مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۲، ص ۳۹-۵۷

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.45168.2218

مشبکه‌های ارتومدولار در ساختار علّی فضا-زمان

مهدی وطن‌دوست[(۱)]، رحیمه پورخاندانی[(۱)] [۱] و علی‌اکبر استاجی[(۱)]

[(۱)]دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دبیر مسئول: علی رضایی علی‌آباد

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۸/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۵/۵

چکیده:
نظریه‌ی مجموعه‌های راف، چارچوب مناسبی برای مطالعه و مقایسه عملگرهای جبری تعریف شده در بسیاری از ساختارهای ریاضی را فراهم می‌کند. در این مقاله، ارتباطی بین ساختار علّی فضا-زمان در نظریه نسبیت اینشتین و نظریه مجموعه‌های راف بر اساس پوشش برقرار می‌کنیم و به‌وسیله آن عملگرهای تقریب پوششی را برای ساختار علّی تعریف می‌کنیم؛ سپس نشان می‌دهیم که برخی از این عملگرها، همان عملگرهای اساسی و متداول در ساختار علّی فضا-زمان از جمله $I^{\pm}$، $J^{\pm}$، D، $\perp$، و برخی عملگرها مانند $\perp'$ و $\perp'\perp'$، عملگرهای متفاوتی نسبت به عملگرهای متداول در ساختار علّی می‌باشند. اخیراً، منطق علّی روی فضا-زمان‌ها به‌وسیله مشبکه ارتومدولار کاملی متشکل از همه ثابت‌های عملگر بستار $\perp\perp$، معرفی شده است. در اینجا، از طریق عملگر متعامد $\perp'$، مشبکه‌ی کامل دیگری معرفی و عناصر این مشبکه را در فضا-زمان‌های علّی تعیین می‌کنیم و همچنین، شرط لازم و کافی برای ارتومدولار بودن این مشبکه در فضا-زمان‌های هذلولوی سرتاسری ارائه می‌کنیم. در نهایت، نشان می‌دهیم این دو مشبکه، در حالت فضا-زمان مینکوفسکی دوبعدی با هم یک‌ریخت هستند، ولی در حالت کلی این مطلب لزوماً برقرار نیست.

واژه‌های کلیدی: مشبکه، مجموعه‌های راف، فضا- زمان، ساختار علّی، منطق علّی.

رده‌بندی ریاضی: 06-XX; 83CXX; 03GXX

۱ مقدمه

منطق مکانیک کوانتوم بر اساس مشبکه‌ی ارتومدولار عملگرهای تصویر روی فضای هیلبرت تعریف شده است که در قاعده پوشش صدق می‌کند [۲۴]. به طور طبیعی، رویکرد مشبکه‌ای به ساختار فضا-زمان، راه ارتباطی مناسبی میان نظریه نسبیت اینشتین و نظریه کوانتوم فراهم می‌آورد که یافتن چنین ارتباطی در فیزیک با اهمیت است. با این انگیزه، سگلا و جادچک در [۱۰] و کاسینی در [۵]، با کمک رابطه تعامد و بر

[۱]نویسنده مسئول مقاله
(M. Vatandoost) m.vatandoost@hsu.ac.ir, (R. Pourkhandani) r.pourkhandani@hsu.ac.ir
(A.A. Estaji) aaestaji@hsu.ac.ir

اساس منطق تجربی راندال و فولیس (منطق استاندارد کوانتوم)، ساختار ارتومدولار در نظریه نسبیت خاص اینشتین را تعریف کردند. در واقع، آن‌ها نشان دادند منطق علّی به‌عنوان گردایه مجموعه‌های ارتو-بسته‌ی مرتبه دوم در فضای مینکوفسکی، مشبکه ارتومدولار کامل تشکیل می‌دهد. همچنین، سگلا و همکارانش این نتیجه را به ساختار علّی تولید شده توسط تصویر خانواده‌ای از توابع توسیع دادند و مشبکه‌های تولید شده توسط عملگرهای بستار علّی D و تعامد $\perp$ را مطالعه کردند [۶-۹، ۱۱].

نظریه مجموعه‌های راف، مدل ریاضیاتی است که توسط پائولاک در سال ۱۹۸۲ میلادی معرفی شده است [۲۲]. این نظریه در زمینه‌های مختلف شامل پردازش تصویر، داده‌کاوی، شناخت الگو، انفورماتیک پزشکی و غیره ... به کار برده شده است. نظریه کلاسیک مجموعه‌های راف بر اساس رابطه هم‌ارزی، که مجموعه مرجع را افراز می‌کند، می‌باشد. اخیراً، بسیاری از محققان نظریه مجموعه‌های راف را به نظریه مجموعه‌های راف بر اساس پوشش تعمیم داده‌اند به گونه‌ای که در آن به‌جای رابطه هم‌ارزی از پوشش دلخواه برای مجموعه مرجع استفاده می‌شود. در واقع، در رویکرد مجموعه‌های راف بر اساس پوشش، مشابه با برخی از ساختارهای ریاضی همچون ساختار علّی، توپولوژی، منطق مودال، منطق تجربی، به مجموعه مرجعی مانند Z، و پوششی از آن مانند G، چندین عملگر تقریب پوششی نسبت داده می‌شود. این رویکرد می‌تواند درک بهتری از ارتباط بین ساختارهای ریاضی و نظریه‌های مرتبط با آن‌ها را فراهم آورد. هدف اصلی این مقاله یافتن عملگرهای پایه‌ای، به‌خصوص عملگرهای تعامد و بررسی مشبکه متناظر آن، در ساختار علّی فضا-زمان می‌باشد. این مقاله به‌صورت زیر بخش‌بندی شده است:

در بخش ۲، امکان استفاده از عملگرها و ساختارهای نظریه تقریب بر اساس پوشش را در ساختار علّی فضا-زمان فراهم می‌کنیم: ابتدا، تعاریف فضای تقریب بر اساس پوشش و ویژگی‌های عملگرهای رایج مربوط به آن را یادآوری می‌کنیم و پس از آن، عملگرهای تقریب بر اساس پوشش را توسیع می‌دهیم و عملگرهای تقریب پوششی مضاعف بالایی و پائینی را تعریف می‌کنیم و ویژگی‌های مختلف آن‌ها را مطالعه می‌کنیم (تعریف ۱.۲ و گزاره ۳.۲ را بنگرید). سپس، نشان می‌دهیم که مجموعه نقاط ثابت برخی عملگرهای تقریب پوششی مشبکه کامل هستند (گزاره ۷.۲ و نتیجه ۹.۲ را بنگرید). در برخی نظریه‌ها، این ساختارهای جبری به‌عنوان منطق آن نظریه در نظر گرفته می‌شوند. در پایان این بخش، ساختار علّی را به عنوان یک مثال از فضای تقریب پوششی معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، فضا-زمان M با مجموعه همه خم‌های علّی موجود در آن را به عنوان ساختار علّی در نظر می‌گیریم و عملگرهای تقریب پوششی را در این فضا-زمان تعبیر می‌کنیم. همچنین، عملگر تعامد $\perp'$ را معرفی و سپس، عناصر مشبکه کامل تولید شده توسط رابطه تعامد $\perp'$ در یک فضا-زمان علّی را مشخص می‌کنیم و درنهایت، شرط لازم و کافی برای ارتومدولار بودن این مشبکه در فضا-زمان‌های هذلولوی سرتاسری را ارائه می‌کنیم. (گزاره ۱۰.۳ را بنگرید).

در اینجا، برخی تعاریف پایه‌ای و مفاهیم معمول در نظریه مشبکه را که در فصل‌های بعد مورد نیاز است، به اجمال مرور می‌کنیم. خوانندگان علاقمند می‌توانند منابع [۱، ۳] را بنگرند.

ما از [۳]، به‌یاد می‌آوریم که دوتایی $(P,\leq)$، که در آن P مجموعه ای دلخواه و $\leq$ یک رابطه دوتایی تعریف شده بر P است، یک مجموعه جزئاً مرتب نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. انعکاسی: برای هر $a\in P$، داشته باشیم $a\leq a$؛

۲. تعدی: برای هر $a,b,c\in P$، اگر $a\leq b$ و $b\leq c$، آنگاه $a\leq c$؛

۳. پادمتقارنی: برای هر $a,b\in P$، اگر $a\leq b$ و $b\leq a$، آنگاه $a=b$.

فرض کنید $(P,\leq)$ مجموعه جزئاً مرتب و X زیرمجموعه P باشد. $a\in P$ رَسَند (بزرگترین کران پایین) از مجموعه X نامیده می‌شود و با عبارت $a=\bigwedge X$ نشان داده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. عنصر a کران پایین برای زیرمجموعه X باشد؛ یعنی، برای هر $x\in X$، داشته باشیم $a\leq x$؛

۲. برای هر کران پایین مانند b از X، داشته باشیم $b\leq a$.

به‌جای $\bigwedge\{x,y\}$، از عبارت $x\wedge y$ در نگارش‌مان استفاده می‌کنیم و اگر X تهی باشد، به‌جای $\bigwedge\emptyset$، از نماد ۱ استفاده می‌شود. به وضوح ۱، در صورت وجود، بزرگترین عضو P است.

به‌صورت دوگان، برای زیرمجموعه X، کوچکترین کران بالا،که وِست X نامیده می‌شود و با نماد $\bigvee X$ نشان داده می‌شود، قابل تعریف است. همچنین، به‌جای $\bigvee\{x,y\}$، از $x\vee y$ در نگارش‌مان، بهره خواهیم برد. و $\bigvee\emptyset$، در صورت وجود، کوچک‌ترین عضو مجموعه جزئاً مرتب $(P,\leq)$ است و آن را با ۰ نشان می‌دهیم.

مجموعه جزئاً مرتب $(L,\leq)$، مشبکه نامیده می‌شود، اگر هر زیرمجموعه متناهی (از جمله مجموعه تهی) دارای رَسَند و وِست باشد؛ و آن را مشبکه کامل می‌گویند، اگر هر زیر مجموعه‌ی آن (متناهی یا نامتناهی) رَسَند و وِست داشته باشد و همچنین، مشبکه را توزیع‌پذیر گویند، اگر در یکی از دو شرط معادل زیر صدق کند:

۱. برای هر $x,y,z\in L$، داشته باشیم $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$؛

۲. برای هر $x,y,z\in L$، داشته باشیم $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

مشبکه L را مشبکه متمم‌دار می‌گویند، هرگاه هر عنصر آن متمم داشته باشد، به عبارت دیگر، برای هر $x \in L$، عنصر $y \in L$ موجود باشد به‌طوری‌که $x \wedge y = 0$ و $x \vee y = 1$.
مشبکه متمم‌دار توزیع‌پذیر را جبر بولی می‌گویند. هر عضو دلخواه مانند x در جبر بولی دارای متمم یکتایی می‌باشد که آن را با x' نشان می‌دهیم.
از [۴]، به خاطر می‌آوریم که نگاشت $(.)^{\perp} : L \longrightarrow L$ تعریف شده بر مشبکه ی $(L, \leq)$، متمم متعامد است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $x \in L$، داشته باشیم $(x^{\perp})^{\perp} = x$.

۲. برای هر $x, y \in L$، اگر $x \leq y$، آن‌گاه $y^{\perp} \leq x^{\perp}$.

