مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۳، دوره ۱۴، شماره ۴، ص ۱۴۰-۱۴۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI:10.22055/JAMM.2025.47540.2297

# برخی نتایج در خصوص بردهای عددی کواترنیونی غیراستاندارد ماتریس‌ها

غلامرضا آقاملائی[۱،۱] و میثم رهجو[۲]

[۱] بخش ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

[۲] آموزش و پرورش کوهبنان، کوهبنان، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۶

**چکیده:** فرض کنید $\phi$ یک برگشت غیراستاندارد روی مجموعه تمام اعداد کواترنیونی و $\alpha$ یک عدد کواترنیونی باشد به‌طوری‌که $\phi(\alpha) = \alpha$. برای هر ماتریس مربعی کواترنیونی $A$، برد عددی $A$ نسبت به $\phi$ (به طور مختصر، برد عددی غیراستاندارد $A$)، با نماد $W_\phi^{(\alpha)}(A)$ نمایش داده می‌شود. اگر $\alpha \neq 0$، آن‌گاه عدد کواترنیونی $\gamma$ با شرط $\phi(\gamma)\gamma = \alpha$ موجود است به‌طوری‌که $W_\phi^{(\alpha)}(A) = \phi(\gamma)W_\phi^{(1)}(A)\gamma$. بنابراین، کافیست فقط بر روی دو برد عددی غیراستاندارد $W_\phi^{(0)}(A)$ و $W_\phi^{(1)}(A)$ تمرکز کرد. در این مقاله، توصیفی از اشتراک $W_\phi^{(1)}(.)$ با یک فضای ۲-بعدی ارائه شده است و سپس با استفاده از آن، $W_\phi^{(1)}(.)$ برای ماتریس‌های کواترنیونی $\phi$-هرمیتی مورد مطالعه قرار گرفته است. در ادامه، یک کلاس از ماتریس های کواترنیونی که برای آن‌ها $W_\phi^{(0)}(.)$ و $W_\phi^{(1)}(.)$ یکسان می‌باشند، ارائه شده است. همچنین یک مسئله باز در قالب یک حدس جهت انجام کارهای تحقیقاتی بیشتر نیز آورده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** ماتریس‌های کواترنیونی، برد عددی، برگشت غیراستاندارد، ماتریس کواترنیونی $\phi$-هرمیتی.

**رده‌بندی ریاضی:** 15A60, 15B33

[۱] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: (M. Rahjoo) rahjoo.meysam@gmail.com, (Gh. Aghamollaei) aghamollaei@uk.ac.ir

## ۱ مقدمه و پیش‌نیازها

فرض کنید $\mathbb{H}$ جبر ۴-بعدی تمام اعداد کواترنیونی روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با پایه استاندارد $\{1, i, j, k\}$ باشد. علاوه بر این، فرض کنید $\mathbb{H}^n$ مجموعه تمام بردارهای ستونی $n \times 1$ با درایه‌های متعلق به $\mathbb{H}$ و $\mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ جبر تمام ماتریس‌های کواترنیونی $n \times n$ باشد. برای ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$، برد عددی کواترنیونی استاندارد $A$، $W(A)$، برای اولین بار توسط کیپنهان [2] در سال ۱۹۵۱ مورد مطالعه قرار گرفت [۷]. بعدها جمیسون [3] [۶] و پس از او یانگ [4] [۴] مطالعه برد عددی کواترنیونی استاندارد را از سر گرفتند. در حال حاضر، این موضوع در جبر خطی و آنالیز ماتریسی شاخه‌ای شناخته شده است. برای دیدن مقالات اخیر در این‌باره، می‌توان [۲، ۵] و منابع معرفی شده در آن‌ها را نگریست. توجه کنید که کواترنیون‌ها و ماتریس‌های کواترنیونی کاربردهای مفیدی در سیستم های کنترل، مکانیک کوانتومی، گرافیک کامپیوتری، جبر، آنالیز و هندسه دارند؛ برای آشنایی بیشتر در این زمینه منابع [۱، ۸، ۹، ۱۲، ۱۳] را بنگرید. سه‌تایی مرتب $(q_1, q_2, q_3)$ با درایه‌های کواترنیونی را یک سه‌تایی یکه گویند هرگاه:

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = -1,$$
$$q_1 q_2 = q_3 = -q_2 q_1, \quad q_2 q_3 = q_1 = -q_3 q_2, \quad q_3 q_1 = q_2 = -q_1 q_3.$$

به‌عنوان مثال، سه‌تایی استاندارد $(i, j, k)$ از کواترنیون‌ها یک سه‌تایی یکه است. هر $x \in \mathbb{H}$ را می‌توان به‌صورت یکتایی به‌فرم $x = x_0 + x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3$ نوشت، که‌در آن $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. عدد حقیقی $x_0$، قسمت حقیقی $x$ نامیده شده و با نماد $Re(x)$ مشخص می‌شود و نرم $x$ برابر است با $|x| := \sqrt{x^* x} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$، که‌در آن $x^* = x_0 - x_1 q_1 - x_2 q_2 - x_3 q_3$ مزدوج عدد کواترنیونی $x$ می‌باشد. در حالتی که $x \neq 0$، وارون $x$ برابر است با $x^{-1} := \frac{x^*}{|x|^2}$. نگاشت $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ یک برگشت روی $\mathbb{H}$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{H}$،

$$\phi(\phi(x)) = x, \ \phi(xy) = \phi(y)\phi(x), \ \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y).$$

در چنین حالتی آشکارا نگاشت $\phi$ یک به یک و پوشاست. علاوه بر این، ماتریس $4 \times 4$ نمایش $\phi$ نسبت به پایه استاندارد $\mathbb{H}$، ماتریس $diag(1, T)$ می‌باشد، که‌در آن $T = -I_3$ یا $T$ یک ماتریس $3 \times 3$ متعامد و متقارن حقیقی با مقادیر ویژه $1, 1, -1$ است. اگر $T = -I_3$، آنگاه $\phi$ نگاشت مزدوج استاندارد است. در غیر این صورت، $\phi$ یک برگشت غیراستاندارد نامیده می‌شود؛ [۱۱، تعریف ۵.۴.۲] را نگاه کنید. مجموعه تمام کواترنیون‌هایی که تحت $\phi$ پایا هستند با نماد $Inv(\phi)$ نمایش داده شده و به صورت $Inv(\phi) = \{x \in \mathbb{H} : \phi(x) = x\}$ معرفی می‌شود. در سراسر این مقاله، منظور از نگاشت $\phi$ یک برگشت غیراستاندارد روی $\mathbb{H}$ می‌باشد و در نتیجه بنابر [۱۱، ص. ۲۰]، سه‌تایی یکه $(q_1, q_2, q_3)$ از کواترنیون‌ها وجود دارد به‌طوری‌که

$$\phi(1) = 1, \ \phi(q_1) = -q_1, \ \phi(q_2) = q_2, \ \phi(q_3) = q_3.$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $Inv(\phi) = Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$. به‌علاوه، به ازای هر $x \in \mathbb{H}$، $|\phi(x)| = |x|$.

**گزاره ۱.۱.** ([۱۱، قضیه ۱.۵.۲$(b)$]) اگر $\phi$ یک برگشت غیراستاندارد روی $\mathbb{H}$ باشد و $0 \neq \alpha \in Inv(\phi)$، آنگاه به ازای هر $\lambda \in Inv(\phi)$، عدد کواترنیونی $\beta \in Inv(\phi)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda = \phi(\beta)\alpha\beta$.

برای ماتریس کواترنیونی $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ و کواترنیون $\alpha \in Inv(\phi)$، مفهوم برد عددی $A$ نسبت به $\phi$ (به اختصار، برد عددی کواترنیونی غیراستاندارد $A$) برای اولین بار در سال ۲۰۱۴ توسط رادمن [5] [۱۱] به شکل زیر معرفی شد:

$$W_\phi^{(\alpha)}(A) = \{x_\phi A x \ : \ x \in \mathbb{H}^n, \ x_\phi x = \alpha\}, \qquad (1.1)$$

که‌در آن به ازای هر ماتریس کواترنیونی $m \times n$ مانند $X$، ماتریس $X_\phi \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$ از اثر دادن نگاشت $\phi$ روی تک تک درایه‌های ماتریس $X^T$ به‌دست می‌آید. اگر $\alpha = 1$ و $\phi$ نگاشت استاندارد مزدوج باشد، آنگاه $W_\phi^{(\alpha)}(A)$ به برد عددی استاندارد $W(A)$ تبدیل می‌شود. در گزاره زیر، برخی از ویژگی‌های پایه‌ای $W_\phi^{(\alpha)}(.)$ را ارائه می‌کنیم.

