مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۱، ص ۱–۱۳

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.47103.2280

نتایجی درباره‌ی عملگرهای WCT فردهلم روی فضاهای اورلیچ

سعیده شمسی گمچی [(۱)] [۱] و سهیلا نجومی [(۲)]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
[(۲)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

دبیر مسئول: محمد اسماعیل سامعی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۱۷

چکیده: در این مقاله به بررسی عملگرهای نوع شرطی وزن‌دار (WCT) روی یکی از تعمیم‌های فضاهای L^p، موسوم به فضاهای اورلیچ پرداخته و شرط لازم و کافی برای کرانداری و بردبسته‌بودن عملگرهای (WCT) ارائه می‌شود. همچنین به بررسی ارتباط نزدیک مفاهیم دوسویی بودن، برد بسته بودن و فردهلم بودن این نوع عملگرها در فضای اورلیچ زمانی که فضای اندازه غیراتمی باشد می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضای اورلیچ، عملگرهای نوع شرطی وزن‌دار، عملگرهای امید شرطی وزن‌دار، عملگرهای فردهلم، فضای اندازه.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

۱ تاریخچه

در نظریه عملگرها، بررسی عملگرها از سه دیدگاه قابل تحقیق است. این سه دیدگاه شامل فضاهای زمینه‌ای که این عملگرها روی آن فضاها تعریف می‌شوند. بعد بررسی خواص عملگری شامل کرانداری، فشردگی، فردهلم بودن، داشتن برد بسته و سایر خواص عملگری است. نهایتاً بررسی طیف این عملگرها می‌باشد.

اهمیت عملگرها در تجزیه و تحلیل ساختارهای جبری و توپولوژیکی فضاهای زمینه است. یکی دیگر از ابزارهای مهم که در بررسی رده وسیعی از عملگرها کاربرد دارد عملگر امید شرطی E است. باید خاطر نشان کنیم که مفهوم امید شرطی در اصل در نظریه احتمال مطالعه می‌شود. ترکیب عملگر امید شرطی و عملگر ضربی یکی از ابزارهای مفید در مطالعه عملگرهای دیگر مانند عملگرهای ضربی و عملگرهای امید شرطی ضربی و عملگرهای امید شرطی ضربی وزن‌دار می‌باشد. ریاضیدانان زیادی، خواص اساسی عملگرهای ضربی و ترکیبی روی فضاهای توابع اندازه‌پذیر را بررسی کرده‌اند. برای جزئیات بیشتر می‌توان مراجع [۵]، [۶]، [۸] و [۲] را نگریست.

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(S. Nojoumi) nojoumi.soh@student.pnu.ac.ir, (S. Shamsigamchi) s.shamsi@pnu.ac.ir

۲ تعاریف و مقدمات

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و فرض کنید $T : X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد. T را فردهلم گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱. $\ker(T)$ از بعد متناهی باشد.

۲. $\mathrm{Rang}(T) = T(X)$ بسته باشد.

۳. $\mathrm{Coker}(T)$ از بعد متناهی باشد که در آن

$$\mathrm{Coker}(T) := \frac{Y}{T(X)}.$$

اگر $T : X \to Y$ نگاشت خطی باشد هم‌بعد از T در Y چنین تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Codim}(T(X)) = \dim(\frac{Y}{T(X)}).$$

همچنین

$$\mathrm{defect}(T) = \mathrm{def}(T) := \mathrm{Codim}(T(X)),$$

و اگر عملگر کراندر T فردهلم باشد شاخص آن را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{index}(T) = \mathrm{ind}(T) := \mathrm{nul}(T) - \mathrm{def}(T).$$

همه‌ی عملگرهای فردهلم از X به Y را با نماد $F(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. برای اطلاعات بیشتر در خصوص عملگرهای فردهلم مراجع [۳، ۹] را بنگرید.

تابع $\Phi : [\circ,\infty) \longrightarrow [\circ,\infty]$ را تابع یانگ گویند هرگاه Φ محدب باشد و $\Phi(\circ) = \circ$ و $\Phi \not\equiv \circ$ (Φ متحد با صفر نباشد). به سادگی نتیجه می‌شود که محدب بودن تابع یانگ Φ و شرط $\Phi(\circ) = \circ$ نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{x\to\circ^+} \Phi(x) = \circ.$$

همچنین شرط تحدب تابع یانگ Φ و این‌که $\Phi \not\equiv \circ$ نتیجه می‌دهد؛

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty.$$

به ازای تابع یانگ Φ اعداد زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$a_\Phi := \sup\{a \geqslant \circ \;:\; \Phi(a) = \circ\}\ ,\ b_\Phi := \inf\{b > \circ : \Phi(b) = \infty\}.$$

همچنین تابع یانگ Φ در بازه‌ی $[\circ, b_\Phi)$ پیوسته و نانزولی است. همچنین روی بازه‌ی $[a_\Phi, b_\Phi)$، اکیداً صعودی است. فرض کنید $\Phi : [\circ,\infty) \longrightarrow [\circ,\infty]$ تابع یانگ باشد. وارون تعمیم‌یافته (یا وارون راست–پیوسته‌ی) $\Phi^{-\text{۱}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi^{-\text{۱}}(+\infty) = \lim_{y\to+\infty} \Phi^{-\text{۱}}(y) \quad , \quad \Phi^{-\text{۱}}(y) = \inf\{x \geqslant \circ :\; \Phi(x) > y\} \quad (y \in [\circ, +\infty)).$$