۳. برای هر $x \in L$، داشته باشیم $x \wedge x^{\perp} = 0$ و $x \vee x^{\perp} = 1$.

به‌علاوه، L ارتومدولار است، اگر برای هر $x, y \in L$، از $x \leq y$ نتیجه شود $y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$. با توجه به ارتباط موضوع مقاله به نظریه نسبیت، مرور برخی از تعاریف اولیه این نظریه ضروری می‌باشد که برای اجتناب از دست دادن پیوستگی مطالب، در ابتدای بخش ۳ به آن می‌پردازیم.

۲ فضای تقریب پوششی و ساختار علّی

در این بخش، عملگرهای تقریب پوششی یک فضای تقریب پوششی را تعریف و رفتار این عملگرها و عملگرهای حاصل از ترکیب آن‌ها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالعه همه مشبکه‌های کامل در $\mathcal{P}(Z)$ معادل مطالعه عملگرهای بستار روی Z می‌باشد؛ زیرا تناظری یک‌به‌یک میان مشبکه‌های کامل در $\mathcal{P}(Z)$ و مجموعه‌های نقاط ثابت عملگرهای بستار روی Z موجود است [۱۹].
از این‌رو، در این بخش، عملگرهای بستار را بیشتر مورد توجه قرار می‌دهیم. در سرتاسر این بخش، فرض می‌کنیم که Z مجموعه مرجع یا جهان مورد بحث و G پوششی از Z باشد؛ یعنی، اعضای G زیرمجموعه Z است و $Z = \bigcup G$. در نظریه مجموعه‌های راف بر اساس پوشش، زوج مرتب (Z, G) را فضای تقریب پوششی می‌نامند [۱۴، ۲۶، ۲۸، ۳۰]. برای هر عضو z در Z، مجموعه همه عناصر G شامل z با نماد زیر نشان داده می‌شود:

$$\beta(z) := \{f \in G : z \in f\}.$$

مطابق مرجع [۱۳، ۳۰]، یادآوری می‌کنیم که برای هر پوشش G از Z، منظور از عملگر تقریب پوششی بالایی در G نگاشت

$$\overline{G} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

است که برای هر $X \in \mathcal{P}(Z)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{G}(X) = \{z \in Z : \exists f \in \beta(z),\ f \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup\{f \in G : f \cap X \neq \emptyset\};$$

و همچنین $\underline{G}$ عملگر تقریب پوششی پائینی در G است که برای هر $X \in \mathcal{P}(Z)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{G} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

$$\underline{G}(X) = \{z \in Z : \exists f \in \beta(z),\ f \subseteq X\} = \bigcup\{f \in G : f \subseteq X\}.$$

البته انواع مختلفی از مجموعه‌های راف بر اساس پوشش تعریف شده است [۲۸، ۲۹]. در اینجا، نوع دیگری از عملگرهای تقریب پوششی در Z را تعریف می‌کنیم و ویژگی‌های آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی باشد. برای هر $X \in \mathcal{P}(Z)$، عملگرهای تقریب پوششی مضاعف بالایی و پائینی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{\overline{G}}, \underline{\underline{G}} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

$$\overline{\overline{G}}(X) = \{z \in Z : \forall f \in \beta(z),\ f \cap X \neq \emptyset\},$$
$$\underline{\underline{G}}(X) = \{z \in Z : \forall f \in \beta(z),\ f \subseteq X\}.$$

همچنین، برای هر $X \in \mathcal{P}(Z)$ عملگر تعامد $\perp$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\perp\colon \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

$$X^{\perp} = \{z \in Z \mid \forall f \in \beta(z), f \cap X = \emptyset\}.$$

در حالتی که $X = \{x\}$، $z \in X^{\perp}$ اگر و فقط اگر هیچ عنصری مانند $f \in G$ موجود نباشد به‌طوری‌که $\{x, z\} \subseteq f$. بنابراین، با کمک این عملگر تعامد، می‌توان رابطه غیرانعکاسی و تقارنی تعامد را روی Z تعریف کرد.

مثال **۲.۲**. فرض کنید (X, τ) فضای توپولوژی باشد. اگر $G = \tau$ را به‌عنوان پوشش از فضا X در نظر بگیریم، آنگاه عملگرهای $\underline{G}$ و $\overline{\overline{G}}$ همان عملگرهای بستار و درون در فضای توپولوژی می‌باشند.

علی‌رغم تفاوت در تعریف عملگرهای $\overline{G}$ و ... با عملگرهایی مانند $\overline{G}^{+}, \overline{G}^{-}$ و ... و همچنین تفاوت عنصر f با عناصر f^{+} و f^{-} در مرجع [۲۶]، (که به ترتیب در فضای مرتب $(Z, \leq)$ دارای نقطه ابتدایی و انتهایی هستند)، برخی از قسمت‌های گزاره زیر مشابه روند برهان گزاره ۱.۳ در آن مرجع قابل اثبات هستند.

گزاره **۳.۲**. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی باشد. برای هر زیرمجموعه‌هایی مانند X, Y از Z و عناصر دلخواهی مانند x, y در Z گزاره‌های زیر برقرار است:

(۱) اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $\underline{G}(X) \subseteq \underline{G}(Y)$ و $\underline{\underline{G}}(X) \subseteq \underline{\underline{G}}(Y)$.

(۲) اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $\overline{G}(X) \subseteq \overline{G}(Y)$ و $\overline{\overline{G}}(X) \subseteq \overline{\overline{G}}(Y)$.

(۳) $\overline{G}(X) = Z \setminus \underline{\underline{G}}(Z \setminus X)$ و $\underline{G}(X) = Z \setminus \overline{\overline{G}}(Z \setminus X)$.

(۴) $\underline{G}(\overline{G}(X)) = \overline{G}(X) = \overline{G}(\overline{\overline{G}}(X)) = \overline{G}(\underline{\underline{G}}(\overline{G}(X)))$ و
$\overline{\overline{G}}(\underline{\underline{G}}(X)) = \underline{\underline{G}}(X) = \underline{\underline{G}}(\underline{G}(X)) = \underline{\underline{G}}(\overline{G}(\underline{\underline{G}}(X)))$.

(۵) $\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{G}}(X)) \subseteq \underline{G}(\underline{\underline{G}}(X)) \subseteq \underline{\underline{G}}(X) \subseteq \overline{G}(\underline{\underline{G}}(X)) \subseteq \underline{G}(X) \subseteq X$.

(۶) $X \subseteq \overline{\overline{G}}(X) \subseteq \underline{\underline{G}}(\overline{G}(X)) \subseteq \overline{G}(X) \subseteq \overline{\overline{G}}(\overline{G}(X)) \subseteq \overline{G}(\overline{G}(X))$.

(۷) $\underline{\underline{G}}(X \cap Y) = \underline{\underline{G}}(X) \cap \underline{\underline{G}}(Y)$ و $\underline{\underline{G}}(X \cup Y) \supseteq \underline{\underline{G}}(X) \cup \underline{\underline{G}}(Y)$.

(۸) $\underline{G}(X \cap Y) \subseteq \underline{G}(X) \cap \underline{G}(Y)$ و $\underline{G}(X \cup Y) \supseteq \underline{G}(X) \cup \underline{G}(Y)$،

(۹) $\overline{G}(X \cap Y) \subseteq \overline{G}(X) \cap \overline{G}(Y)$ و $\overline{\overline{G}}(X \cap Y) \subseteq \overline{\overline{G}}(X) \cap \overline{\overline{G}}(Y)$.

(۱۰) $\overline{\overline{G}}(X \cup Y) \supseteq \overline{\overline{G}}(X) \cup \overline{\overline{G}}(Y)$.

(۱۱) اگر $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(Z)$، آنگاه $\overline{G}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{G}(X_\lambda)$.

(۱۲) اگر $y \in \overline{G}(x)$، آنگاه $x \in \overline{G}(y)$.

(۱۳) اگر $y \in \overline{G}(X \cup \{x\})$ و $y \notin \overline{G}(X)$، آنگاه $x \in \overline{G}(X \cup \{y\})$.

(۱۴) $X^{\perp} = Z \setminus \overline{G}(X)$ و اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$.

(۱۵) $X \cap X^{\perp} = \emptyset$، $X^{\perp\perp} = \underline{G}(\overline{G}(X))$ و $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$.

اثبات. برهان قسمت‌های (۱) تا (۱۴) مشابه روند اثبات گزاره ۱.۳ در مرجع [۲۶]، و گزاره ۲۰ در مرجع [۱۴] است.
اثبات قسمت (۱۵):
برای هر $z \in Z$، داریم:

$$\begin{array}{lll} z \in \underline{G}\big(\overline{G}(X)\big) & \Leftrightarrow & \forall f \in \beta(z), f \subseteq \overline{G}(X) \\ & \Leftrightarrow & \forall f \in \beta(z), f \cap \big(Z \setminus \overline{G}(X)\big) = \emptyset \\ & \Leftrightarrow & \forall \in \beta(z), f \cap (X^{\perp}) = \emptyset \\ & \Leftrightarrow & z \in X^{\perp\perp}. \end{array}$$

بنابراین، $X^{\perp\perp} = \underline{G}\big(\overline{G}(X)\big)$.
از این‌که $X \subseteq \overline{G}(X)$ می‌توان نتیجه گرفت که $X^{\perp} = Z \setminus \overline{G}(X) \subseteq Z \setminus X$ و لذا $X \cap X^{\perp} = \emptyset$.
سرانجام، طبق قسمت‌های (۳) و (۴)، داریم:

$$Z \setminus \overline{G}(X) = \underline{G}(Z \setminus X)$$

و

$$\overline{G}(X) = \overline{G}\big(\underline{G}(\overline{G}(X))\big).$$

بنابراین،

$$\begin{array}{lll} X^{\perp} & = & Z \setminus \overline{G}(X) \\ & = & Z \setminus \overline{G}\Big(\underline{G}(Z \setminus (Z \setminus \overline{G}(X)))\Big) \\ & = & Z \setminus \overline{G}\big(Z \setminus \overline{G}(Z \setminus \overline{G}(X))\big) \\ & = & \big((X^{\perp})^{\perp}\big)^{\perp}. \end{array}$$

□

قسمت (۱۲) از گزاره ۳.۲ متقارن بودن رابطه دوتایی در تعریف ۴.۲ را تضمین می‌کند.

تعریف ۴.۲. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی باشد و $x, y \in Z$. می‌گوییم $x \perp' y$ اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $x \neq y$،

(۲) عنصری مانند $f \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که $\{x, y\} \subseteq f$.

آشکارا $\perp'$ رابطه غیرانعکاسی و متقارن روی Z است. بنابراین، $\perp'$ رابطه تعامد روی Z است.

گزاره ۵.۲. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی باشد. گزاره‌های زیر برقرار است:

(۱) $Z \times Z = \perp \cup \perp' \cup \{(z, z) \mid z \in Z\}$.

(۲) $\{x\}^{\perp'} = \{y \in Z \setminus \{x\} \mid y \perp' x\} = \overline{G}(x) \setminus \{x\}$.

(۳) $A^{\perp'} = \{y \in Z \setminus A \mid y \perp' x,\ $ برای هر $x \in A\} = \big(\bigcap_{x \in A} \overline{G}(x)\big) \setminus A$.

