مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۷۳–۷۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2024.47765.2304

اثبات جدید از فرادوری نبودن عملگرهای طول‌پا روی فضای باناخ

حمید رضایی [(۱)] [۱] و میثم اسدی‌پور [(۱)]

[(۱)] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

دبیر مسئول: امیر حسین صنعت پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۰۲

چکیده: به‌عنوان جایگزینی برای اثبات ارائه شده توسط انصاری و بوردن، [۱]، ما در این مقاله یک اثبات ساده و مستقل ارائه می‌کنیم که عملگرهای طول‌پا فرادوری نیستند. در مقایسه با اثبات آن‌ها، که مبتنی بر نتیجه‌ای است که نشان می‌دهد عملگرهای طول‌پا همیشه دارای زیرفضاهای پایای غیربدیهی هستند، [۶]، اثبات ما مستقل از این نتیجه بوده و بطور مستقیم نشان می دهد که عملگرهای طول‌پا بردارهای فرادوری ندارند.

واژه‌هاي كليدي: عملگر ابردوری، عملگر فرادوری، عملگر طول‌پا.

رده‌بندی ریاضی: 47B38; 47A16

۱ تعاریف و مقدمات

در سال های اخیر مطالعه ویژگی‌های عملگرهای خطی برحسب مدارهای تشکیل شده توسط آن‌ها، مورد توجه تعداد زیادی از نویسندگان تحت عنوان ابردوری بودن، فرادوری بودن و همچنین دوری بودن یک عملگر، بوده است. به منظور آشنایی با تعاریف اولیه، فرض کنیم X یک فضای باناخ مختلط تفکیک‌پذیر با بعد نامتناهی و T یک عملگر خطی کراندار روی X باشد. اگر به ازای بردار $x \in X$ مدار x تحت عملگر T مجموعه $Orb(T,x) = \{T^n x; n = ۰, ۱, ۲, ...\}$ باشد، آنگاه بردار x :

الف) یک بردار ابردوری برای T است هرگاه

$$\overline{Orb(T,x)} = X,$$

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(H. Rezaei) rezaei@yu.ac.ir, (M. Asadipour) Asadipour.mey@gmail.com

ب) یک بردار فرادوری برای T است هرگاه

$$\overline{\mathbb{C}.Orb(T,x)}=X,$$

پ) یک بردار دوری برای T است هرگاه

$$\overline{Span\{Orb(T,x)\}}=\overline{\{p(T)x; \text{یک چند جمله‌ای است } p\}}=X.$$

به عملگر T، یک عملگر ابردوری، فرادوری یا دوری گوئیم هرگاه به‌ترتیب برای T حداقل یک بردار ابردوری، فرادوری یا یک بردار دوری وجود داشته باشد.
مجموعه بردارهای ابردوری و فرادوری یک عملگر T را به‌ترتیب با نمادهای $SC(T), HC(T)$ نشان خواهیم داد. به راحتی قابل مشاهده است که برای یک عملگر T همواره شمول

$$HC(T)\subseteq SC(T)$$

برقرار است و بنابراین همواره

عملگر فرادوری $\Longrightarrow$ عملگر ابردوری

ولی مثال‌هایی از عملگرهای فرادوری وجود دارند که ابردوری نیستند، [۲]. به دلیل استفاده در ادامه مطلب لازم به یادآوری دو ویژگی زیر است:
۱) به دلیل مضارب مختلط در تعریف فرادوری بودن یک عملگر، بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که هر بردار $x\in SC(T)$ دارای نرم واحد است.
۲) مجموعه $\sigma(T)$، طیف هر عملگر فرادوری $T\in B(X)$ یک مجموعه ناتهی است، [۲].
برای مطالعه در این زمینه می‌توان مراجع [۲]، [۷] و مقالات مروری [۳]، [۴]، [۵] و همچنین مراجع معرفی شده در آن‌ها را نگریست.