به‌ازای هر $\circ \leqslant x < +\infty$، $\Phi(\Phi^{-\text{۱}}(x)) \leqslant x$. اگر $\Phi(x) < +\infty$ آن‌گاه $x \leqslant \Phi^{-\text{۱}}(\Phi(x))$. همین‌طور اگر (Φ,Ψ) یک زوج از توابع یانگ مکمل باشند، آن‌گاه

$$x < \Phi^{-\text{۱}}(x)\Psi^{-\text{۱}}(x) \leqslant \text{۲}x,$$

برای هر $x \geqslant \circ$ برقرار است [۱۰].

اگر Φ تابع یانگ باشد، در این‌صورت تعریف می‌کنیم؛

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) \;:\; x \geqslant \circ\} \;\; (y \in \mathbb{R}).$$

Ψ را تابع مکمل Φ می‌نامند. از تعریف واضح است که Ψ تابعی محدب و صعودی و زوج است و به‌علاوه

$$\Psi(\circ)=\circ,\quad \lim_{y\to\infty}\Psi(y)=+\infty.$$

توجه شود همان‌طور که تابع یانگ Ψ، تابع مکمل تابع Φ است، تابع یانگ مکمل Ψ، تابع Φ است. به همین خاطر، زوج (Φ,Ψ) را یک زوج مکمل از توابع یانگ می‌نامند. از تعریف به راحتی می‌بینیم زوج (Φ,Ψ) در نامساوی

$$xy\leqslant\Phi(x)+\Psi(y)\quad (x,y\in\mathbb{R}),$$

معروف به نامساوی یانگ صدق می‌کنند.

یک N–تابع یک تابع یانگ است که فقط در صفر، صفر است، فقط مقادیر حقیقی متناهی را اختیار می‌کند به‌طوری‌که $\lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\infty$ و $\lim_{x\to\circ^+}\frac{\Phi(x)}{x}=\circ$. توجه می‌کنیم که $a_\Phi=\circ$ و $b_\Phi=\infty$ و مانند آن‌چه در قبل گفته شده Φ روی بازه‌ی $[\circ,\infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است. به‌علاوه مکمل یک N–تابع دوباره یک N–تابع است، [۴]. این توابع را توابع نیکوی یانگ یا N–تابع می‌نامند.

گوییم تابع یانگ Φ قوی‌تر از تابع یانگ Ψ است و با نماد

$$\Phi\overset{\ell}{>}\Psi\quad[\Psi\overset{\ell}{<}\Phi \text{ یا }],$$

نمایش می‌دهیم هرگاه برای بعضی $a\geqslant\circ$، $x_\circ>\circ$ با $x\geqslant x_\circ$ با $\Psi(x_\circ)<\infty$ داشته باشیم

$$\Psi(x)\leqslant\Phi(ax).$$

اگر $x_\circ=\circ$ برقرار باشد، گوییم Φ به‌طور سرتاسری (یا برای مقادیر بزرگ) قوی‌تر از Ψ است و آن را با نماد $\Psi\overset{\alpha}{<}\Phi$ یا $\Phi\overset{\alpha}{>}\Psi$ نمایش می‌دهیم. گوییم تابع یانگ Φ در شرط $\triangle_۲$ در بی‌نهایت صدق می‌کند اگر

$$\Phi(۲x)\leqslant k\Phi(x)\quad (x\geqslant x_\circ\geqslant\circ),$$

برای بعضی مقادیر ثابت مانند $k>\circ$ و $x_\circ\geqslant\circ$ می‌نویسیم $\Phi\in\triangle_۲$. همچنین گوییم تابع Φ به‌طور سرتاسری (یا برای مقادیر بزرگ) در شرط $\triangle_۲$ صدق می‌کند هرگاه رابطه‌ی بالا برای $x_\circ=\circ$ برقرار باشد. گوییم تابع یانگ Φ در شرط $\triangle'$ (∇') در بی‌نهایت (∞) صدق می‌کند اگر عددی مانند $c>\circ$ $(b>\circ)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}\Phi(xy)&\leqslant c\Phi(x)\Phi(y)\quad (x,y\geqslant x_\circ\geqslant\circ),\\ (\Phi(bxy)&\geqslant\Phi(x)\Phi(y))\quad (x,y\geqslant x_\circ\geqslant\circ).\end{aligned}$$