(۴) $A \cap A^{\perp'} = \emptyset$ و $A^{\perp'} = A^{\perp'\perp'\perp'}$.

(۵) اگر $A \subseteq B$، آنگاه $B^{\perp'} \subseteq A^{\perp'}$.

اثبات. برهان سرراست است. □

برای مجموعه جزئاً مرتب L، تعاریف زیر از [۱۷] یادآوری می‌گردد:

(۱) نگاشت خودتوان و حافظ ترتیب $p\colon L \to L$ را عملگر تصویری روی L می‌نامند.

(۲) عملگر تصویری c روی L را عملگر بستار می‌نامند، هرگاه برای $x \in L$، داشته باشیم $x \leq c(x)$.

(۳) عملگر تصویری k روی L را عملگر هسته‌ای می‌نامند، هرگاه برای $x \in L$، داشته باشیم $k(x) \leq x$.

لم ۶.۲. فرض کنید Z مجموعه دلخواه و $c : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$ عملگر بستار باشد. در این‌صورت

$$k\big(A \mapsto Z \setminus c(Z \setminus A)\big) \colon \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

عملگر هسته‌ای است.

اثبات. برهان سرراست است. □

گزاره ۷.۲. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی باشد. عملگرهای

$$\overline{\overline{G}}, (.)^{\perp\perp}, (.)^{\perp'\perp'} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

عملگر بستار هستند و عملگرهای

$$\underline{G}, \overline{G}\underline{\underline{G}} : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

عملگر هسته‌ای می‌باشند.

اثبات. طبق گزاره ۳.۲، کافی است نشان دهیم که این عملگرها خودتوان هستند.
فرض کنید $A \in \mathcal{P}(Z)$، $z \in \overline{\overline{G}}(\overline{\overline{G}}(A))$ و $f \in \beta(z)$. در این‌صورت عنصر $y \in f \cap \overline{\overline{G}}(A)$ وجود دارد. از این‌که $y \in \overline{\overline{G}}(A)$ و $f \in \beta(y)$، نتیجه می‌گیریم که $f \cap A \neq \emptyset$. بنابراین، $z \in \overline{\overline{G}}(A)$ و $\overline{\overline{G}}(\overline{\overline{G}}(A)) \subseteq \overline{\overline{G}}(A)$. از طرفی دیگر، اگر $A \in \mathcal{P}(Z)$، آنگاه طبق گزاره ۳.۲، $A \subseteq \overline{\overline{G}}(A)$. از این‌که $\overline{\overline{G}}$ یکنواست، می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{\overline{G}}(A) \subseteq \overline{\overline{G}}(\overline{\overline{G}}(A))$.
ازاین رو،

$$\overline{\overline{G}}(\overline{\overline{G}}(A)) = \overline{\overline{G}}(A).$$

از قسمت‌های (۱۵) و (۹) از گزاره ۳.۲ داریم:

$$\underline{G}\overline{G}\underline{\underline{G}}(\overline{G}(A)) = \underline{G}(\overline{G}(A)),$$

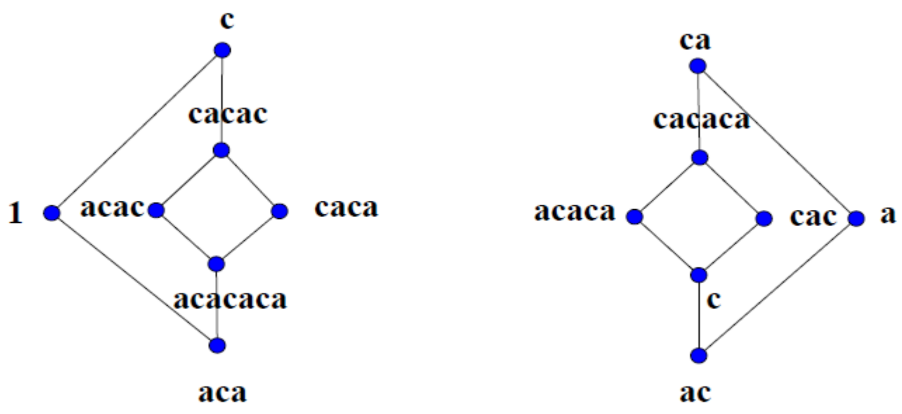
و همچنین

$$\underline{G}\overline{G} = (.)^{\perp\perp}.$$

پس، عملگرهای $\overline{\overline{G}}(.)$ و $(.)^{\perp\perp}$ عملگر بستار می‌باشند.
همچنین، به‌وسیله قسمت (۵) از گزاره ۵.۲، می‌توان نشان داد که $(.)^{\perp'\perp'}$ یک عملگر بستار است.
سرانجام، از گزاره ۳.۲، می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{G}\underline{\underline{G}}(A) = Z \setminus \underline{G}\overline{G}(Z \setminus A)$ و $\underline{G}(A) = Z \setminus \overline{\overline{G}}(Z \setminus A)$. با به‌کارگیری لم ۶.۲، می‌توان نتیجه گرفت که عملگرهای $\underline{G}, \overline{G}\underline{\underline{G}}$ عملگر هسته‌ای هستند. □

برای اولین بار، کازیمیرز کوراتوسکی، ریاضیدان معروف لهستانی در سال ۱۹۲۲ میلادی کشف کرد که اگر در فضای توپولوژی عملگرهای بستار و متمم به هر تعداد و ترتیبی روی مجموعه دلخواه اثر کنند حداکثر ۱۴ مجموعه متمایز به‌وجود خواهد آمد؛ که به قضیه بستار–متمم کوراتوسکی یا مساله ۱۴–مجموعه معروف می‌باشد. اگر در فضای توپولوژی X یک مجموعه A بتواند ۱۴ مجموعه متمایز خود را تولید کند، آنگاه A را K–مجموعه می‌نامند. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که مجموعه‌های

$$A = (\circ, ۱) \cup (۱, ۲) \cup \{۳\} \cup [۴, ۵] \cap Q$$



شکل ۱: حداکثر ۱۴ عملگر از ترکیب دو عملگر c و a به‌وجود می‌آیند که عملگرهای سمت چپ شکل خودتوان می‌باشند.

و

$$B = \{۱/n | n = ۱, ۲, ۳, \cdots\} \cup (۳, ۴) \cup \{۴, ۵\} \cup [۶, ۷] \cup (۷, ۸) \cap Q$$

در خط اعداد حقیقی با توپولوژی معمول K–مجموعه هستند [۲۵].

واضح است که اگر c و k عملگرهای بستار و هسته‌ای دلخواهی از $\mathcal{P}(Z)$ به $\mathcal{P}(Z)$ باشند، آنگاه ck و kc عملگرهای تصویری هستند.

اکنون نشان می‌دهیم که قضیه معروف بستار–متمم کوراتوسکی در فضاهای پوششی نیز برقرار می‌باشد.

نتیجه ۸.۲. عملگر بستار دلخواه c و عملگر متمم

$$a\big(A \mapsto (Z \setminus A)\big) : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$$

را در نظر بگیرید. در این‌صورت حداکثر ۱۴ مجموعه متمایز از مجموعه دلخواه A در فضای پوشش Z با اعمال ترکیب‌های مکرر از عملگرهای c و a روی A تولید می‌شود.

اثبات. واضح است که دو ترکیب kc و ck از عملگر بستار c و عملگر هسته‌ای متناظر با آن (یعنی $k := aca$)، عملگرهای تصویری می‌باشند. به عبارتی دیگر،

$$cacacaca = (ck)^۲ = ck = caca.$$

همچنین با ترکیب عملگر a به طرفین و این‌که $a^۲ = ۱$، عبارت $cacacac = cac$ به‌دست می‌آید. اکنون به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که با اعمال ترکیب‌های مکرر از عملگرهای c و a حداکثر ۱۴ عملگر متمایز، که در شکل ۱ نشان داده شده است، تولید می‌شود. □

یادآوری می‌کنیم که تناظر یک‌به‌یک بین مشبکه‌های کامل در $\mathcal{P}(Z)$ و عملگرهای بستار روی $\mathcal{P}(Z)$ وجود دارد [۱۹]. در واقع، برای هر عملگر بستار $c : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z)$ مجموعه همه نقاط ثابت c،

$$Fix(c) = \mathcal{L}_c = \{X \mid X \subseteq Z, c(X) = X\}$$

مشبکه کامل است که رَسَد و وِست آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bigvee X_j = c(\bigcup X_j), \qquad \bigwedge X_j = \bigcap X_j.$$

برعکس، اگر $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ مشبکه کامل باشد، آنگاه عملگر بستاری مانند $c_{\mathcal{L}} : \mathcal{P}(Z) \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $Y \subseteq Z$، داشته باشیم $c_{\mathcal{L}}(Y) := \bigwedge\{H \in \mathcal{L} \mid Y \leq H\}$.

نتیجه ۹.۲. مجموعه همه نقاط ثابت عملگرهای تقریب پوششی $\overline{\overline{G}}, \underline{G}\overline{G} = (.)^{\perp\perp}, (.)^{\perp'\perp'}$ مشبکه‌های کامل هستند.

اثبات. طبق گزاره ۷.۲ و مطالب قبلی، اثبات سرراست است. □

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی باشد. پوشش G متعدی است اگر و فقط اگر برای عناصر $f_1, f_2 \in G$، گزاره های $\{x, y\} \subseteq f_1$ و $\{y, z\} \subseteq f_2$ نتیجه دهد عنصری مانند $f_3 \in G$ موجود است که $\{x, z\} \subseteq f_3$.

قضیه ۱۱.۲. [۱۵] فرض کنید $(Z, \perp)$ فضای تعامد باشد. در این‌صورت شرایط زیر با هم معادلند:

(۱) $\xi(Z, \perp) := \{A \subseteq Z : A = A^{\perp\perp}\}$ مشبکه ارتومدولار کامل است.

(۲) اگر $A = A^{\perp\perp}$ و D زیر مجموعه متعامد ماکسیمال از A باشد، آنگاه $D^{\perp\perp} = A$.

گزاره ۱۲.۲. فرض کنید (Z, G) فضای تقریب پوششی متعدی باشد. در این‌صورت،

$$Fix(\perp\perp) = \xi(Z, \perp) = \{A \subseteq Z : A = A^{\perp\perp}\}$$

مشبکه ارتومدولار کامل است.