---
[2] Kippenhahn
[3] Jamison
[4] Au-Yeung
[5] Rodman

**گزاره ۲.۱.** فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$، $\alpha \in Inv(\phi)$ و $\lambda \in \mathbb{H}$. در این صورت احکام زیر درست می‌باشند:

(آ) اگر $B$ یک زیرماتریس اصلی از ماتریس $A$ باشد، آن‌گاه $W_\phi^{(\alpha)}(B) \subseteq W_\phi^{(\alpha)}(A)$؛

(ب) ([۱۱، قضیه ۶.۷.۳]) $W_\phi^{(\alpha)}(A)$ در $\mathbb{H}$ یک مجموعه همبند است؛

(پ) ([۱۱، گزاره ۲.۷.۳]) $W_\phi^{(\alpha)}(U_\phi AU) = W_\phi^{(\alpha)}(A)$، که‌در آن $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ و $U_\phi U = UU_\phi = I$ (به عبارت دیگر، $U$ یک ماتریس $\phi$-یکانی است)؛

(ت) ([۱۱، گزاره ۲.۷.۳]) $W_\phi^{(\alpha)}(rA + sI) = rW_\phi^{(\alpha)}(A) + s\alpha$، که‌در آن $r, s \in \mathbb{R}$؛

(ث) ([۳، گزاره ۳.۳] و [۱۰، گزاره ۴.۳]) $\lambda \in W_\phi^{(\alpha)}(A)$ اگر و تنها اگر $[\lambda]_\phi^{(\alpha)} \subseteq W_\phi^{(\alpha)}(A)$، که‌در آن $[\lambda]_\phi^{(\alpha)} := \{\beta_\phi \lambda \beta : \circ \neq \beta \in \mathbb{H},\ \beta_\phi \alpha \beta = \alpha\}$ همان $\alpha$-کلاس کواترنیون $\lambda$ نسبت به $\phi$ است.

طبق فرض ما در این مقاله مبنی بر این‌که نگاشت $\phi$ یک برگشت غیراستاندارد روی $\mathbb{H}$ می‌باشد، از این‌رو اگر $\alpha \neq \circ$ ، $\alpha$، آن‌گاه $\gamma \in \mathbb{H}$ با شرط $\gamma_\phi \gamma = \alpha$ وجود دارد به‌طوری‌که $W_\phi^{(\alpha)}(A) = \gamma_\phi W_\phi^{(1)}(A)\gamma$. بر این اساس ما می‌توانیم بر روی دو برد عددی کواترنیونی خاص $W_\phi^{(\circ)}(A)$ و $W_\phi^{(1)}(A)$ تمرکز کنیم. ماتریس $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ یک ماتریس کواترنیونی $\phi$-هرمیتی نامیده می‌شود هرگاه $A = A_\phi$؛ همچنین، $\phi$-پادهرمیتی نامیده می‌شود هرگاه $A = -A_\phi$. برد عددی کواترنیونی غیراستاندارد $W_\phi^{(\circ)}(.)$ به طور کامل برای ماتریس‌های $\phi$-هرمیتی و همچنین $\phi$-پادهرمیتی مشخص شده است [۳، قضایای ۲.۴ و ۳.۴]. در رابطه با $W_\phi^{(1)}(.)$ این دو نوع از ماتریس‌ها، گزاره زیر را داریم.

**گزاره ۳.۱.** ([۱۱، گزاره ۳.۷.۳]) فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$. در این صورت:

(آ) $A$ یک ماتریس $\phi$-هرمیتی است اگر و تنها اگر $W_\phi^{(1)}(A) \subseteq Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$؛

(ب) $A$ یک ماتریس $\phi$-پادهرمیتی است اگر و تنها اگر $W_\phi^{(1)}(A) \subseteq Span_{\mathbb{R}}\{q_1\}$.