اگر $x_\circ=\circ$ آن وقت گوییم که این خاصیت به‌طور سرتاسری (یا برای مقادیر بزرگ) برقرار است. توجه کنید که اگر $\Phi\in\Delta'$ آن‌گاه $\Phi\in\Delta_۲$. اگر f تابعی اندازه‌پذیر روی X باشد منظور از محمل f عبارت است از

$$S(f)=\{x\in X|f(x)\neq\circ\}.$$

فرض کنید $(X,\sum,\mu)$ یک فضای اندازه‌ی σ–متناهی باشد. $L^p(X,\sum,\mu)$ فضای تمام توابع اندازه‌پذیر مختلط مقدار است که $L^p(\sum)$–نرم آن‌ها متناهی است یعنی $\|f\|_p=\left(\int_X|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$. فضای اندازه‌ی $L^p(X,\sum,\mu)$ را به‌طور خلاصه $L^p(\sum)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$L^p(X,\sum,\mu)=\left\{f:X\longrightarrow\mathbb{C}:\int|f|^pd\mu<\infty\ ,\ \text{ اندازه‌پذیر است } f\right\}.$$

همچنین مجموعه‌ی تمام توابع $\sum$–اندازه‌پذیر را با L° نشان می‌دهیم

$$L^\circ(X,\sum,\mu)=\{f:X\longrightarrow\mathbb{C}:\ \text{ اندازه‌پذیر است } f\}.$$

برای تابع Φ داده شده فضای

$$L^{\Phi}(\mu)=\left\{f\in L^{\circ}(\sum):\ \ \exists\ \lambda>\circ\ ,\ \int_X \Phi(\lambda f)d\mu<\infty\right\},$$

یک فضای اورلیچ نامیده می‌شود. تعریف می‌کنیم

$$N_{\Phi}(f)=\inf\left\{\lambda>\circ:\int_X \Phi(f/\lambda)d\mu\leqslant ۱\right\}.$$

$(L^{\Phi}(\mu),N_{\Phi}(\cdot))$ یک فضای خطی نرم‌دار است همچنین $(L^{\Phi}(\mu),N_{\Phi}(\cdot))$ یک فضای باناخ است. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\Phi}=\inf\left\{\lambda>\circ:\ \int_X \Phi\left(f/\lambda\right)d\mu\leqslant ۱\right\}.$$

زوج $\left(L^{\Phi}(\mu),\|\cdot\|_{\Phi}\right)$ را فضای اورلیچ تولید شده توسط تابع یانگ Φ گوییم. اگر تعریف کنیم $\Phi(x)=\frac{|x|^p}{p}$ برای $۱<p<\infty$، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{\Phi},\quad L^{\Phi}(X)=L^p(X).$$

مجموعه $A\in\sum$ با اندازه مثبت را یک اتم گویند هرگاه برای هر $F\in\sum$، اگر $F\subseteq A$، آن‌گاه یا $\mu(F)=\circ$ یا $\mu(F)=\mu(A)$. در واقع هر فضای اندازه‌ی σ- متناهی مانند $(X,\sum,\mu)$ یک تجزیه یکتا به‌صورت $X=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\cup B$ دارد به‌طوری‌که $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک مجموعه‌ی شمارای دوبه‌دو مجزا از $\sum$-اتم‌ها و B مجزا از هر A_n، غیراتمی است. فضای اندازه‌ی بدون اتم $(X,\sum,\mu)$ فضای اندازه‌ی غیراتمی نامیده می‌شود. همیشه در یک فضای اندازه‌ی σ-متناهی همه‌ی اتم‌ها، اندازه‌ی متناهی دارند. فضای اندازه‌ی دلخواه $(X,\sum,\mu)$ دارای خاصیت زیرمجموعه‌ی متناهی است هرگاه هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر با اندازه‌ی مثبت آن دارای یک زیرمجموعه‌ی اندازه‌پذیر با اندازه مثبت متناهی باشد.

فرض کنید $(X,\sum,\mu)$ یک فضای σ-متناهی باشد در این‌صورت خانواده‌ای یکتا مانند A از μ-اتم‌های دوبه‌دو مجزا وجود دارد به‌طوری‌که $X\setminus\bigcup_{A_n\in A}A_n$ دارای هیچ اتمی نیست. اتم‌های فضای اندازه‌ی $(X,\sum,\mu)$ را با $\mathcal{U}$ و قسمت غیراتمی را با B نشان می‌دهیم.

متناظر با هر σ-زیرجبر σ-متناهی $A\subseteq\sum$، عملگر $E^A=E$ عملگر امید شرطی تعریف شده روی فضای توابع اندازه‌پذیر نامنفی و با شرایط زیر به‌طور یکتا معین می‌شود [۴]:

۱. $E(f)$ یک تابع A-اندازه‌پذیر است.

۲. برای هر $A\in\mathcal{A}$ اگر $\int_A fd\mu$ موجود باشد، آن‌گاه

$$\int_A fd\mu=\int_A E(f)d\mu.$$

این عملگر یکی از ابزارهای اصلی در کار ما خواهد بود. از این‌رو بعضی از خواص مهم آن را در زیر می‌آوریم

۱. E^Af یک عملگر روی $L^{۱}(\sum)$ و $L^{\infty}(\sum)$ است.

۲. E^A خودتوان است.

۳. برد عملگر E^A روی فضاهای $L^{۱}(\sum)$ و $L^{\infty}(\sum)$ به‌صورت زیر است:

$$E^A(L^{۱}(\sum))=L^{۱}(A),\quad E^A(L^{\infty}(\sum))=L^{\infty}(A).$$

۴. اگر f و g حقیقی مقدار با شرط $g\leqslant f$ باشند آن‌گاه $E(g)\leqslant E(f)$.

