self-learning optimal control laws for a class of discrete-time nonlinear systems based on ESN architecture. *Sci. China Inf. Sci.*, 57, pp. 1–10. doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11432-013-4954-y>
- [20] Song, Y., Liu, Y. and Zhao, W., 2024. Approximately bi-similar symbolic model for discrete-time interconnected switched system. *IEEE/CAA J. Autom. Sin.*, 11(0), pp. 1–3. doi: <https://doi.org/10.1109/JAS.2023.123927>
- [21] Tang, G.Y. and Wang, H.H., 2005. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 36(3), pp. 153–161. doi: <https://doi.org/10.1080/00207720512331338076>
- [22] Tang, G.Y., Xie, N. and Liu, P., 2005. Sensitivity approach to optimal control for affine nonlinear discrete-time systems. *Asian J. Control*, 7(4), pp. 448–454. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1934-6093.2005.tb00408.x>
- [23] Wei, Q. and Li, T., 2024. Constrained-cost adaptive dynamic programming for optimal control of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, 35(3), pp. 3251–3264. doi: <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2023.3237586>
- [24] Wen, P., Wang, M. and Dai, S.L., 2024. Cooperative learning event-triggered control for discrete-time nonlinear multi-agent systems by internal and external interaction topology. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 34(3), pp. 1541–1565. doi: <https://doi.org/10.1002/rnc.7044>

- [25] Yu, T. and Xiong, J., 2023. Decentralised  $H_\infty$  filtering of interconnected discrete-time systems. *Int. J. Control*, 96(6), pp. 1505–1513. doi: <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2009.2033792>
- [26] Zhang, Y., Naidu, D.S., Cai, C. and Zou, Y., 2016. Composite control of a class of nonlinear singularly perturbed discrete-time systems via D-SDRE. *Int. J. Syst. Sci.*, 47(11), pp. 2632–2641. doi: <https://doi.org/10.1080/00207721.2015.1006710>
- [27] Zhao, J.Y., 1990. *Iterative Determination of Analytical Quasi-optimal Control for Non-linear Discrete-time Systems*. France: PhD Thesis.



## An efficient iterative method for the optimal control of discrete nonlinear interconnected dynamical systems

Manijeh Hasanabadi<sup>(1)</sup>, Asadollah Mahmoudzadeh Vaziri<sup>(1)</sup> and Amin Jajarmi<sup>(2)</sup> <sup>1</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Science and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran

<sup>(2)</sup> Department of Electrical Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran

Communicated by: Ali Reza Fakharzadeh Jahromi

Received: 24 April 2022

Accepted: 3 May 2024

**Abstract:** This article introduces an iterative method for solving discrete optimal control problems involving interconnected nonlinear systems. Using this approach, the discrete and coupled nonlinear boundary value problem (BVP) obtained from the necessary optimality conditions transforms into a sequence of linear time invariant BVPs. Furthermore, the linear BVP at each iteration of the proposed method consists of several decoupled sub-problems, which can be solved in parallel and are unrelated to each other. The solution of these problems, employing common techniques for solving linear difference equations, leads to an optimal control law in a converging series form with uniform convergence. Moreover, a practical approach is presented to extend the designed optimal control to a feedback form. Subsequently, the implementation of the proposed method involves the design of a highly accurate iterative algorithm with low computational complexity, ensuring that the suboptimal control law is obtained with a minimal number of iterations. Finally, the efficacy of this technique is demonstrated through simulation and the solution of various numerical examples.



©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

**Keywords:** Nonlinear interconnected systems, optimal control, discrete equations, iterative method.

<sup>1</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: (M. Hasanabadi) [manijehasanabadi@yahoo.com](mailto:manijehasanabadi@yahoo.com), (A. Mahmoudzadeh) [amvaziri@birjand.ac.ir](mailto:amvaziri@birjand.ac.ir) (A. Jajarmi) [a.jajarmi@ub.ac.ir](mailto:a.jajarmi@ub.ac.ir)