برخی از ویژگی‌های جبری و هندسی بردهای عددی کواترنیونی غیراستاندارد $W_\phi^{(\alpha)}(.)$ را می‌توان در [۳، ۱۰، ۱۱] یافت. در بخش دوم این مقاله، یک توصیفی از $W_\phi^{(1)}(A) \bigcap Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\}$ ارائه خواهیم داد و سپس با استفاده از آن، $W_\phi^{(1)}(.)$ را برای ماتریس‌های کواترنیونی $\phi$-هرمیتی مطالعه خواهیم کرد. در ادامه مسیر، یک کلاس (رده) از ماتریس‌های کواترنیونی پیدا می‌کنیم که برای آنها $W_\phi^{(\circ)}(.)$ و $W_\phi^{(1)}(.)$ با هم برابرند.

## ۲ نتایج اصلی

در ابتدای این بخش قصد داریم $W_\phi^{(1)}(A)$ را برای برخی ماتریس‌های کواترنیونی $\phi$-هرمیتی $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ که مورد نیازمان می‌باشد، مشخص کنیم. با توجه به اثبات قضیه ۶.۳ در [۱۰]، می‌دانیم که اگر $n = 1$ و

$$A = [a_\circ + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3]_{1\times 1},$$

که‌در آن $a_\circ, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$، آن‌گاه

$$W_\phi^{(1)}(A) = a_\circ + a_1 q_1 + \sqrt{a_2^2 + a_3^2}\,\{cos(\theta)q_2 + sin(\theta)q_3 \ : \ \circ \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

همچنین، اگر $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ یک ماتریس اسکالر حقیقی باشد، آن‌گاه $W_\phi^{(1)}(A)$ یک مجموعه تک‌عضوی در $\mathbb{H}$ است. بنابراین در ادامه کار فرض می‌کنیم که $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ یک ماتریس اسکالر حقیقی نباشد و همچنین $n \geq 2$. برای هر ماتریس $X = [x_{ij}] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{H})$، مزدوج $X$ را به‌صورت $\overline{X} := [x_{ij}{}^*] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{H})$ و ترانهاده مزدوج ماتریس $X$ را به‌صورت $X^* := \overline{X}^T$ معرفی می‌کنیم. با این توضیحات لم زیر را که برای ادامه بحث ما مفید است، بیان می‌کنیم.

**لم ۱.۲.** فرض کنید $A = A_0 + A_1 q_1 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$، که‌در آن $A_0, A_1 \in \mathbb{M}_n(Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\})$. علاوه بر این، فرض کنید $B = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_0} \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} \overline{A_1} & \overline{A_0} \\ -A_0 & A_1 \end{bmatrix}$. در این صورت

$$W_{\phi}^{(1)}(A) \bigcap Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\} = \left\{ x^T B x \ : \ x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \overline{x_1} \end{bmatrix}, \ x_0, x_1 \in (Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\})^n, \ x_0^T x_1 \in \mathbb{R}, \ x^T x = 1, \ x^* C x = 0 \right\}.$$

اثبات. هر عدد کواترنیونی $a = \alpha_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 \in \mathbb{H}$ را می‌توان به‌صورت $a = a_0 + a_1 q_1$ نوشت، که‌در آن $a_0 = \alpha_0 + \alpha_2 q_2$ و $a_1 = \alpha_1 - \alpha_3 q_2$. در نتیجه، هر بردار یا ماتریس کواترنیونی را نیز می‌توان به‌فرم مشابه آنچه گفته شد، نوشت. همچنین، برای هر $\alpha \in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\}$، به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که $\alpha q_1 = q_1 \alpha^*$، و از این‌رو $q_1 \alpha q_1 = -\alpha^*$. حال، هر $y \in \mathbb{H}^n$ را می‌توان به‌صورت $y = x_0 + x_1 q_1 \in \mathbb{H}^n$ نوشت، که‌در آن $x_0, x_1 \in (Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\})^n$. اکنون، با توجه به آنچه گفته شده، داریم:

$$\begin{aligned} y_{\phi} A y &= \left(x_0^T - q_1 x_1^T\right)\left(A_0 + A_1 q_1\right)\left(x_0 + x_1 q_1\right) \\ &= \begin{bmatrix} x_0 \\ \overline{x_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 \\ \overline{A_1} & \overline{A_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \overline{x_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{x_0} \\ x_1 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \overline{A_1} & \overline{A_0} \\ -A_0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_0} \\ x_1 \end{bmatrix} q_1 \\ &= x^T B x + \overline{x^* C x}\, q_1 \\ &\in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\} + Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\} q_1, \end{aligned}$$