در سال ۱۹۷۴، هیلدن و والن [۸] ثابت کردند که یک عملگر نرمال روی یک فضای هیلبرت H با بعد نامتناهی نمی‌تواند یک عملگر فرادوری باشد و به‌دلیل این‌که هر عملگر طول‌پا روی H با برد چگال یک عملگر نرمال است، در نتیجه هیچ عملگر فرادوری طول‌پا روی H وجود ندارد. سپس انصاری و بوردون [۱] این نتیجه را روی فضای باناخ تفکیک‌پذیر با بعد نامتناهی X ثابت کردند. نکته قابل توجه درباره روش آن‌ها این‌است که اثبات آن‌ها بر اساس قضیه وجود زیرفضای نابدیهی پایا M از X تحت عملگر طول‌پا $T\in B(X)$، که توسط نویسندگان مقاله [۶] اثبات شده است، می‌باشد. بنابراین هدف ما در این مقاله ارائه یک اثبات جدید و البته راحت‌تر نسبت به اثبات ارائه شده توسط انصاری و بوردن است. البته به دلیل افزایش انگیزه در خواننده و همچنین آشنا شدن با دلیل طول‌پا نبودن عملگرهای ابردوری، قضیه زیر را که می‌توان در [۷] مشاهده کرد، ارائه می‌دهیم. باید یادآوری کرد که عملگر $T\in B(X)$ را پارانرمال گوییم هرگاه به ازای هر $x\in X$ نامساوی

$$\|Tx\|^{2}\leqslant\|T^{2}x\|\|x\|$$

برقرار باشد و بنابراین هر عملگر طول‌پا، یک عملگر پارانرمال است.

قضیه ۱.۱. هیچ عملگر پارانرمال $T\in B(X)$، ابردوری نیست.

اثبات. فرض کنیم بردار $x\in X$ یک بردار ابردوری برای عملگر پارانرمال $T\in B(X)$ باشد. در این‌صورت به‌دلیل ابردوری بودن بردار x، عدد $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $T^{n}x\neq 0$ و

$$\|T^{n+1}x\|>\|T^{n}x\|. \tag{۱.۱}$$

از طرفی به ازای هر $y\in X$، پارانرمال بودن عملگر T نتیجه می‌دهد:

$$\|Ty\|^{2}\leqslant\|T^{2}y\|\|y\|. \tag{۲.۱}$$

اکنون با تعویض بردار y در (۲.۱) با بردار $T^n x$ و سپس از اعمال (۱.۱)، نامساوی

$$\|T^{n+2}x\| \geqslant \frac{\|T^{n+1}x\|^2}{\|T^n x\|} > \|T^{n+1}x\| \tag{۳.۱}$$

حاصل می‌شود و عبارت (۳.۱)، نشان می‌دهد که مدار بردار x تحت عملگر T، از مرتبه ای به بعد صعودی اکید می‌باشد و این با چگال بودن مجموعه $Orb(T,x)$ در X در تناقض است. بنابراین اثبات کامل است. □

۲ اثبات جدید

انصاری و بوردون در [۱] ابتدا نشان داده‌اند که اگر برای عملگر فرادوری $T \in B(X)$ دنباله عددی $\{\|T^n\|\}$ کراندار باشد، آنگاه حداقل یک مدار تحت عملگر T همگرا به صفر است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $T \in B(X)$ و دارای دو ویژگی زیر باشد:
الف) عدد $M > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$\|T^n\| \leq M.$$

ب) به ازای هر بردار ناصفر $x \in X$، صفر نقطه حدی $Orb(T,x)$ نیست.
در این‌صورت مجموعه $SC(T)$ تهی است.

و سپس به‌عنوان یکی از نتایج اصلی، قضیه زیر در مقاله آن‌ها ارائه شده است:

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $\dim(X) > 1$ و $T \in B(X)$ یک عملگر طول‌پا باشد. در این‌صورت T فرادوری نیست.

در ادامه قصد داریم به‌وسیله یک روش ساده، اثبات قضیه بالا را بدون استفاده از قضیه وجود زیرفضای نابدیهی پایا M از X تحت عملگر طول‌پا $T \in B(X)$، [۶]، ارائه دهیم اما قبل از ارائه اثبات، لازم به توضیح است که در ضمن ارائه اثبات، فرض می‌کنیم که X یک فضای باناخ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است، زیرا در صورتی که فضای باناخ X روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفته شود، می‌توان درقدم اول گسترش مختلط $\tilde{X} := X \times X$ از X با ضرب زیر در نظر گرفت:

$$(a+bi)(x,y) := (ax - by, ay + bx), x, y \in X, a, b \in \mathbb{R},$$

و در قدم بعد برای عملگر $T \in B(X)$، عملگر گسترش مختلط $\tilde{T} \in B(\tilde{X})$ را می‌توان به‌صورت

$$\tilde{T}(x,y) := (Tx, Ty), \quad x, y \in X$$

در نظر گرفت. بنابراین اگر $T \in B(X)$ طول‌پا و فرادوری باشد آن‌گاه $\tilde{T} \in B(\tilde{X})$ نیز فرادوری طول‌پا خواهد بود و در نتیجه اثبات قضیه درصورت جایگزینی $\mathbb{R}$ با $\mathbb{C}$ نیز برقرار است.