اثبات. فرض کنید $A = A^{\perp\perp}$ و D زیر مجموعه متعامد ماکسیمال از A باشد. کافی است نشان دهیم که

$$\underline{\underline{G}}\overline{G}(D) = D^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} = \underline{\underline{G}}\overline{G}(A).$$

از این‌که $D \subseteq A$ و عملگرهای تقریب یکنوا هستند، داریم:

$$\underline{\underline{G}}\overline{G}(D) \subseteq \underline{\underline{G}}\overline{G}(A).$$

فرض کنید $z \in \underline{\underline{G}}\overline{G}(A)$. بنابراین برای هر $f \in \beta(z)$، داریم $f \subseteq \overline{G}(A)$. همچنین اگر $x \in f$ ، آنگاه عنصری مانند $y \in A$ و $f_1 \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{x, y\} \subseteq f_1$. ماکسیمال بودن D نتیجه می‌دهد که عناصر $d \in D$ و $f_2 \in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $\{y, d\} \subseteq f_2$. از این‌رو طبق خاصیت تعدی، $f_3 \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{x, d\} \subseteq f_3$. بنابراین، برای هر $x \in f$ نتیجه می‌شود $x \in \overline{G}(D)$؛ به عبارت دیگر، برای هر $f \in \beta(z)$، نتیجه می‌شود $f \subseteq \overline{G}(D)$. لذا $z \in \underline{\underline{G}}\overline{G}(D)$. اکنون به‌کارگیری قضیه ۱۱.۲ و نتیجه ۹.۲ اثبات را کامل می‌کند. □

ملاحظه ۱۳.۲. عملگرهای تقریب $\underline{G}$، $\underline{\underline{G}}$، $\overline{\overline{G}}$، $\overline{G}, (.)^{\perp'}$ و ترکیب‌های آن‌ها، عملگرهای پایه‌ای در ساختارهای مختلف ریاضی هستند. همچنین زمانی که پوشش G افرازی از مجموعه Z باشد، این عملگرها همان عملگرهای تقریب بالایی و پایینی مطرح شده توسط پاولاک در منابع [۲۰-۲۲] هستند و در این حالت، $\underline{G} = \underline{\underline{G}}$ و $\overline{G} = \overline{\overline{G}}$.

در نظریه علّیت، تلاش می‌شود تا با مرتبط کردن رویدادهای مشاهده شده (پیامدها) به رویدادهای دیگر (علّت‌ها) و توضیح مکانیسم پشت این روابط به مشاهدات، معنا بخشیده شود. معمولاً، مدل‌بندی این نظریه در بستر ریاضیات، توسط مجموعه‌های جزئاً مرتب صورت می‌گیرد. سگلا و همکارانش در [۸] یک ساختار علّی، برای معرفی منطق علّی، مطرح کرده‌اند که با توجه به مطالب این بخش، می‌توان نتیجه گرفت که این ساختار علّی به‌عنوان نمونه‌ای از فضای تقریب پوششی، قابل توجه و بررسی است و ما در ملاحظه ۱۴.۲ این ساختار را معرفی می‌کنیم.

ملاحظه ۱۴.۲. فرض کنید $X \times \mathbb{R}$ حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و فضای توپولوژی X، نگاشت p تصویر متعارف $X \times \mathbb{R}$ به‌روی مجموعه $\mathbb{R}$، و G مجموعه ای از نگاشت های پیوسته ای همچون $f : D_f \longrightarrow X$ از D_f یک زیر مجموعه همبند $\mathbb{R}$ به مجموعه X باشد. (خاطر نشان می‌شود که در این‌جا، گاهی نمودار نگاشت f به جای خود آن نگاشت در نظر گرفته می‌شود). به ازای مجموعه‌ی $Z = \bigcup_{f \in G}\{(t, f(t)) : t \in D_f\}$ دو فضای $(Z, \leq)_G$ و $(Z, \perp)_G$، تولید شده توسط G به‌صورت زیر قابل تعریف است:

۱) به ازای هر دو عنصر $x, y \in Z$ رابطه ی $x \leq y$ برقرار است اگر و فقط اگر عنصر $f \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که $\{x, y\} \subseteq f$ و $p(x) \leq p(y)$.

۲) به ازای هر دو عنصر $x, y \in Z$ رابطه ی $x \perp y$ برقرار است اگر و فقط اگر $(x \nleq y) \wedge (y \nleq x)$ اگر و فقط اگر عنصری همچون $f \in G$ موجود نباشد به‌طوری‌که $\{x, y\} \subseteq f$.

دوتایی مرتب (Z, G) را ساختار علّی، $(Z, \leq)_G$ را مجموعه مرتب علّی و هر عنصر $f \in G$ را یک خم علّی می‌نامند. هر ساختار علّی (Z, G) مثالی از یک فضای تقریب پوششی می‌باشد.

۳ مشبکه‌های ارتومدولار کامل در ساختار علّی فضا–زمان

ساختار علّی روی فضای توپولوژی $\mathbb{R} \times X$ ، در ملاحظه‌ی ۱۴.۲ توصیف شده است. هر فضا–زمان را می‌توان یک مجموعه مجهز به ساختار علّی در نظر گرفت؛ که به عنوان یک مدل ریاضیاتی، برخی از نظریه‌های مهم فیزیک مدرن، همچون نسبیت عام در آن پایه‌ریزی می‌گردد. یکی از عمده‌ترین مسائل در نظریه نسبیت بررسی تأثیر یک رویداد در فضا–زمان روی رویدادی دیگر از آن می‌باشد که تحت عنوان علّیت به آن پرداخته می‌شود. بحث در مورد علّیت در فیزیک نیوتنی به دلیل مطلق بودن زمان، مسأله‌ای سرراست است. از بین دو واقعه غیر هم‌زمان که بر یکدیگر اثر می‌گذارند، رویداد علّت، آن است که زودتر واقع شده باشد. اما در نظریه نسبیت، پاسخ به این پرسش کمی پیچیده‌تر است. دو رویداد p و q در فضا–زمان بر یکدیگر اثر می‌گذارند، اگر بتوان این دو رویداد را توسط یک خم که حرکت روی آن با سرعت کمتر یا مساوی سرعت نور میسر باشد (یک خم علّی)، به یکدیگر متصل کرد. خم های علّی، به‌عنوان ابزار تشخیص روابط علّی میان نقاط فضا–زمان در بحث علّیت نقشی اساسی ایفا می‌کنند. از این‌رو، برای مطالعه ساختار علّی فضا–زمان می‌توان مجموعه خم های علّی فضا–زمان و یا زیرمجموعه‌های خاصی از آن را بررسی کرد و ساختارهای مختلف هندسی را به آن نسبت داد. برای توصیف ساختار علّی فضا–زمان، به‌صورت خاص، مرور تعاریف اولیه در این زمینه می‌تواند مفید باشد. برای جزئیات بیشتر منابع [۱۸، ۲۳] را بنگرید.
منظور از فضا–زمان، دوتایی (M, g) است که در شرایط سه‌گانه ی زیر صادق باشد:

۱) M خمینه هموار $n-$ بعدی است.
خمینه در اصل، گسترش مفهوم خم و رویه در فضای $\mathbb{R}^3$ است و به‌طور دقیق‌تر، خمینه هموار $n-$ بعدی یک فضای توپولوژی است که موضعاً با زیرمجموعه های بازی از $\mathbb{R}^n$ همسان‌ریخت است و می‌توان روی آن نگاشت هموار تعریف کرد؛

۲) با فرض آن که $T_p(M)$ فضای مماس بر M در نقطه ی p باشد، g متر لورنتسی است که به شرح زیر، به هر نقطه $p \in M$ ضرب اسکالر g_p را نسبت می‌دهد: $g_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک ضرب اسکالر (یک نگاشت دوخطی متقارن و ناتباهیده) روی $T_p(M)$ است که شاخص آن برابر با $n - 2$ می‌باشد؛ به این معنی که یک پایه‌ی متعامد یکّه $\{e_1, \dots, e_n\}$ برای $T_p(M)$ موجود است و در شرط زیر صدق می‌کند:

$$g_p(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \epsilon_i & i = j \end{cases}$$

که در آن $\epsilon_i = \pm 1, (i = 1, \dots, n)$ و تفاضل تعداد مؤلفه‌های منفی و مثبت در $n-$ تایی $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ برابر با $n - 2$ است.

۳) M جهت‌پذیر زمانی است؛ یعنی میدان برداری هموار X بر خمینه M یافت می‌شود به طوری‌که به ازای هر $p \in M$ داشته باشیم $g_p(X_p, X_p) > 0$.

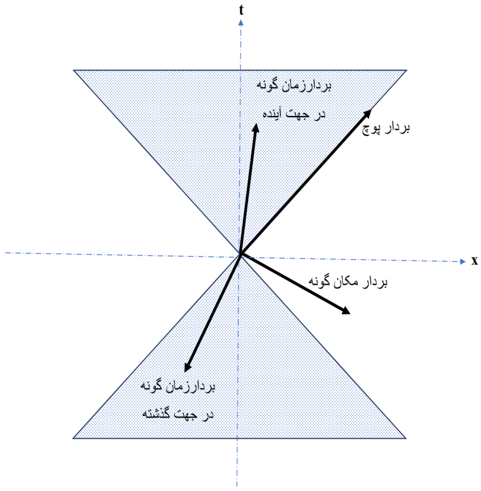
تعریف ۱.۳. فرض کنید (M, g) فضا–زمان دلخواه باشد. بردار مماس $v \in T_pM$ را

- بردار زمان‌گونه می‌نامند، هرگاه $g_p(v, v) > 0$؛
- بردار علّی می‌نامند، هرگاه $g_p(v, v) \geq 0$؛
- بردار پوچ (یا نورگونه) می‌نامند، هرگاه $g_p(v, v) = 0$؛
- بردار مکان‌گونه می‌نامند، هرگاه $g_p(v, v) < 0$.

تعریف ۲.۳. فرض کنید (M, g) فضا–زمان دلخواه و X میدان برداری زمان‌گونه روی M باشد (یعنی، به ازای هر $p \in M$ ، بردار X_p زمان‌گونه باشد). بردار مماس $v \in T_pM$ را

- بردار در جهت–آینده می‌نامند، اگر $g(X(p), \nu) > 0$؛
- بردار در جهت–گذشته می‌نامند، اگر $g(X(p), \nu) < 0$.

تعریف ۳.۳. خم هموار $\gamma : I \to M$ را خم زمان‌گونه و در جهت–آینده می‌نامند در صورتی که برای هر $t \in I$ بردار مماس $\gamma'(t)$ بردار زمان‌گونه و در جهت–آینده باشد. خم علّی، مکان‌گونه و پوچ در جهت–آینده (یا در جهت–گذشته) نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود.



شکل ۲: فضای مماس بر فضا-زمان مینکوفسکی ۲- بعدی در مبدأ مختصات: بردارهایی با ابتدای مبدأ مختصات که انتهای آن‌ها نقطه‌ای درون ناحیه‌ی هاشورخورده است، بردارهای زمان‌گونه‌اند و بردارهایی که از مبدأ به نقاط مرزی ناحیه‌ی هاشورخورده و نقاط بیرونی این ناحیه منتهی می‌شوند به ترتیب بردارهای پوچ و مکان‌گونه هستند.

مثال **۴.۳**. فضا-زمان $(\mathbb{M}=\mathbb{R}^n,\eta)$ را فضا-زمان مینکوفسکی $n-$ بعدی ($n\geqslant ۲$) می‌نامند؛ که در آن برای دو بردار مماس $X_p=(X_۱,\dots,X_n)$ و $Y_p=(Y_۱,\dots,Y_n)$، ضرب اسکالر $\eta_p:T_p(M)\times T_p(M)\longrightarrow\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\eta_p(X(p),Y(p))=X_۱(p)Y_۱(p)-\sum_{i=۲}^{n}X_i(p)Y_i(p).$$

به‌طور خاص، با در نظر گرفتن فضا-زمان مینکوفسکی ۲- بعدی و این‌که فضای مماس خمینه $\mathbb{R}^۲$ در هر نقطه را می‌توان همان فضای برداری $\mathbb{R}^۲$ در نظر گرفت، میدان برداری ثابت $X_p=(۱,۰)$ یک میدان برداری سرتاسری زمان‌گونه است که جهت زمان توسط آن تعیین می‌شود. نمونه هایی از بردارهای پوچ، زمان‌گونه و مکان‌گونه در این فضا-زمان در شکل ۲ مشخص شده است.