که‌در آن $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \overline{x_1} \end{bmatrix}$ و $x^T B x, \overline{x^* C x} \in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\}$. همچنین، تساوی $y_{\phi} y = 1$ معادل است با

$$\left(x_0^T x_0 + \overline{x_1^T x_1}\right) + \left(x_0^T x_1 - \overline{x_1^T x_0}\right) q_1 = 1,$$

که این تساوی هم خود معادل تساوی زیر است:

$$x^T x = 1, \ x_0^T x_1 \in \mathbb{R}.$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۱.۱) و موارد فوق داریم:

$$\begin{aligned} W_{\phi}^{(1)}(A) &= \{ y_{\phi} A y \ : \ y \in \mathbb{H}^n, \ y_{\phi} y = 1 \} \\ &= \left\{ x^T B x + \overline{x^* C x}\, q_1 \ : \ x = \begin{bmatrix} x_0 \\ \overline{x_1} \end{bmatrix}, \ x_0, x_1 \in (Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\})^n, x_0^T x_1 \in \mathbb{R}, \ x^T x = 1 \right\}. \end{aligned}$$

به این ترتیب آن‌چه که در حکم خواسته شده است، محقق می‌شود. □

بنابر گزاره ۳.۱(آ)، می‌دانیم که برای ماتریس کواترنیونی $\phi$-هرمیتی $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$، مجموعه $W_{\phi}^{(1)}(A)$ زیرمجموعه‌ای از $Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$ است. در لم زیر، $W_{\phi}^{(1)}(.)$ را برای ماتریس‌های کواترنیونی $2 \times 2$ قطری و $\phi$-هرمیتی که اسکالر حقیقی نیستند، مشخص می‌کنیم.

**لم ۲.۲.** فرض کنید $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{H})$ یک ماتریس کواترنیونی قطری $\phi$-هرمیتی باشد به‌طوری‌که به ازای هر $r \in \mathbb{R}$، $A \neq rI$. در این صورت $W_{\phi}^{(1)}(A) = Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$.

اثبات. ماتریس $\phi$-هرمیتی قطری $A = diag(a, b)$ را در نظر بگیرید، که‌در آن $a, b \in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$. در این صورت، با توجه به [۱۰، قضیه ۳.۳]، نتیجه می‌گیریم که $\mu, \lambda \in \mathcal{S}(1)$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$a' := \lambda_{\phi} a \lambda \in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\}, \ b' := \mu_{\phi} b \mu \in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2\},$$

که‌در آن $\mathcal{S}(۱) := \{t_۰ + t_۱ q_۱ \ : \ t_۰, t_۱ \in \mathbb{R}, t_۰^۲ + t_۱^۲ = ۱\}$. بنابراین $U := diag(\lambda, \mu)$ یک ماتریس $\phi$-یکانی است و $U_\phi A U = diag(a', b') \in \mathbb{M}_۲ \left(Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}\right)$. از این‌رو با توجه به گزاره ۲.۱(پ) و بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض می‌کنیم که $a, b \in Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}$. بنابراین، با به کار بردن لم ۱.۲، خواهیم داشت:

$$W_\phi^{(۱)}(A) \cap Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\} = \Big\{x^T B x : x = \begin{bmatrix} x_۰ \\ \bar{x}_۱ \end{bmatrix}, \ x_۰, x_۱ \in \left(Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}\right)^۲, \quad x_۰^T x_۱ \in \mathbb{R}, \ x^T x = ۱, \ x^* C x = ۰ \Big\}, \qquad (۱.۲)$$

که‌در آن $B = diag(a, b, \bar{a}, \bar{b})$ و

$$C = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \bar{a} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \bar{b} \\ -a & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -b & ۰ & ۰ \end{bmatrix}.$$