۵. اگر g، A-اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه، $E(fg)=E(f)g$.

۶. اگر a تابع مختلط مقدار و f تابع A-اندازه‌پذیر باشد آن‌گاه $E(af)=aE(f)$.

۷. $E(1) = 1$.

۸. $\Phi(E(f)) \leqslant E(\Phi(f))$ جایی‌که Φ تابع محدب باشد.

۹. اگر $f \geqslant 0$ آن‌گاه $E(f) \geqslant 0$ و اگر $f > 0$ آن‌گاه $E(f) > 0$.

۱۰. برای هر $f \geqslant 0$، $S(f) \subseteq S(E(f))$، جایی‌که $S(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ محمل f و $S(E(f))$ کوچکترین مجموعه‌ی A-اندازه‌پذیر شامل $S(f)$ است.

گوییم زوج (E, Φ) در نوع شرطی تعمیم‌یافته نامساوی هولدر یا به اختصار نامساوی GCH [۲] صدق می‌کند هرگاه برای بعضی مقادیر مثبت c و برای هر $f \in L^{\Phi}(X, \sum, \mu)$ و $g \in L^{\Psi}(X, \sum, \mu)$ داشته باشیم

$$E(|fg|) \leqslant c\Phi^{-1}(E(\Phi(|f|)))\Psi^{-1}(E(\Psi(|g|))),$$

جایی‌که Ψ مکمل تابع یانگ Φ است. مثال‌های زیادی از زوج (E, Φ) که در نامساوی GCH صدق می‌کند در مرجع [۷] قابل مراجعه است. فرض کنید $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی اندازه‌پذیر مثبت باشد یعنی $u \in L^{0}_{+}(X, \sum, \mu)$. ضابطه‌ای که u را به uf نسبت می‌دهد، یک تبدیل خطی روی $L^{0}(X)$ تعریف می‌کند که آن را با M_u نمایش داده و در حالتی که M_u پیوسته باشد، آن را عملگر ضربی ایجاد شده توسط u می‌خوانیم

$$M_u(f) = uf,$$
$$M_u(f)(t) = u(t)f(t) \quad (t \in X).$$

فرض کنید Φ و Ψ توابع یانگ و $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌ی $(X, \sum, \mu)$ باشد. عملگر امید شرطی ضربی [۳] یا به اختصار MCE از $L^{\Phi}(\sum)$ به توی $L^{\Psi}(\sum)$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$EM_u(f) = E(uf),$$

برای هر $f \in L^{\Phi}(\sum)$ به‌طوری‌که $E(uf) \in L^{\Psi}(A)$ باشد، [۴]. در مرجع [۴] بعضی خاصیت‌های عملگر MCE از جمله کرانداری و بردبسته داشتن عملگرهای امید شرطی ضربی در فضاهای مختلف اورلیچ بررسی شده است. در این مقاله ویژگی‌های مذکور را برای همه عملگرهای امید شرطی وزن‌دار روی فضاهای اورلیچ بررسی می‌کنیم.

۳ نتایج اصلی

در این بخش شرایطی که اجازه می‌دهد عملگر WCT، $T = M_wEM_u$ یک عملگر کراندار روی فضای اورلیچ $L^{\Phi}(\mu)$ باشد را تعیین می‌کنیم. در ادامه شرایط لازم و کافی برای بردبسته داشتن و فردهلم بودن عملگرهای امید شرطی وزن‌دار روی فضاهای اورلیچ را به‌دست می‌آوریم. حال تعریف اصلی عملگر امید شرطی وزن‌دار را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید Φ یک تابع یانگ باشد و $u, w : X \longrightarrow \mathbb{C}$ توابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌ی $(X, \sum, \mu)$ باشند. عملگر نوع شرطی وزن‌دار (WCT) [۴] از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Phi}(\sum)$ با ضابطه‌ی $wEM_u(f) = wE(uf)$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که برای هر $f \in L^{\Phi}(\sum)$ داشته باشیم $wE(uf) \in L^{\Phi}(A)$.

قضیه ۲.۳. فرض کنید Φ تابع یانگ باشد که در شرایط $\triangle'$ صدق کرده، Ψ تابع یانگ مکمل تابع یانگ Φ باشد و $u \in L^{0}(\sum)$ ($L^{0}(\sum)$ فضای توابع $\sum$-اندازه‌پذیر روی X است). همچنین فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی σ- متناهی و A یک σ-زیرجبر از σ-جبر $\sum$ باشد به‌طوری‌که $A \subset \sum$ و (X, A, μ_A)، σ-متناهی باشد و $L^{\infty}(\sum) \subseteq L^{\Phi}(\sum) \subseteq L^{1}(\sum)$. به‌علاوه فرض کنید (E, Φ) در نوع شرطی تعمیم‌یافته‌ی نامساوی هولدر صدق کند و $v = \Psi^{-1}E(\Psi(u)) \in L^{\infty}(\sum)$. اگر عملگر $T = EM_u$ از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی خودش یک به یک و بردبسته باشد آن‌گاه مجموعه‌ای با اندازه مثبت مانند A و $\delta > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که $v = \Psi^{-1}E(\Psi(u)) \geqslant \delta$ تقریباً همه‌جا روی A.