اکنون، به مفهوم آینده و گذشته‌ی علّی یک رویداد در فضا-زمان و تعریف دو رابطه‌ی علّی $\ll$ و $\prec$ روی فضا-زمان می‌پردازیم.

تعریف **۵.۳**. فرض کنید (M,g) فضا-زمان دلخواه و $p,q\in M$. اگر خم هموار زمان‌گونه و در جهت-آینده $\gamma:[۰,۱]\to M$ وجود داشته باشد که $\gamma(۰)=p$ و $\gamma(۱)=q$، آنگاه می‌گوییم q در آینده با ترتیب وقوع p قرار دارد و می‌نویسیم: $p\ll q$. مجموعه همه نقاط در آینده با ترتیب وقوع رویداد p را با نماد $I^+(p)$ نشان می‌دهیم. همچنین، اگر خم γ علّی و در جهت-آینده باشد، می‌گوییم q در آینده علّی رویداد p قرار دارد و می‌نویسیم: $p\prec q$. مجموعه همه نقاط در آینده علّی p را با نماد $J^+(p)$ نشان می‌دهیم. علاوه بر این، مجموعه $I^-(p)$ (مجموعه همه نقاط در گذشته با ترتیب وقوع p) و مجموعه $J^-(p)$ (مجموعه همه نقاط درگذشته علّی p)، با فرض در جهت-گذشته بودن خم γ، به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

مفاهیم مجموعه زمان‌گونه در جهت-آینده و آینده علّی یک نقطه را می‌توان برای هر زیرمجموعه دلخواه $A\subseteq M$ نیز تعمیم داد.

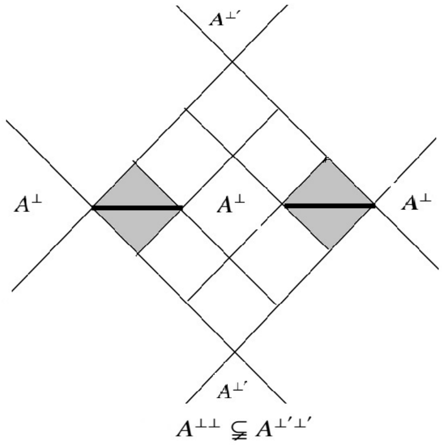
تعریف **۶.۳**. فرض کنید (M,g) فضا-زمان و A یک زیرمجموعه دلخواه از M باشد. مجموعه $I^+(A)$ آینده زمان‌گونه A نامیده می‌شود و برابر مجموعه همه نقاطی مانند q از M است که یک خم زمان‌گونه در جهت-آینده از یکی از نقاط A به نقطه q وجود دارد. مجموعه‌های آینده علّی، گذشته زمان‌گونه و گذشته علّی A، به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. به عبارتی دیگر آینده زمان‌گونه مجموعه A به‌صورت

$$I^+(A)=\bigcup_{p\in A}I^+(p),\quad J^+(A)=\bigcup_{p\in A}J^+(p);$$

و گذشته زمان‌گونه و گذشته علّی مجموعه A به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$I^-(A)=\bigcup_{p\in A}I^-(p),\quad J^-(A)=\bigcup_{p\in A}J^-(p).$$

مدل‌های مختلف فضا-زمان بر اساس روابط علّی میان نقاطشان به دسته‌های متعددی تقسیم‌بندی می‌شوند که در اینجا، به معرفی فضا-زمان‌های علّی و فضا-زمان هذلولوی سرتاسری می‌پردازیم.



شکل ۳: بزرگترین لوزی برابر با $(A)^{\perp'\perp'}$ و ناحیه خاکستری برابر با $(A)^{\perp\perp}$ خواهد شد، اگر مجموعه A اجتماع دو پاره خط تیره در نظر گرفته شود .

تعریف ۷.۳. فضا–زمان (M,g) را فضا–زمان علّی می‌نامند؛ هرگاه به ازای هر $p \in M$ داشته باشیم $p \notin J^+(p)$ و یا به‌طور معادل، M شامل هیچ منحنی علّی بسته‌ای نباشد.

تعریف ۸.۳. فضا–زمان (M,g) را فضا–زمان هذلولوی سرتاسری می‌نامند؛ هرگاه به ازای هر $p,q \in M$ داشته باشیم $p \notin I^+(p)$ و علاوه براین، مجموعه $J^+(p) \cap J^-(q)$ زیرمجموعه فشرده ای از M باشد.

هر فضا–زمان هذلولوی سرتاسری n-بعدی M قابل تجزیه به صورت $M = \mathbb{R} \times X$، حاصلضرب دکارتی $\mathbb{R}$ و یک خمینه $n-۱$-بعدی X می‌باشد [۲] ؛ و از این رو مشابه آنچه در ملاحظه ۱۴.۲ توصیف شده است می‌توان ساختار علّی روی فضا–زمان هذلولوی سرتاسری M را به‌صورت (Z,G) در نظر گرفت؛ که در آن، G برابر $\mathcal{C}(M)$ مجموعه همه خم‌های علّی در فضا–زمان M و $Z = \bigcup_{f \in G} f$. در اینجا این مطلب قابل توجه است که از هر نقطه در فضا–زمان M یک خم علّی می‌گذرد و بنابراین، در مطالعه ساختار علّی فضا–زمان، Z برابر M است.

سگلا و جادچک در [۱۰] و کاسینی در [۵] نشان دادند که در نظریه نسبیت خاص اینشتین، ساختار ارتومدولار بر اساس منطق تجربی راندال و فولیس ظاهر می‌شود (برای اطلاع بیشتر در مورد این منطق، منبع [۱۶] را بنگرید). سپس با تعمیم آن، نشان دادند که برای هر فضا–زمان به فرم $M = \mathbb{R} \times X$ مجموعه همه نقاط ثابت عملگر بستار $(.)^{\perp\perp}$، یعنی، $\xi(Z,\perp) = \{A \subseteq Z : A = A^{\perp\perp}\}$ با دو عملگر $\wedge$ و $\vee$ مشبکه ارتومدولار کامل می‌باشد ($A \wedge B = A \cap B$ و $A \vee B = (A \cup B)^{\perp\perp}$) و آن را منطق علّی فضا–زمان نامیدند.

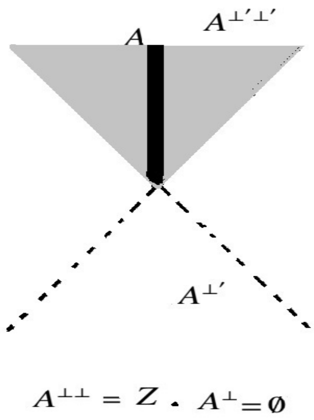
از آنجا که ساختار علّی (Z,G) مثالی از فضای تقریب پوششی است، بنابراین همه عملگر های معرفی شده در بخش قبل و نتایج مربوط به آن‌ها در ساختار علّی فضا–زمان های هذلولوی سرتاسری نیز معتبر است. در اینجا تعابیر مربوط به عملگر های $\perp$ و $\perp'$ و مشبکه‌های حاصل از عملگر های بستار $\perp\perp$ و $\perp'\perp'$ را در ساختار علّی فضا–زمان مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا، برای هر $A \subseteq M$ تساوی‌های زیر برقرارند:

$$A^{\perp} = M \setminus (J^+(A) \cup J^-(A)), \quad A^{\perp'} = (\bigcap_{x \in A} (J^+(x) \cup J^-(x))) \setminus A.$$

سوال طبیعی‌ای که بی‌درنگ مطرح می‌شود این است: "چه ارتباطی بین مجموعه نقاط ثابت عملگرهای بستار $(.)^{\perp\perp}$ و $(.)^{\perp'\perp'}$ وجود دارد؟" در ادامه به این مساله نیز پاسخ داده می‌شود. شکل‌های ۳ و ۴، نشان می‌دهند که این عملگرها (به عنوان مثال، در فضا–زمان مینکوفسکی) برابر نیستند. فرض کنید J مجموعه‌ای باشد که به‌صورت زیر معرفی شده است:

$$J = \{J^+(p) \mid p \in M\} \cup \{J^+(p) \setminus \{p\} \mid p \in M\} \cup \{J^-(q) \setminus \{q\} \mid q \in M\} \cup \{J^-(q) \mid q \in M\} \cup \{M, \emptyset\}. \tag{۱.۳}$$

ترتیب علّی $\prec$ روی M ترتیبی با همین علامت را روی J به صورت زیر القا می‌کند:
برای هر $A,B \in J$، رابطه $A \prec B$ برقرار است اگر و فقط اگر برای هر $p \in A$ و $q \in B$ در M ، رابطه $p \prec q$ برقرار باشد. منظور از یک زنجیر در J، زیر مجموعه مانند $L \subseteq J$ است به‌طوری‌که هر دو عنصر آن با هم قابل مقایسه هستند (یعنی، اگر $A,B \in L$، آنگاه $A \prec B$ یا $B \prec A$).



شکل ۴: اگر خط تیره را A در نظر بگیریم، ناحیه خاکستری برابر $(A)^{\perp'\perp'}$ است .

تعریف **۹.۳**. فرض کنید $(\mathcal{J}, \prec)$ مجموعه مرتب باشد. زنجیر L از $\mathcal{J}$ را زنجیر گسسته می‌نامیم، اگر برای هر دو عضو A, B از L که $A \prec B$، عضوی مانند F از $\mathcal{J} \setminus L$ موجود باشد به‌طوری که $A \prec F \prec B$.

با در نظر گرفتن مجموعه مرتب $(J, \prec)$ در عبارت ۱.۳ ، مجموعه $\tilde{J}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{J} = \left\{ \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \;\middle|\; \text{خانواده‌ای از عناصر } J \text{ است } \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \right\}. \tag{۲.۳}$$

در واقع، مجموعه مرتب $(\tilde{J}, \prec)$ متشکل از عناصری است که هر یک از آن‌ها اشتراک دلخواهی از عناصر J می باشد و برای هر $A, B \in \tilde{J}$، رابطه $A \prec B$ برقرار است اگر و فقط اگر برای هر $p \in A$ و $q \in B$ در M ، رابطه $p \prec q$ برقرار باشد.
اکنون با استفاده از $\tilde{J}$ ، آماده‌ایم که عناصر مجموعه $\xi(Z, \perp') = \{A \subseteq Z : A = A^{\perp'\perp'}\}$ را در گزاره بعدی مشخص کنیم:

گزاره **۱۰.۳**. فرض کنید (M, g) فضا–زمان علّی باشد و $(Z, G) = (M, \mathcal{C}(M))$. آنگاه گزاره های زیر برقرارند:

الف) مشبکه $\xi(Z, \perp')$ مشبکه اتمی کامل است و عناصر آن به‌صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\xi(Z, \perp') = \left\{ \bigcup_{B \in L} B \;\middle|\; \text{زنجیر گسسته‌ای از } \tilde{J} \text{ است } L \right\};$$

که در آن منظور از $\tilde{J}$ همان مجموعه مرتب $(\tilde{J}, \prec)$ در عبارت ۲.۳ است.