اکنون برای هر $\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ - \\ y_۳ \\ y_۴ \end{bmatrix} \in \left(Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}\right)^۴$ با شرط $x = \begin{bmatrix} x_۰ \\ - \\ \bar{x}_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ - \\ y_۳ \\ y_۴ \end{bmatrix}$، $x_۰, x_۱ \in \left(Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}\right)^۲$، خواهیم داشت:

$$x^T B x = a y_۱^۲ + b y_۲^۲ + \bar{a} y_۳^۲ + \bar{b} y_۴^۲.$$

همچنین، تساوی‌های $x_۰^T x_۱ \in \mathbb{R}$ و $x^* C x = ۰$، به ترتیب، با تساوی‌های $y_۱\bar{y}_۳ + y_۲\bar{y}_۴ \in \mathbb{R}$ و $a y_۱ \bar{y}_۳ + b y_۲ \bar{y}_۴ \in \mathbb{R}$ معادل هستند. بنابراین، با توجه به رابطه (۱.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W_\phi^{(۱)}(A) \cap Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\} &= \Big\{a y_۱^۲ + b y_۲^۲ + \bar{a} y_۳^۲ + \bar{b} y_۴^۲ : \ y_i \in Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}, \\ &\quad y_۱^۲ + y_۲^۲ + y_۳^۲ + y_۴^۲ = ۱, \ a y_۱\bar{y}_۳ + b y_۲ \bar{y}_۴ \in \mathbb{R}, y_۱\bar{y}_۳ + y_۲\bar{y}_۴ \in \mathbb{R}\Big\}. \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن $y_۳ = y_۴ = ۰$ و $y_۲^۲ = ۱ - y_۱^۲$ و در نظر گرفتن $y_۱ \in Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}$ در رابطه فوق، می‌توان مشاهده کرد که

$$(a - b) y_۱^۲ + b \in W_\phi^{(۱)}(A) \cap Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}. \qquad (۲.۲)$$

همچنین، با قرار دادن $y_۲ = y_۳ = ۰$ و $y_۴^۲ = ۱ - y_۱^۲$ و در نظر گرفتن $y_۱ \in Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}$، نتیجه می‌گیریم که

$$(a - \bar{b}) y_۱^۲ + \bar{b} \in W_\phi^{(۱)}(A) \cap Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\}. \qquad (۳.۲)$$

از طرفی، با توجه به این‌که ماتریس $A$ اسکالر حقیقی نیست، از این‌رو $a \neq b$ یا $a \neq \bar{b}$، و بنابراین با توجه به (۲.۲) و (۳.۲)، نتیجه می گیریم:

$$Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲\} \subseteq W_\phi^{(۱)}(A).$$

با توجه به گزاره ۲.۱(ث) و [۱۰، قضیه ۳.۳]، شمول بالا نشان می‌دهد که $Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲, q_۳\} \subseteq W_\phi^{(۱)}(A)$ و از این‌رو بنابر گزاره ۳.۱(آ)، تساوی مجموعه‌ها برقرار است و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

**قضیه ۳.۲.** فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ یک ماتریس $\phi$-هرمیتی باشد به‌طوری‌که به ازای هر $r \in \mathbb{R}$، $A \neq rI$. اگر حداقل یکی از درایه‌های غیر قطری $A$ برابر با صفر باشد، آن‌گاه $W_\phi^{(۱)}(A) = Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲, q_۳\}$.

اثبات. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$. بنابر فرض، اندیس‌های مجزای $i, j \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارند به‌طوری‌که $a_{ij} = ۰$. با در نظر گرفتن ماتریس کواترنیونی قطری $\phi$-هرمیتی $B := diag(a_{ii}, a_{jj}) \in \mathbb{M}_۲(\mathbb{H})$ و به کار بردن لم ۲.۲، مشاهده می‌کنیم که $W_\phi^{(۱)}(B) = Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲, q_۳\}$. از آن‌جا که $B$ یک زیرماتریس اصلی $A$ می‌باشد، از این‌رو با توجه به گزاره‌های ۲.۱(آ) و ۳.۱(آ) نتیجه می‌شود که $W_\phi^{(۱)}(A) = Span_{\mathbb{R}}\{۱, q_۲, q_۳\}$. به این ترتیب اثبات تمام می شود. □

در این قسمت یک مسئله باز را در قالب یک حدس جهت تحقیقات بیشتر ارائه می کنیم.