اثبات. به‌منظور رسیدن به یک تناقض، فرض کنیم بردار یکه $x \in SC(T)$ و بر اساس این بردار، مجموعه

$$E := \{e^{i\theta}x; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

را در نظر می‌گیریم. در ادامه، ابتدا ثابت خواهیم کرد که مجموعه

$$Orb(T,E) := \bigcup_{a\in E} Orb(T,a)$$

در دایره واحد فضای باناخ X چگال است. برای این منظور توجه داریم که به‌ازای بردار $z \in S^۱$، دنباله‌های

$$\{n_k\}_k \subset \mathbb{N}, \quad \{\lambda_k\}_k \subset \mathbb{C}$$

وجود دارند به‌طوری‌که دنباله $\{\lambda_k T^{n_k} x\}_k$ به z همگراست و بنابراین اگر $k \to \infty$ داریم

$$|\lambda_k| = |\lambda_k| \|x\| = |\lambda_k| \|T^{n_k} x\| \longrightarrow \|z\| = ۱.$$

اگر به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، عدد $\theta_k \in \mathbb{C}$ را به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\theta_k}$، آن‌گاه

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(e^{i\theta_k} x) = \lim_{k\to\infty} e^{i\theta_k} T^{n_k} x = \lim_{k\to\infty} \frac{۱}{|\lambda_k|} \lambda_k T^{n_k} x = z, \tag{۱.۲}$$

و در نتیجه مجموعه $Orb(T, E)$ در $S^۱$ چگال است.
اکنون فرض کنیم که p چندجمله‌ای دلخواه با ضرایب مختلط است، در این‌صورت عبارت (۱.۲)، تساوی

$$\begin{aligned}
\|p(T)\| &= \sup\{\|p(T)(z)\|; \quad z \in S^۱\} \\
&= \sup\{\|p(T)(T^n(e^{i\theta} x))\|; \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi, \;\; n = ۰, ۱, ۲, ...\} \\
&= \sup\{\|T^n(p(T)x)\|; \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi, \;\; n = ۰, ۱, ۲, ...\} = \|p(T)x\|
\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

را نتیجه می‌دهد. اکنون توجه داریم که بنابر (۱.۲)، به ازای هر بردار ناصفر $z \in X$ دنباله‌های

$$\{n_k\}_k \subseteq \mathbb{N}, \quad \{\theta_k\}_k \subseteq [۰, ۲\pi]$$

وجود دارند به‌طوری‌که

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(e^{i\theta_k} x) = \frac{z}{\|z\|}. \tag{۳.۲}$$

اکنون اگر $k \to \infty$ آنگاه عبارات (۲.۲) و (۳.۲) نتیجه می‌دهند

$$\|p(T)\| = \|p(T)x\| = \|T^{n_k} p(T) x\| = \|p(T) T^{n_k}(e^{i\theta_k} x)\| \to \|p(T)(\frac{z}{\|z\|})\|$$

و در نتیجه

$$\|p(T)z\| = \|p(T)\| \|z\|, \quad (z \in X). \tag{۴.۲}$$

عبارت (۴.۲) بیانگر آن است که عملگر $p(T)$ و بویژه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، عملگر $\lambda - T$ یک‌به‌یک و دارای برد بسته است.
در ادامه نشان می دهیم که به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، عملگر $\lambda - T$ دارای برد چگال است. برای این منظور فرض کنیم تابعک خطی کراندار ناصفر $f \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $y \in X$

$$f(\lambda - T)(y) = ۰,$$

و در این‌صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$f(T^n y) = \lambda^n f(y). \tag{۵.۲}$$

اکنون توجه کنیم که اگر :
الف) $|\lambda| < ۱$، آن‌گاه از (۵.۲) داریم

$$\lim_{n\to\infty} |f(T^n(e^{i\theta} x))| = \lim_{n\to\infty} |\lambda|^n |f(x)| = ۰, \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi,$$