ب) در صورتی که (M, g) فضا–زمان هذلولوی سرتاسری باشد، مشبکه اتمی کامل $\xi(Z, \perp')$، ارتومدولار است اگر و تنها اگر برای هر دو رویداد p و q در M که با یکدیگر رابطه علّی ندارند، مجموعه $J^{\pm}(p) \cap J^{\pm}(q)$ تهی باشد و یا این مجموعه برابر با $J^{\pm}(r)$ باشد که در آن، r تنها عضو مجموعه $E^{\pm}(p) \cap E^{\pm}(q)$ است و $E^{\pm}(p) := J^{\pm}(p) \setminus I^{\pm}(p)$.

اثبات. برهان (الف): از نتیجه ۹.۲ می‌دانیم که $(.)^{\perp'\perp'}$ عملگر بستار است و مجموعه همه عناصر ثابت آن $\xi(Z, \perp')$ مشبکه کامل است. ازطرفی چون برای هر $p \in Z$ داریم:

$$\{p\}^{\perp'} = (J^+(p) \cup J^-(p)) \setminus \{p\}$$

و

$$((J^+(p) \cup J^-(p)) \setminus \{p\})^{\perp'} = \{p\}.$$

بنابراین، $\{p\}^{\perp'\perp'} = \{p\} \in \xi(Z, \perp')$ و مجموعه‌های تک‌عضوی اتم‌های این مشبکه هستند.
اکنون با طرح و اثبات سه ادعای زیر، همه عناصر $\xi(Z, \perp')$ را مشخص می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر عضو این مجموعه به صورت اجتماع عناصر یک زنجیر گسسته در $\tilde{J}$ است.

ادعای ۱: مجموعه $\tilde{J}$ زیر مجموعه $\xi(Z,\perp')$ می‌باشد.
برای اثبات این ادعا، به‌راحتی می‌توان عبارات زیر را از تعریف عملگر $\perp'$، نتیجه گرفت:

$$(Z)^{\perp'} = \emptyset. \tag{۳.۳}$$

$$(\emptyset)^{\perp'} = Z. \tag{۴.۳}$$

$$(J^{\pm}(p))^{\perp'} = J^{\mp}(p) \setminus \{p\}. \tag{۵.۳}$$

$$(J^{\pm}(p) \setminus \{p\})^{\perp'} = J^{\mp}(p). \tag{۶.۳}$$

گزاره‌های ۳.۳ و ۴.۳ نتیجه می‌دهند:

$$(Z)^{\perp'\perp'} = Z \text{ و } (\emptyset)^{\perp'\perp'} = \emptyset.$$

همچنین طبق گزاره‌های ۵.۳ و ۶.۳، برای هر $p \in Z$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$(J^{\pm}(p))^{\perp'\perp'} = J^{\pm}(p) \text{ و } (J^{\pm}(p) \setminus \{p\})^{\perp'\perp'} = J^{\pm}(p) \setminus \{p\}.$$

بنابراین، $J \subseteq \xi(Z,\perp')$. از این‌که مشبکه $\xi(Z,\perp')$ نسبت به اشتراک دلخواه بسته می‌باشد، گزاره $\tilde{J} \subseteq \xi(Z,\perp')$ فوراً نتیجه می‌شود.

ادعای ۲: اگر مجموعه A نمودار خم علّی پیوسته ای در Z از p به q همراه با نقاط انتهایی‌اش باشد، آنگاه $A^{\perp'\perp'} = J^{+}(p) \cap J^{-}(q)$.
درستی این ادعا نتیجه مستقیم تساوی $A^{\perp'} = J^{-}(p) \cup J^{+}(q)$، و عبارات ۵.۳ و ۶.۳ است. نتیجه فوری از ادعای ۲ این است که اگر A شامل خم علّی پیوسته از p تا q همراه با نقاط انتهایی‌اش باشد، آنگاه $A^{\perp'\perp'}$ شامل $J^{+}(p) \cap J^{-}(q)$ است. اکنون فرض کنید که $A \in \xi(Z,\perp')$. در این صورت رابطه هم‌ارزی زیر را برای هر $p, q \in A$ تعریف می‌کنیم:

$$p \sim q \iff ((J^{+}(p) \cap J^{-}(q)) \cup (J^{+}(q) \cap J^{-}(p))) \cap A^{\perp'} = \emptyset.$$

طبق تساوی زیر، هریک از کلاس های هم‌ارزی این رابطه عضو $\tilde{J}$ می‌باشند:

$$[p] = \Big(\bigcap_{z \in A^{\perp}, z \prec p} J^{+}(z)\Big) \cap \Big(\bigcap_{w \in A^{\perp}, p \prec w} J^{-}(w)\Big), \ p \in A.$$

در اینجا نشان می‌دهیم مجموعه A به عنوان اجتماع مجزا از کلاس های این رابطه هم‌ارزی، یک زنجیر گسسته در $\tilde{J}$ است. فرض کنید $[p]$ و $[q]$ دو کلاس مجزا باشند. برای زنجیر بودن، باید رابطه $[q] \prec [p]$ یا رابطه $[p] \prec [q]$ برقرار باشد. طبق تعریف رابطه هم‌ارزی چون $p \not\sim q$ بنابراین:

$$((J^{+}(p) \cap J^{-}(q)) \cup (J^{+}(q) \cap J^{-}(p))) \cap A^{\perp'} \neq \emptyset.$$

در نتیجه عنصری مانند s در $A^{\perp'}$ وجود دارد که $s \in (J^{+}(p) \cap J^{-}(q))$ یا $s \in (J^{+}(q) \cap J^{-}(p))$ و بنابراین، رابطه $[q] \prec \{s\} \prec [p]$ یا رابطه $[p] \prec \{s\} \prec [q]$ برقرار است؛ که در هرصورت نشان می‌دهد عناصر دو کلاس هم‌ارزی با هم در رابطه علّی می‌باشند و A زنجیر است. همچنین، از این‌که $A \cap A^{\perp'} = \emptyset$ و مشبکه اتمی است و $s \notin A$ نتیجه می‌گیریم این زنجیر گسسته است. به عبارت دیگر

$$\xi(Z,\perp') = \left\{ \bigcup_{B \in L} B \;\middle|\; \text{است } \tilde{J} \text{ زنجیر گسسته از } L \right\}.$$

برهان (ب): فرض کنید فضا–زمان (M,g) هذلولوی سرتاسری باشد. ابتدا، ادعای ۳ را که به تشخیص ارتومدولار بودن یا نبودن $\xi(Z,\perp')$ کمک می‌کند، اثبات می‌کنیم.
ادعای ۳: برای دو رویداد p و q در M که با یکدیگر رابطه علّی ندارند، تساوی زیر برقرار است:

$$J^{\pm}(p) \cap J^{\pm}(q) = \bigcup_{r \in E^{\pm}(p) \cap E^{\pm}(q)} J^{\pm}(r). \tag{۷.۳}$$

با توجه به تعاریف، به وضوح داریم:

$$J^{\pm}(p) \cap J^{\pm}(q) \supseteq \bigcup_{r \in E^{\pm}(p) \cap E^{\pm}(q)} J^{\pm}(r);$$

برای اثبات عکس شمول، اگر $J^{\pm}(p)\cap J^{\pm}(q)=\emptyset$ آنگاه $E^{\pm}(p)\cap E^{\pm}(q)=\emptyset$ و از این‌رو تساوی حکم برقرار است.
اکنون فرض کنید $x\in J^{\pm}(p)\cap J^{\pm}(q)\neq\emptyset$. چهار حالت وجود دارد که در هر حالت عنصر r متعلق به $E^{\pm}(p)\cap E^{\pm}(q)$ را می‌یابیم که $x\in J^{\pm}(r)$. حالت ۱: $x\notin E^{\pm}(p)$ و $x\notin E^{\pm}(q)$. در این حالت $x\in I^{\pm}(p)\cap I^{\pm}(q)$. چون $x\in I^{\pm}(q)$، حداقل یک خم زمان‌گونه مانند γ_1 از q به x در صورت در نظر گرفتن $x\in I^{+}(q)$ (از x به q در صورت درنظر گرفتن $x\in I^{-}(q)$) وجود دارد. چون p و q با یکدیگر رابطه علّی ندارند، از این‌رو خم γ_1 مجموعه $E^{\pm}(p)$ را طبق [۲۷، لم ۳] در نقطه‌ای مانند z قطع می‌کند (شرایط لم برای نقاط x و q و $I^{+}(p)$ برقرار است). چون $J^{\pm}(p)$ بسته است، پس $z\in J^{\pm}(p)$ و بنابراین خم علّی دیگری مانند γ_2 از p به z وجود دارد. با به کارگیری مجدد لم مذکور برای نقاط p و z و $I^{+}(q)$، خم γ_2 در نقطه‌ای مانند r مجموعه $E^{\pm}(q)$ را قطع می‌کند. بنابراین $r\prec z\prec x$ و در نتیجه $x\in J^{\pm}(r)$. حالت ۲: $x\in E^{\pm}(p)$ و $x\notin E^{\pm}(q)$. در این حالت $x\in I^{\pm}(q)$ و اثبات مشابه حالت ۱ می باشد. چون در قسمت ابتدایی اثبات وجود نقطه ای مانند z در $E^{\pm}(p)$ را بررسی کردیم، از این‌رو در این حالت کافیست $x:=z$ را در نظر بگیریم و لم مذکور را برای نقاط p و z و $I^{+}(q)$ بکار بگیریم . در نتیجه، نقطه‌ای مانند r در مجموعه $E^{\pm}(q)$ وجود دارد که $x\in J^{\pm}(r)$.
حالت ۳: $x\in E^{\pm}(q)$ و $x\notin E^{\pm}(p)$. در این حالت $x\in I^{\pm}(p)$. اثبات مشابه حالت ۲ می باشد.
حالت ۴: $x\in E^{\pm}(q)$ و $x\in E^{\pm}(p)$. در این حالت $x\in E^{\pm}(p)\cap E^{\pm}(p)$ کافیست $r:=x$ را در نظر بگیریم. بنابراین فوراً عبارت $x\in J^{\pm}(r)$ نتیجه می‌شود و برهان ادعای ۳ کامل است.