**حدس ۴.۲.** فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ یک ماتریس $\phi$-هرمیتی باشد به‌طوری‌که به ازای هر $r \in \mathbb{R}$، $A \neq rI$. آن‌گاه $W_\phi^{(1)}(A) = Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$.

می‌دانیم که در حالت کلی ممکن است $W_\phi^{(0)}(.)$ و $W_\phi^{(1)}(.)$ با هم برابر نباشند. در قضیه زیر، یک کلاس (رده) از ماتریس‌های کواترنیونی پیدا می‌کنیم که برای آن‌ها این دو مجموعه با هم برابرند.

**قضیه ۵.۲.** فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$ و $m \in \mathbb{N}$. در این صورت

$$W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m}) = W_\phi^{(1)}(A \oplus 0_{m\times m}) = \bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A).$$

اثبات. فرض کنید $\lambda \in W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m})$. در این صورت، بردارهای $x \in \mathbb{H}^n$ و $y \in \mathbb{H}^m$ وجود دارند به‌طوری‌که $x_\phi x + y_\phi y = 0$ و

$$\lambda = (x_\phi \;\; y_\phi)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{m\times m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}.$$

با قرار دادن $\alpha := -y_\phi y$، داریم $\alpha \in Inv(\phi)$ و $x_\phi x = \alpha$. بنابراین، $\lambda \in \bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A)$ و از این‌رو

$$W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m}) \subseteq \bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A).$$

برعکس، فرض کنید $\lambda \in \bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A)$. در این صورت، کواترنیون $\alpha \in Inv(\phi)$ و بردار $x \in \mathbb{H}^n$ وجود دارند به‌طوری‌که $x_\phi x = \alpha$ و $\lambda = x_\phi A x$. با به کار بردن گزاره ۱.۱، می‌توان برداری مانند $y \in \mathbb{H}^m$ پیدا کرد به‌طوری‌که $y_\phi y = -\alpha$. اکنون با قرار دادن $z = \begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} \in \mathbb{H}^{n+m}$، می‌بینیم که $z_\phi z = 0$ و $\lambda = z_\phi (A \oplus 0_{m\times m}) z$. بنابراین، $\lambda \in W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m})$ و در نتیجه،

$$\bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A) \subseteq W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m}).$$

بنابراین، $W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m}) = \bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A)$. از آن‌جا که برای هر $x \in \mathbb{H}^n$، $1 - x_\phi x \in Inv(\phi)$، با دنبال کردن روند اثبات فوق، می‌توان نتیجه گرفت که $W_\phi^{(1)}(A \oplus 0_{m\times m}) = \bigcup_{\alpha\in Inv(\phi)} W_\phi^{(\alpha)}(A)$. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

**نتیجه ۶.۲.** فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H})$. در این صورت، برای هر $m \in \mathbb{N}$،

$$W_\phi^{(1)}(A) \subseteq W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m}),$$

و همچنین ماتریس‌های ناصفری مانند $A$ وجود دارند که به ازای آن‌ها شمول فوق تبدیل به تساوی می‌شود.

اثبات. اولین ادعا با به کار بردن قضیه ۵.۲ به راحتی اثبات می‌شود. برای اثبات ادعای دوم، ماتریس کواترنیونی $A = [t]_{1\times 1} \oplus 0_{(n-1)\times(n-1)}$ را در نظر بگیرید، که‌در آن $0 \neq t \in Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}$. با توجه به این‌که ماتریس $\phi$-هرمیتی $A \oplus 0_{m\times m}$ اسکالر حقیقی نیست، با به کار بردن [۳، قضیه ۲.۴]، خواهیم داشت:

$$W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m}) = Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}.$$

ماتریس $A$ یک ماتریس قطری و $\phi$-هرمیتی است که اسکالر حقیقی نمی‌باشد. بنابراین، با توجه به قضیه ۳.۲، می‌توان مشاهده کرد که

$$W_\phi^{(1)}(A) = Span_{\mathbb{R}}\{1, q_2, q_3\}.$$

در نتیجه $W_\phi^{(1)}(A) = W_\phi^{(0)}(A \oplus 0_{m\times m})$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

# فهرست منابع


[1] Adler, S.L., 1995. *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*. Oxford University Press, New York. DOI: 10.1063/1.2807659