---

[۲] The generalized conditional type Holder inequality
[۳] Multiplication conditional expectation operator
[۴] Weighted conditional type operator

اثبات. با توجه به اینکه (E,Φ) در شرط نامساوی هولدر تعمیم‌یافته نامساوی هولدر صدق می‌کند پس $c>0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $f\in L^{\Phi}(\sum)$ و $g\in L^{\Psi}(\sum)$ داریم:

$$E(|fg|)\leq c\Phi^{-1}(E(\Phi(|f|)))\Psi^{-1}(E(\Psi(|g|))).$$

قرار می‌دهیم $M=\|\Psi^{-1}(E(\Psi(|u|)))\|_{\infty}$. در این‌صورت برای هر $f\in L^{\Phi}(\sum)$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_X\Phi\left(\frac{E(uf)}{Mc\|f\|_{\Phi}}\right)d\mu&\leq\int\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}\left(E\left(\Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\Phi}}\right)\right)\right)\Psi^{-1}\left(E\left(\Psi(u)\right)\right)}{M}\right)d\mu\\&\leq\int\Phi\left(\Phi^{-1}\left(E\left(\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_{\Phi}}\right)\right)\right)\right)d\mu\\&\leq\int E\left(\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_{\Phi}}\right)\right)d\mu\\&=\int\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_{\Phi}}\right)d\mu\leq 1.\end{aligned}$$

در نتیجه $||E(uf)||_{\Phi}\leq Mc||f||_{\Phi}$. پس $||EM_u||\leq Mc$. از آنجاییکه EM_u یک به یک و بردبسته است پس از پایین کراندار نیز است. از این‌رو $\delta>0$ وجود دارد که برای هر $f\in L^{\Phi}(\sum)$،

$$\|EM_uf\|_{\Phi}\geqslant\delta\|f\|_{\Phi}.$$

پس $\|EM_u\|\geq\delta$. از طرفی با توجه به اینکه $\|EM_u\|\leq Mc$ نتیجه می‌گیریم $Mc\geq\delta$ پس

$$\|\Psi^{-1}(E(\Psi(u)))\|_{\infty}=M\geq\frac{\delta}{c}.$$

بنابراین مجموعه اندازه‌پذیر $A\in\Sigma$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(A)>0$ و $\Psi^{-1}(E(\Psi(u)))\geq\delta$ تقریبا همه جا روی A. □

در قضیه‌ی بعدی ما به عملگر کراندار EM_u از L^{Φ} به‌توی L^{Ψ} وقتی‌که Φ و Ψ توابع یانگ مختلف باشند و $\Phi<\Psi$ است می‌پردازیم.

قضیه **۳.۳**. فرض کنید $\Phi<\Psi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع مکمل به‌ترتیب Φ و Ψ باشند و $\Phi\in\triangle'$. آن‌گاه
(الف) اگر عملگر EM_u از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ یک به یک و بردبسته باشد آن‌گاه

۱. $v=0$ تقریباً همه‌جا روی B و مجموعه‌ی $\{n\in\mathbb{N}:v(A_n)\neq 0\}$ متناهی است.

۲. M_v از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ دارای رتبه متناهی است. جایی‌که $v=\Psi^{-1}(E(\Psi(|u|)))$ و $S=\{x\in X:v(x)\neq 0\}$.

(ب) شرایط زیر را در نظر بگیرید

۱. عملگر EM_u برد بسته دارد.

۲. عملگر EM_u دارای رتبه متناهی است (برد با بعد متناهی است).

۳. $v=0$ تقریباً همه‌جا روی B و مجموعه‌ی $N_v=\{n\in\mathbb{N}:v(A_n)\neq 0\}$ متناهی است.

۴. $E(u)=0$ تقریباً همه‌جا روی B و مجموعه‌ی $N_{E(u)}=\{n\in\mathbb{N}:E(u)(A_n)\neq 0\}$ متناهی است.

آن‌گاه

$$(۳)\Longrightarrow(۲)\Longrightarrow(۱)\Longrightarrow(۴).$$

(پ) اگر $u\geqslant 0$، آن‌گاه در قسمت (b) حالت‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) معادلند.

اثبات (الف): فرض کنید $f \in L^{\Phi}(\sum)$ باشد. آن‌گاه

$$\|EM_uf\|_{\Psi} \leqslant \int_X \Psi\left(\frac{E(uf)}{k\|f\|_{\Psi}}\right) d\mu.$$