برای نشان دادن درستی گزاره (ب)، ابتدا فرض کنید $\xi(Z,\perp')$ ارتومدولار است و اثبات را با برهان خلف پیش می‌بریم. بنابر فرض خلف، نقاطی همچون p و q در M موجودند که با یکدیگر رابطه علّی ندارند و مجموعه $E^{\pm}(p)\cap E^{\pm}(q)$ دارای بیش از یک عضو است. در این‌صورت، بنابر ادعای ۳، نقاطی همچون r_1 و r_2 عضو $E^{\pm}(p)\cap E^{\pm}(q)$ موجودند که

$$A:=J^{\pm}(p)\cap J^{\pm}(q)=J^{\pm}(r_1)\cup B;$$

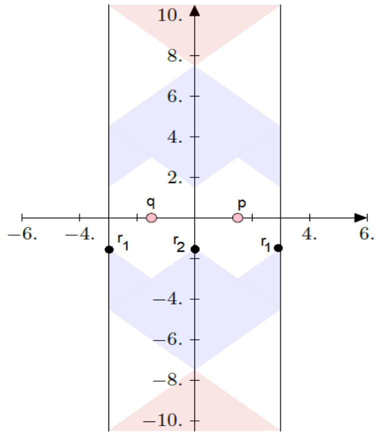
و $J^{\pm}(r_2)\subseteq B$. از طرفی، هر منحنی علّی ماکزیمال D، با نقطه انتهایی r_1 در A متعامد ماکزیمال است؛ پس طبق قضیه ۱۱.۲ باید داشته باشیم $D^{\perp'\perp'}=A^{\perp'\perp'}$ ولی ادعای ۱ نشان می‌دهد که $D^{\perp'}=J^{\pm}(r_1)\setminus\{r_1\}$ و $D^{\perp'\perp'}=J^{\pm}(r_1)\neq A$. پس $\xi(Z,\perp')$ مشبکه ای ارتومدولار نیست و فرض خلف باطل است. (به‌عنوان مثال، در فضا-زمان هذلولوی سرتاسری توصیف شده در شکل ۵ ، مجموعه $A:=J^{-}(p)\cap J^{-}(q)$ برابر است با $J^{-}(r_1)\cup J^{-}(r_2)$ و مشبکه $\xi(Z,\perp')$ ارتومدولار نیست).
برای اثبات طرف دیگر (ب)، فرض کنید برای هر دو رویداد p و q در M که با یکدیگر رابطه علّی ندارند، مجموعه $J^{\pm}(p)\cap J^{\pm}(q)$ تهی باشد و یا برای r ، عضو مجموعه $E^{\pm}(p)\cap E^{\pm}(q)$ داشته باشیم $J^{\pm}(p)\cap J^{\pm}(q)=J^{\pm}(r)$.
ادعای ۴: برای هر زیر مجموعه ناتهی S از M، اگر $\bigcap_{z\in S}J^{\pm}(z)$ مجموعه‌ای ناتهی باشد، آنگاه عنصر یکتایی همچون r_S موجود است به‌طوری‌که $\bigcap_{z\in S}J^{\pm}(z)=J^{\pm}(r_S)$.
فرض کنید $A:=\bigcap_{z\in S}J^{\pm}(z)\ni x$ و $s\in S$. مجموعه A، به عنوان اشتراکی از زیرمجموعه‌های بسته، زیرمجموعه بسته‌ای از M است. بنابراین، $H_x:=A\cap(J^{\pm}(s)\cap J^{\mp}(x))$ مجموعه‌ای ناتهی و فشرده است. همچنین، فرض کنید D_x یک منحنی علّی ماکزیمال شامل x در A باشد؛ در این‌صورت، D_x در مجموعه فشرده H_x دارای یک نقطه ابتدایی است (دارای یک نقطه انتهایی است، در حالتی که $A:=\bigcap_{z\in S}J^{-}(z)$ را در نظر بگیریم) که آن را r_x می‌نامیم. اگر $A\neq J^{\pm}(r_x)$ ؛ آنگاه یک عضو y متعلق به $A\setminus J^{\pm}(r_x)$ موجود است. اکنون روند اثبات را، برای یافتن نقطه r_y (مانند مراحل یافتن نقطه r_x) تکرار می‌کنیم. دو نقطه ی r_x و r_y متعلق به A با یکدیگر رابطه علّی ندارند و بنابراین، طبق فرض، نقطه ای همچون r_0 موجود است؛ که $S\subseteq(J^{\mp}(r_x)\cap J^{\mp}(r_y))=J^{\mp}(r_0)$ و $r_0\in A$؛ که با ماکزیمال بودن منحنی‌های D_x و D_y در تناقض است. بنابراین، $A=J^{\pm}(r_x)$ و اثبات ادعای ۴ کامل است.
با استفاده از ادعای ۴، به‌راحتی می‌توان نشان داد که هر عنصر $\bar{J}$ برابر اشتراک دو عنصر از مجموعه J می‌باشد و برعکس. اکنون برای اثبات ارتومدولار بودن، از قضیه ۱۱.۲ استفاده می‌کنیم. فرض کنید D، زیرمجموعه متعامد ماکسیمال از A باشد و $A\in\xi(Z,\perp')$.
اگر $A=\emptyset$، آنگاه $D=\emptyset$ و $D^{\perp'\perp'}=\emptyset$ که نتیجه مطلوب است. بنابراین فرض کنید که $A\neq\emptyset$. خاصیت $\perp'$-تعامد D نتیجه می‌دهد که هر دو نقطه D با هم رابطه علّی دارند و ماکسیمال بودن آن نتیجه می‌دهد که خم علّی پیوسته و غیرقابل گسترش مانند $\gamma:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to M$ وجود دارد به‌طوری‌که $D\subseteq\gamma((a,b))$. قرار دهید $I:=\gamma^{-1}(D)$ آنگاه $I\subseteq(a,b)\subseteq\mathbb{R}$. طبق [۱۲، قضیه ۹]، هر مجموعه باز ناتهی I در $\mathbb{R}$ اجتماع حداکثر شمارا بازه‌های باز مجزا می‌باشند. بنابراین، $int(I)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ و لذا

$$I=\Big(\bigcup_{d\in I\setminus cl(int(I))}[d,d]\Big)\cup\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_{(a_i,b_i)}\Big).$$

جایی که

$$I_{(a_i,b_i)}\in\{(a_i,b_i),[a_i,b_i),(a_i,b_i],[a_i,b_i]\}$$

و $a_i,b_i\in\mathbb{R}$ برای هر $i=1,2,\dots$.



شکل ۵: فضا–زمان M یک استوانه، متشکل از فضای خارج قسمتی از یک نوار در فضای مینکوفسکی با یکی در نظرگرفتن نقاط هم ارتفاع از دو خط قائم، می‌باشد. مجموعه آبی رنگ A یک زنجیر گسسته و همچنین یک عضو از مشبکه $\xi(Z, \perp')$ و مجموعه قرمز رنگ $A^{\perp'}$ است. مجموعه A هیچ زیر مجموعه متعامد ماکسیمال مانند D ندارد که $D^{\perp'\perp'} = A$. از این‌رو، طبق قضیه ۱۱.۲، مشبکه $\xi(Z, \perp')$ در این فضا–زمان ارتومدولار نیست.

اکنون، اگر قراردهید $q_i = \gamma(, b_i))$ و $p_i = \gamma(, a_i))$، آنگاه می‌توان تصویر عملگر $(.)^{\perp'\perp'}$ را برای هر بازه همبند در $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر یافت:

۱) $(\gamma((a, b)))^{\perp'\perp'} = Z$.

۲) $(\gamma((a, b_i)))^{\perp'\perp'} = J^-(q_i) \setminus \{q_i\}$.

۳) $(\gamma((a, b_i]))^{\perp'\perp'} = J^-(q_i)$.

۴) $(\gamma((a_i, b)))^{\perp'\perp'} = J^+(p_i) \setminus \{p_i\}$.

۵) $(\gamma((a, b_i]))^{\perp'\perp'} = J^+(p_i)$.

۶) $(\gamma((a_i, b_i)))^{\perp'\perp'} = J^+(p_i) \cap J^-(q_i) \setminus \{p_i, q_i\}$.

۷) $(\gamma([a_i, b_i)))^{\perp'\perp'} = J^+(p_i) \cap J^-(q_i) \setminus \{q_i\}$.

۸) $(\gamma((a_i, b_i]))^{\perp'\perp'} = J^+(p_i) \cap J^-(q_i) \setminus \{p_i\}$.

۹) $(\gamma([a_i, b_i]))^{\perp'\perp'} = J^+(p_i) \cap J^-(q_i)$.

همچنین،

$$D = \Big(\bigcup_{d \in I \setminus cl(int(I))} \gamma([d, d]) \Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma(I_{(a_i, b_i)}) \Big)$$

و

$$D^{\perp'\perp'} = \Big(\bigcup_{d \in I \setminus cl(int(I))} (\gamma([d, d]))^{\perp'\perp'} \Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\gamma(I_{(a_i, b_i)}))^{\perp'\perp'} \Big) = A.$$

□

از گزاره ۱۰.۳، می‌توان نتیجه گرفت که $\xi(Z, \perp')$ برای فضا–زمان مینکوفسکی دوبعدی مشبکه ارتومدولار است؛ نتیجه زیر نشان می‌دهد که اشتراک دو مشبکه ارتومدولار $\xi(Z, \perp)$ و $\xi(Z, \perp')$ در حالتی که فضا–زمان مینکوفسکی دوبعدی باشد، یک مشبکه کامل اتمی است.

نتیجه ۱۱.۳. فرض کنید (M, g) فضا-زمان مینکوفسکی دوبعدی باشد. اگر $(Z, G) = (M, \mathcal{C}(M))$، آنگاه

$$\xi(Z, \perp) \cap \xi(Z, \perp') = \{J^+(p) \cap J^-(q) \mid p, q \in Z\} \cup \{Z, \emptyset\}.$$

اثبات. می‌دانیم که $(J^{\pm}(p))^{\perp} = Z$، پس برای هر $p \in Z$، $J^{\pm}(p) \notin \xi(Z, \perp)$. همچنین اگر A زنجیر گسسته باشد و $p, q \in A$ که $p \prec q$، آنگاه $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq A^{\perp\perp}$. بنابراین طبق گزاره ۱۰.۳، وقتی $A \in (\xi(Z, \perp) \cap \xi(Z, \perp'))$، زنجیر A حداکثر یک عنصر در J دارد. و تنها حالت ممکن $J^+(p) \cap J^-(q)$ باقی می‌ماند. □

اگرچه، در [۹]، ارتومدولار بودن مشبکه $\xi(Z, \perp)$ برای هر فضا-زمان هذلولوی سرتاسری اثبات شده است، امّا عناصر این مشبکه مشخص نشده‌اند. یکی از مهم‌ترین نتایج قضیه ۱۰.۳ مشخص کردن همه عناصر منطق علّی $\xi(Z, \perp)$ در حالت فضا-زمان مینکوفسکی دوبعدی است.

نتیجه ۱۲.۳. فرض کنید (M, g) فضا-زمان مینکوفسکی دوبعدی باشد؛ آنگاه عناصر مشبکه $\xi(Z, \perp)$ برابر عناصر مشبکه $\xi(Z, \perp')$ برای فضا-زمان $(M, -g)$ است.