[2] Aghamollaei, Gh., Haj Aboutalebi, N. and Momenaee Kermani, H., 2016. Some results on the $k-$numerical range of quaternion matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 64, pp. 2419-2430. DOI: 10.1080/03081087.2016.1158232

[3] Aghamollaei, Gh. and Rahjoo, M., 2018. On quaternionic numerical ranges with respect to nonstandard involutions. *Linear Algebra Appl.*, 540, pp. 11-25. DOI: 10.1016/j.laa.2017.11.013

[4] Au-Yeung, Y.H., 1984. On the convexity of numerical range in quaternion Hilbert spaces. *Linear Multilinear Algebra*, 16, pp. 93-100. DOI: 10.1080/03081088408817611

[5] Carvalho, L., Diogo, C. and Mendes, S., 2023. S-spectrum and numerical range of a quaternionic operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 519, pp. 126834. DOI: 10.1016/j.jmaa.2022.126834

[6] Jamison, J.E., 1972. *Numerical range and numerical radius in quaternionic Hilbert spaces*. Doctoral Dissertation, University of Missouri. DOI: not available

[7] Kippenhahn, R., 1951. Uber die Wertvorrat einer Matrix. *Math. Nachr.*, 6, pp. 193-228. DOI: 10.1002/MANA.19510060306

[8] Kuipers, J.B., 2002. *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton University Press, Princeton. DOI: 10.1515/9780691211701

[9] Nebe, G., 1998. Finite quaternionic matrix groups. *Representation Theory*, 2, pp. 106-223. DOI: 10.1090/s1088-4165-98-00011-9

[10] Rahjoo, M., Aghamollaei, Gh. and Momenaee Kermani, H., 2021. On the boundedness of quaternionic numerical ranges with respect to nonstandard involutions. *Linear Algebra Appl.*, 610, pp. 59-72. DOI: 10.1016/j.laa.2020.09.036

[11] Rodman, L., 2014. *Topics in Quaternion Linear Algebra*. Princeton University Press, Princeton. DOI: 10.23943/princeton/9780691161853.001.0001

[12] Vince, J., 2011. *Quaternions for Computer Graphics*. Springer, London. DOI: 10.1007/978-1-4471-7509-4

[13] Zhang, F., 1997. Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra Appl.*, 251, pp. 21-57. DOI: 10.1016/0024-3795(95)00543-9

# Some results on nonstandard quaternionic numerical ranges of matrices

**Gholamreza Aghamollaei**(1), 6 and **Meysam Rahjoo**(2)

(1) Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

(2) Kuhbanan Department of Education, Kuhbanan, Iran

Communicated by: Mehrdad Namdari
Received: 25 July 2024 Accepted: 24 February 2025

**Abstract:** Let $\phi$ be a nonstandard involution on the set of all quaternion numbers and $\alpha$ be a quaternion such that $\phi(\alpha) = \alpha$. For any square quaternion matrix $A$, the numerical range of $A$ with respect to $\phi$ (shortly, the nonstandard quaternionic numerical range of $A$), is denoted by $W_\phi^{(\alpha)}(A)$. If $\alpha \neq 0$, then $W_\phi^{(\alpha)}(A) = \phi(\gamma)W_\phi^{(1)}(A)\gamma$ for some quaternion $\gamma$ with $\phi(\gamma)\gamma = \alpha$. So, the focus is on two particular nonstandard quaternionic numerical ranges $W_\phi^{(0)}(A)$ and $W_\phi^{(1)}(A)$. In this paper, a description of the intersection of $W_\phi^{(1)}(.)$ with a $2-$dimensional space is given, and then by using it, $W_\phi^{(1)}(.)$ is studied for $\phi-$hermitian quaternion matrices. After that, a class of quaternion matrices for which $W_\phi^{(0)}(.)$ and $W_\phi^{(1)}(.)$ are equal, is given. For further research, an open problem in the form of a conjecture is also given.

**Keywords**: quaternion matrices, numerical range, nonstandard involution, $\phi-$hermitian quaternion matrix.



[6]Corresponding author.
*E-mail addresses:* (Gh. Aghamollaei) aghamollaei@uk.ac.ir, (M. Rahjoo) rahjoo.meysam@gmail.com