با قرار دادن $k = c'c$ و استفاده از نامساوی هولدر-GCH داریم:

$$\begin{aligned}
\|EM_uf\|_{\Psi} &\leqslant \int_X \Psi\left(\frac{E(uf)}{c'c\|f\|_{\Psi}}\right) d\mu \\
&\leqslant \int_X \Psi\left(\frac{1}{cc'}\Psi^{-1}\left(E\left(\Psi\left(\frac{uf}{\|f\|_{\Psi}}\right)\right)\right)\right) d\mu \\
&\leqslant \int_X \Psi\left(\frac{c}{cc'}\Psi'^{-1}\left(E\left(\Psi'\left(\frac{f}{\|f\|_{\Psi}}\right)\right)\right)\Psi^{-1}(E(\Psi(u)))\right) d\mu \\
&\leqslant \int_X \frac{1}{c'}\Psi\left(\Psi'^{-1}\left(E\left(\Psi'\left(\frac{f}{\|f\|_{\Psi}}\right)\right)\right)\Psi^{-1}(E(\Psi(u)))\right) d\mu.
\end{aligned}$$

می‌دانیم $\Phi \in \triangle'$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\|EM_uf\|_{\Psi} &\leqslant \int_X \frac{1}{c'}c'\Psi\left(\Psi'^{-1}\left(E\left(\Psi'\left(\frac{f}{\|f\|_{\Psi}}\right)\right)\right)\right)\Psi(\Psi^{-1}(E(\Psi(u))))d\mu \\
&= \int_X \Psi(v)E\left(\Psi\left(\frac{f}{\|f\|_{\Psi}}\right)\right) d\mu \\
&\leqslant \int_X \Psi\left(\frac{vf}{\|f\|_{\Psi}}\right) d\mu \\
&\leqslant \|M_vf\|_{\Psi}.
\end{aligned}$$

چون طبق فرض EM_u یک به یک و بردبسته است، آن‌گاه $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $f \in L^{\Phi}(\sum)$،

$$\|EM_uf\|_{\Psi} \geqslant \delta\|f\|_{\Phi}.$$

پس

$$\|M_vf\|_{\Psi} \geqslant \|EM_uf\|_{\Phi} \geqslant \delta\|f\|_{\Phi}.$$

بنابراین برای هر $f \in L^{\Phi}(\sum)$،

$$\|M_vf\|_{\Psi} \geqslant \delta\|f\|_{\Phi}.$$

این بدان معناست که M_v از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ دارای برد بسته است. پس طبق مرجع [۱۱]، $v = 0$ تقریباً همه‌جا روی B و مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است. همچنین، M_v از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ دارای رتبه متناهی بوده و برد M_v از بعد متناهی است.

(ب): اگر $\mu(S) = 0$، آن‌گاه EM_u عملگر صفر است. بنابراین فرض کنیم $\mu(S) > 0$ باشد.

اثبات (۳) $\Longleftarrow$ (۲). اگر (۳) برقرار باشد، آن‌گاه $S = \bigcup_{n \in N_v} A_n = \bigcup_{i=1}^{k} A_{n_i}$ برای بعضی عدد صحیح $k > 0$ است. از این‌رو

$$EM_u(L^{\Phi}(X, \sum, \mu)) \subseteq L^{\Phi}(S, A_s, \mu).$$

چون برای هر $f \in L^{\Phi}(X, \sum, \mu)$، $S(E(\Psi(uf))) \subseteq S$ است، در نتیجه EM_u دارای رتبه متناهی است.

اثبات (۲) $\Longleftarrow$ (۱) بدیهی است.

اثبات (۱) $\Longleftarrow$ (۴). فرض کنید (۱) برقرار باشد یعنی EM_u دارای برد بسته است. ابتدا نشان می‌دهیم که $E(u) = 0$ تقریباً همه‌جا روی B. برای اثبات از فرض خلف استفاده می‌کنیم یعنی فرض کنید

$$\mu\left(\{x \in B : E(u)(x) \neq 0\}\right) > 0.$$

آن‌گاه برای بعضی $\delta > 0$ داریم:
$$\mu\left(\{x \in B : E(u)(x) > \delta\}\right) > 0.$$
مجموعه‌ی $G = \{x \in B : E(u)(x) > \delta\}$ و یک تابع v روی G را با ضابطه‌ی $v(x) = \frac{1}{E(u)(x)}$ برای $x \in G$ تعریف می‌کنیم. برای هر $f \in L^{\Phi}(G)$ و $g \in L^{\Psi}(G)$ داریم:

$$M_v E M_u(f) = v(E(u)|_G) f = f,$$
$$M_E(u)|_G M_v(g) = g.$$

پس M_v عملگر وارون از $EM_{u|_{L^{\Phi}(G)}} = M_{E(u)|_G}$ می‌باشد و $EM_{u|_{L^{\Phi}(G)}} = M_{E(u)|_G}$ عملگری کراندار از $L^{\Phi}(G)$ به‌توی $L^{\Psi}(G)$ است که دارای برد بسته است.

برای هر $E \in \mathcal{A}_G = \{A \cap G : A \in \mathcal{A}\}$ با $\mu(E) < \infty$، قرار دهید $f = \frac{1}{E(u)(x)} \chi_E(x)$. آن‌گاه $f \in L^{\Phi}(G)$. به‌علاوه $M_{E(u)} f = \chi_E$ و بنابراین $\chi_E \in M_{E(u)}(L^{\Phi}(G))$. از این‌رو $M_{E(u)}(L^{\Phi}(G))$ شامل همه ترکیبات خطی از چنین χ_Eهایی می‌باشد، زیرا $M_{E(u)}$ بردبسته دارد و همه ترکیبات خطی از چنین χ_Eهایی در $L^{\Psi}(G)$ چگال هستند. آن‌گاه $M_{E(u)}(L^{\Phi}(G)) = L^{\Psi}(G)$. این دلالت بر آن دارد که M_v نگاشتی کراندار از $L^{\Psi}(G)$ به‌توی $L^{\Phi}(G)$ است. چون G، غیر اتمی است پس طبق قضیه‌ی ۱.۴ از مرجع [۱۱]، تقریباً همه‌جا روی G، $v = 0$ که این یک تناقض است.