و به‌دلیل این‌که مجموعه $Orb(T, E)$ در $S^۱$ چگال است در نتیجه تابعک f، الزاما تابعک صفر است که با فرض ناصفر بودن آن در تناقض است.
ب) $|\lambda| > ۱$، آن‌گاه تناقض

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(z)|; \quad \|z\| = ۱\}\\ &= \sup\{|f(T^n(e^{i\theta}x))|; \ n \geqslant ۰, \quad ۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi\}\\ &= \sup\{|f(T^n x)|; \quad n \geqslant ۰\}\\ &= \sup\{|\lambda|^n |f(x)|; \quad n \geqslant ۰\} = +\infty\end{aligned}$$

از (۵.۲) حاصل می‌شود.
در نتیجه بر اساس دو حالت قبل، الزاماً باید $|\lambda| = ۱$ که در این‌صورت به ازای هر $n \geqslant ۰, \ \theta \in [۰, \ ۲\pi]$ از (۵.۲) داریم

$$|f(T^n(e^{i\theta}x))| = |f(T^n x)| = |f(x)|.$$

ازطرفی مجموعه $Orb(T, E)$ در $S^۱$ چگال است، از این‌رو به ازای هر بردار ناصفر $z \in X$

$$|f(\frac{z}{\|z\|})| = |f(x)|$$

که تساوی $|f(z)| = |f(x)|\|z\|$ را نتیجه می‌دهد. تساوی اخیر به معنی یک به یک بودن تابعک خطی f است که غیرممکن است.
توضیحات و تناقض‌های بالا بیانگر این مطلب است که به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ عملگر $\lambda - T$ یک‌به‌یک و پوشا و در نتیجه معکوس‌پذیر یا به‌طور معادل به معنی تهی بودن $\sigma(T)$، که یک تناقض است. بنابراین فرض ناتهی بودن $SC(T)$ باطل است و برهان قضیه کامل است. $\square$

فهرست منابع

[1] Ansari, S. I. and Bourdon, P. S., 1997. Some properties of cyclic operators.*Acta Sci. Math., 63*, pp.195-207. Doi: Not available.

[2] Bayart, F. and Matheron, E., 2009. *Dynamics of Linear Operators*. *Cambridge University Press, Cambridge*. Doi: 10.1002/mana.200910029

[3] Bes, J. P., 1999. Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case.*Proc. Amer. Math. Soc., 127*, pp.1003-1010. Doi: 10.1090/s0002-9939-99-04720-6

[4] Bonet, J., Martinez-Gimenez, F. and Peris, A., 2003. Linear chaos on Fréchet spaces, dynamical systems and functional equations.*Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng., 13*, pp.1649-1655. Doi: 10.1142/s0218127403007497

[5] Dodson, C. T. J., 2012. A review of some recent work on hypercyclicity.*Balkan Journal of Geometry and its Applications, 19*, pp.22-41. Doi: Not available.

[6] Godement, R., 1947. Theoremes Tauberiens et theorie spectrale.*Annales Scientique de Lecole Normale Superieure, 64*, pp.119-138. Doi: Not available.

[7] Grosse-Erdmann, K. G. and Peris, A., 2011. *Linear Chaos*. *Springer*. Doi: Not available.

[8] Hilden, H. M. and Wallen, L. J., 1974. Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators.*Indiana Univ. Math. J., 23*, pp.557-565. Doi: Not available.

A Novel Proof of Non-supercyclicity of Isometries on Banach Space

Hamid Rezaei(1) 2 and Meysam Asadipour(1)

(1) Department of Mathematics, College of Sciences, Yasouj University, Yasouj, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 15 August 2024 Accepted: 22 December 2024

Abstract: As an alternative to the proof given by Ansari and Bourdon, [1], we present here a simple and self-contained proof that isometries are not supercyclic. As compared to their proof, which is based on a result that suggests that isometries always have nontrivial invariant subspaces, [6], our proof is independent of this result and provides a more direct proof that isometries do not have supercyclic vectors.

Keywords: Hypercyclic operator, supercyclic operator, isometry operator.

---

[2]Corresponding author

E-mail addresses: (H. Rezaei) rezaei@yu.ac.ir, (M. Asadipour) Asadipour.mey@gmail.com