اثبات. با توجه به [۲، نتایج ۳.۴۴و ۳.۴۵]، اگر (M, g) فضا-زمان مینکوفسکی دو بعدی باشد، آنگاه $(M, -g)$ نیز ساختار فضا-زمان دارد و هر خم زمان‌گونه در (M, g) یک خم مکان‌گونه در $(M, -g)$ است و برعکس؛ علاوه بر آن، عملگرهای $\perp$ و $\perp'$ در (M, g) به ترتیب عملگرهای $\perp'$ و $\perp$ در $(M, -g)$ هستند. اکنون، با مشخص کردن $\xi(Z, \perp')$ در گزاره ی ۱۰.۳ و تعویض خم‌های زمان‌گونه و مکان‌گونه، عناصر $\xi(Z, \perp)$ مشخص می شوند. □

تناظر مطرح شده در نتیجه ۱۲.۳، نشان می‌دهد مشبکه‌های $\xi(Z, \perp)$ و $\xi(Z, \perp')$ در حالت فضا-زمان مینکوفسکی دوبعدی با هم یک‌ریخت هستند، ولی در حالت کلی این مطلب لزوماً برقرار نیست. به‌عنوان مثال، در فضا-زمان هذلولوی سرتاسری توصیف شده در شکل ۵ ، مشبکه $\xi(Z, \perp')$ ارتومدولار نیست؛ درحالی‌که با توجه به نتایج بدست آمده در [۹]، مشبکه $\xi(Z, \perp)$ ارتومدولار است و از این‌رو، دو مشبکه یک‌ریخت نیستند.

۴ نتیجه گیری

در [۹]، فضا-زمان‌های هذلولوی سرتاسری، به‌عنوان دسته خاصی از مدل‌های فضا-زمان در نظریه نسبیت عام، و ساختار علّی تولید شده توسط منحنی‌های زمان‌گونه در نظر گرفته شده‌اند؛ و سپس، منطق علّی فضا-زمان، به عنوان مشبکه ارتومدولار کاملی، متشکل از همه ثابت‌های عملگر $\perp\perp$، معرفی شده است؛ که در آن رابطه تعامد $\perp$ از رابطه علّی فضا-زمان بدست آمده است. بر این اساس، نتایج مقاله پیش رو گام‌هایی در جهت پیشبرد حل دو سوال اساسی زیر می‌باشد:

- آیا می‌توان با معرفی یک چارچوب مناسب، نتایج مذکور را برای دسته‌های دیگر فضا-زمان نیز تعمیم داد؟
- چگونه می‌توان عملگرها و ساختارهای جبری دیگری یافت که برگرفته از ساختار علّی فضا-زمان باشند؟

در راستای پاسخ به سوال اول، نتایج به‌دست آمده از بخش دوم این مقاله، برای هر فضای تقریب پوششی دلخواه (Z, G)، به‌عنوان یک چارچوب مناسب برای مطالعه ساختار علّی هر فضا-زمان، معتبر است؛ در حالی که گزاره‌های مشابه در [۹، ۲۶]، تنها برای حالتی درست است که Z زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R} \times \mathbb{X}$ باشد. علاوه بر ساختار علّی فضا-زمان، با یافتن تعابیر عملگرهای تقریب پوششی در نظریه‌های دیگری، همچون توپولوژی و نظریه گراف نتایج بدست آمده قابل کاربرد در این نظریه‌ها نیز می‌باشند.
در راستای بررسی سوال دوم، در این مقاله قضیه مشهور کوراتوسکی از فضای توپولوژی به فضای تقریب پوششی دلخواه (Z, G) تعمیم داده شده است؛ که این مطلب به مطالعه و شناسایی سایر عملگرهای تقریب پوششی و یافتن ارتباط آن‌ها با یکدیگر کمک می‌کند. همچنین، با کمک عملگر تعامد $\perp'$، مشبکه کامل $\xi(Z, \perp')$ روی فضای تقریب پوششی معرفی و عناصر این مشبکه برای فضا-زمان علّی مشخص شده است. امّا، این مشبکه برای هر فضا-زمان علّی ارتومدولار نیست. در ادامه، فضا-زمان‌های هذلولوی سرتاسری‌ای که این مشبکه برای آن‌ها ارتومدولار است، مشخص شده است. نتایج این مقاله با معرفی مشبکه $\xi(Z, \perp')$ روی فضا-زمان‌ها و مطالعه ویژگی‌های آن، برای دسته‌بندی فضا-زمان‌ها قابل کاربرد می‌باشد. علاوه بر این، با توجه به معرفی عملگرهای مختلف دیگری در این مقاله، ساختارهای جبری مشابهی در ارتباط با ساختار علّی فضا-زمان قابل تعریف خواهد بود.

فهرست منابع

[1] Balbes, B. and Dwinge, P., 1975. *Distributive Lattices*. Univ. of Missouri Press, Columbia.

[2] Beem, J. K., Ehrlich, P. and Easley, K., 1996. *Global Lorentzian Geometry*. Second Edition. Hong Kong: Taylor & Francis.

[3] Birkhoff, G., 1967. *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ, 25.

[4] Burkhardt, C. E. and Leventhal, J. J., 2008. *Foundations of quantum physics*. Springer Science and Business Media. doi: 10.1007/978-0-387-77652-1

[5] Casini, H., 2002. The logic of closed space-time subsets. *Classical and Quantum Gravity*, 19(24), pp.6389–6104. doi: 10.1088/0264-9381/19/24/308

[6] Cegła, W. and Florek, J., 2005. Orthomodular lattices generated by graphs of functions. *Communications in mathematical physics*, 259, pp.363–366. doi: 10.1007/s00220-005-1362-1

[7] Cegła, W. and Florek, J., 2005. Ortho and causal closure as a closure operations in the causal logic. *International Journal of Theoretical Physics*, 44, pp.11–19 doi: 10.1007/s10773-005-1430-5

[8] Cegła, W. and Florek, J., 2006. The covering law in orthomodular lattices generated by graphs of functions. *Communications in mathematical physics*, 268, pp.853–856. doi: 10.1007/s00220-006-0116-z

[9] Cegła, W., Florek, J. and Janccewicz, B., 2017. Orthomodular lattice in Lorentzian globally hyperbolic space-time. *Reports on Mathematical Physics*, 79(2), pp.187–195. doi: 10.1016/S0034-4877(17)30034-4

[10] Cegła, W. and Jadczyk, A. Z., 1977. Causal logic of Minkowski space. *Communications in mathematical physics*, 57, pp. 213–317. doi: 10.1007/bf01614163

[11] Cegła, W. and Janccewicz, B., 2013. Non-modular lattices generated by the causal structure. *Journal of Mathematical Physics*, 54 (12), pp.122501–122505. doi: 10.1063/1.4850855

[12] De Barra, G., 2000. *Measure Theory and Integration*. Univ. of London, Columbia. doi: 10.1533/9780857099525.frontmatter

[13] Deng, T., Chen, Y., Xu, W. and Dai, Q., 2007. A novel approach to fuzzy rough sets based on a fuzzy covering. *Information Sciences*, 177(11), pp.2308-2326. doi: 10.1016/j.ins.2006.11.013

[14] Estaji, A. A., Vatandoost, M. and Pourkhandani, R., 2019. Fixed points of covering upper and lower approximation operators. *Soft Computing*, 23, pp.11447–11460. doi: 10.1007/s00500-019-04113-0

[15] Foulis, D.J. and Randall, C.H., 1971. Lexicographic orthogonality. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 11(2), pp.157-162. doi: 10.1016/0097-3165(71)90040-9

[16] Foulis, D.J. and Randall, C.H., 1974.The empirical logic approach to the physical sciences. *Hartkämper, A., Neumann, H. Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces. Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, Heidelberg*, 29, pp. 230–249. doi: 10.1007/3-540-06725-6_18

[17] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M. and Scott, D.S., 2009. Continuous lattices and domains. *Cambridge University Press*, 93. doi: 10.1017/CBO9780511542725

[18] Hawking, S.W. and Ellis, G.F., 2023. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 50th Anniversary Edition. doi: 10.1017/9781009253161

[19] Koppitz, J. and Denecke, K., 2006. Closure operators and Lattices. *M-Solid Varieties of Algebras, Springer*, pp.29–47. doi: 10.1007/0-387-30806-7_2

[20] Pawlak, Z., 1991. *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-94-011-3534-4

[21] Pawlak, Z., 1987. Rough logic. *Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci*, 35, pp.253–258.

[22] Pawlak, Z., 1982. Rough sets. *Int. J. Comput. Math. Inform. Sci*, 11, pp.341–356.

[23] Penrose, R., 1972. *Techniques in differential topology in relativity*. Society for Applied and Industrial Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[24] Pták, P. and Pulmannová, S., 1991. Orthomodular structures as quantum logics. *Fund. Theories Phys., Dordrecht: Kluwer*, 55.

[25] Shum, K.P., 2017. A Note on Kuratowski's Theorem and Its Related Topics. *Advances in Pure Mathematics*, 7(08) , pp.383–406. doi: 10.4236/apm.2017.78025

[26] Vatandoost, M., Estaji, A.A. and Pourkhandani, R., 2019. A generalized modal logic in causal structures. *Theoretical Computer Science*, 768, pp.43-53. doi: 10.1016/j.tcs.2019.02.006

[27] Vatandoost, M., Pourkhandani, R. and Ebrahimi, N., 2019. On null and causal pseudoconvex space-times. *J. Math. Phys.*, 60(1). doi:10.1063/1.5081898

[28] Yang, B., Zhu, W. (2014). *A New Type of Covering-Based Rough Sets*. Miao, D., Pedrycz, W., Ślęzak, D., Peters, G., Hu, Q., Wang, R. (eds) Rough Sets and Knowledge Technology. RSKT 2014. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-319-11740-9_45

[29] Zhu, W. and Wang, F.Y., 2007. On three types of covering-based rough sets. *Transactions on knowledge and data engineering*, 19(8), pp.1131–1144. doi: 10.1109/TKDE.2007.1044

[30] Zhu, W., 2009. Relationship among basic concepts in covering-based rough sets. *Inform. Sci.*, 179(14), pp.2478–2486. doi: 10.1016/j.ins.2009.02.013

Orthomodular lattices in causal structure of space-time

Mehdi Vatandoost(1), Rahimeh pourkhandani(1) [2] and Ali Akbar Estaji(1)

(1) Department of pure mathematics and computer science of Hakim Sabzevari University, Sabzevar,Iran

Communicated by: Ali Rezaei Aliabad

Received: 12 November 2023 Accepted: 26 July 2024

Abstract: Rough set theory provides a convenient framework to study and compare algebraic operators in many mathematical structures. In this paper, we establish a connection between the causal structure of space- time in Einstein's theory of relativity and the theory of Rough sets based on coverage, and by means of this, we define the covering approximation operators for the causal structure and show that some of these operators are the same basic and common operators in the causal structure of space-time such as $I^{\pm}$, $J^{\pm}$, D, and $\perp$, and some operators like $\perp'$ and $\perp'\perp'$ are different operators in the causal structure. Recently, causal logic, a complete orthomodular lattice consisting of all constants of the clouser operator $\perp\perp$, on space-times has been introduced. Here, through the orthogonal operator $\perp'$, we introduce another complete lattice and determine the elements of this lattice in causal space-times. Also, we provide a necessary and sufficient condition for this lattice to be orthomodular in global hyperbolic space-times. Finally, we show that these two lattices are isomorphic in the case of two-dimensional Minkowski space-time, but this is not necessarily true in the general case.

Keywords: Lattice, Rough set theory, Space-times, Causal structure, Causal logic.

[2]Corresponding author.

E-mail addresses: (M. Vatandoost) m.vatandoost@hsu.ac.ir, (R. pourkhandani) r.pourkhandani@hsu.ac.ir (A.A. Estaji) aaestaji@hsu.ac.ir.