اکنون نشان می‌دهیم که $N_{E(u)}$ متناهی است. اگر $N_{E(u)} = \varnothing$ باشد چیزی برای اثبات نمی‌ماند.

زیرا $\mu(S) > 0$، و این به آن معناست که $N_{E(u)} \neq \varnothing$. برای $x \in S$ قرار دهید $w(x) = \frac{1}{E(u)(x)}$. حال به عملگر M_w می‌پردازیم. همچنین قرار دهید $f = \frac{1}{E(u)(x)} \chi_{A_n}(x)$، آن‌گاه $f \in L^{\Phi}(G)$ است. با روش مشابه پاراگراف قبلی مشاهده می‌شود که نگاشت M_w از $L^{\Psi}(S)$ به‌توی $L^{\Phi}(S)$ نگاشتی کراندار است. پس طبق قضیه‌ی ۱.۴ از مرجع [۱۱] داریم:

$$b = \sup_{n \in N_{E(u)}} \frac{1}{\theta^{-1}|E(u)(A_n)|\mu(A_n)} = \sup \frac{|\theta w(A_n)|}{\mu(A_n)} < \infty, \quad n \in N_E(u),$$

جایی‌که Φ و Ψ و θ توابع یانگ هستند که فقط در صفر، صفر می‌شوند. این توابع فقط مقادیر متناهی می‌گیرند و $\theta, \Psi \in \triangle_2$ و برای هر $x, y \geqslant 0$، $\Psi(xy) \leqslant \Phi(x) + \theta(y)$ می‌باشد. چون $N_{E(u)} \neq \varnothing$، آن‌گاه $b > 0$ و $\theta|E(u)(A_n)|\mu(A_n) \geqslant \dfrac{1}{b}$.
پس $E(u) \in L^{\theta}(X, A, \mu)$ و بنابراین

$$\sum_{n \in N_{E(u)}} \frac{1}{b} \leqslant \|E(u)\|_{\theta} < \infty.$$

این دلالت دارد بر این‌که $N_{E(u)}$ متناهی است.

(پ): اگر $u \geqslant 0$، آن‌گاه طبق بعضی ویژگی‌های E، $S(E(u)) = S(v)$ و بنابراین داریم $N_v = N_{E(u)}$. پس $(۴) \Longleftarrow (۳)$ برقرار است و این اثبات را کامل می‌کند. روشن است طبق قضایای قبلی، هیچ عملگر ضربی نوع شرطی غیر صفر بردبسته EM_u با شرط $u \geqslant 0$ از L^{Φ} به‌توی L^{Ψ} زمانی‌که $\Phi < \Psi$، و Φ و Ψ توابع یانگ باشند و فضای اندازه غیراتمی باشد، وجود ندارد.

قضیه ۴.۳. فرض کنید Φ و Ψ توابع یانگ باشند، $\Phi < \Psi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع یانگ مکمل به‌ترتیب Φ و Ψ باشند.
(الف) اگر عملگر EM_u از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ یک به یک و برد بسته باشد آن‌گاه:

۱. مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

۲. M_v از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ رتبه متناهی دارد جایی‌که $v = \Psi^{-1}(E(\Psi(u)))$ و $S = \{x \in X : v(x) \neq 0\}$.

(ب) فرض کنید

۱. عملگر EM_u بردبسته دارد.

۲. عملگر EM_u رتبه متناهی دارد.

۳. مجموعه‌ی $N_v = \{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

۴. مجموعه‌ی $N_{E(u)} = \{n \in \mathbb{N} : E(u)(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

آن‌گاه
$$(3) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (1) \Longrightarrow (4).$$

(پ) اگر $u \geqslant 0$، آن‌گاه در قسمت (b) حالات (۱) و (۲) و (۳) و (۴) معادلند.

اثبات (الف): فرض کنید $f \in L^{\Phi}(\sum)$ باشد. آن‌گاه $\|EM_uf\|_\Psi \leqslant \|M_vf\|_\Psi$. چون T یک به یک و بردبسته است، آن‌گاه برای هر $f \in L^{\Phi}(\sum)$، $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|EM_uf\|_\Psi \geqslant \delta\|f\|_\Phi.$$

پس برای هر $f \in L^{\Phi}(\sum)$،
$$\|M_vf\|_\Psi \geqslant \|EM_uf\|_\Phi \geqslant \delta\|f\|_\Phi.$$

این به آن معناست که M_v از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ بردبسته دارد. لذا طبق مرجع [11]، مجموعه‌ی $\{n \in \mathbb{N} : v(A_n) \neq 0\}$ متناهی است و M_v از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ رتبه متناهی دارد.

(ب): از قضیه‌ی ۲.۳ از مرجع [6] داریم $v = 0$ روی B و بنابراین تقریباً همه‌جا روی B، $E(u) = 0$ است. با روشی مشابه به آسانی می‌توان نشان داد که (۱) $\Longrightarrow$ (۲) $\Longrightarrow$ (۳) برقرار است. بنابراین کافیست (۴) $\Longrightarrow$ (۱) را نشان می‌دهیم.

فرض کنید $N_{E(u)} \neq \varnothing$. قرار می‌دهیم $S = S(E(u))$. آن‌گاه می‌توان نوشت $S = \cup_{n \in N_{E(u)}} A_n$. تابع w را روی S با ضابطه‌ی زیر برای هر $x \in S$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$w(x) = \frac{1}{E(u)(x)}.$$

با روشی مشابه که در اثبات $L^{\Phi}(S)$ استفاده نمودیم، طبق قضیه‌ی ۱.۳ از مرجع [11]، داریم $w \in L^{\theta}(A)$، جایی‌که Φ و Ψ و θ توابع یانگ هستند که فقط در صفر، صفر می‌شوند، مقادیر متناهی می‌گیرند، $\Psi, \theta \in \triangle_2$ و برای هر $x, y \geqslant 0$ داشته باشیم؛

$$\Psi(xy) \leqslant \Phi(x) + \theta(y).$$

قضیه‌ی ۱.۴ از مرجع [11] می‌گوید که

$$b = \sup \frac{\theta^{-1}|E(u)(A_n)|}{\mu(A_n)} < \infty.$$

چون $N_{E(u)} \neq \varnothing$، در نتیجه $b > 0$ و چون برای هر $n \in N_{E(u)}$، داریم $\sum_{n \in N_{E(u)}} \frac{1}{b} \leqslant \|w\|_\theta < \infty$. پس $N_{E(u)}$ متناهی است.

(پ): به کمک همان روشی که در اثبات قسمت (پ) قضیه ۴.۳ استفاده نمودیم اثبات آسان است. در ادامه به تابع A–اندازه‌پذیر u می‌پردازیم. در این حالت $E(u) = u$ و $EM_u = M_u|_{L^{\Phi}(A)}$. بنابراین نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۵.۳. فرض کنید Ψ و Φ توابع یانگ باشند، $\Phi > \Psi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع یانگ مکمل به‌ترتیب Φ و Ψ باشند. اگر $u \in L^{\circ}(A)$ و EM_u روی $L^{\Phi}(\sum)$ یک‌به‌یک باشد آن‌گاه عملگر EM_u بردبسته دارد اگر و تنها اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $|u| \geqslant \delta$ تقریباً همه‌جا روی S، $S = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$.

نتیجه ۶.۳. فرض کنید Ψ و Φ توابع یانگ باشند، $\Phi > \Psi$ و فرض کنید Φ' و Ψ' توابع یانگ مکمل به ترتیب Φ و Ψ باشند. اگر $u \in L^{\circ}(A)$ و EM_u از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Psi}(\sum)$ یک به یک باشد آن‌گاه موارد زیر معادلند:

۱. عملگر M_u بردبسته دارد.

۲. عملگر M_u دارای رتبه متناهی است.

۳. $u = 0$ تقریباً همه‌جا روی B و مجموعه‌ی $N_{E(u)} = \{n \in \mathbb{N} : E(u)(A_n) \neq 0\}$ متناهی است.

در قضیه‌ی بعدی توصیفی از فردهلم بودن عملگرهای نوع شرطی ضربی روی فضاهای L^Φ وقتی که فضای اندازه غیراتمی است ارائه خواهیم داد.

قضیه ۷.۳. فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه‌ی غیر اتمی باشد. اگر EM_u یک عملگر کراندار از $L^\Phi(\sum)$ به‌توی $L^\Phi(\mathcal{A})$ باشد، آن‌گاه EM_u فردهلم است اگر و تنها اگر EM_u دوسویی است اگر و تنها اگر EM_u وارون‌پذیر باشد.

اثبات. فرض کنید EM_u فردهلم باشد. آن‌گاه اولاً EM_u بردبسته دارد. ثانیاً $codim(EM_u) < \infty$ است. ابتدا نشان می‌دهیم که EM_u پوشاست. برای این کار از فرض خلف استفاده می‌کنیم یعنی فرض کنید EM_u پوشا نباشد و فرض کنید $f_\circ \in L^\Phi(\mathcal{A}) \setminus R(EM_u)$. آن‌گاه برای بعضی $g_\circ \in L^{\Phi'}(\mathcal{A})$، تابع خطی کراندار $Lg_\circ$ روی $L^\Phi(\mathcal{A})$ وجود دارد که چنین تعریف می‌شود

$$L_{g_\circ}(f) = \int_X f\overline{g_\circ}d\mu, \quad f \in L^\Phi(\mathcal{A}),$$

و $L_{g_\circ}(R(EM_u)) = \circ$ و $L_{g_\circ}(f_\circ) = ۱$. آن‌گاه ثابت مثبت δ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mu(E_\delta = \{x \in X : f_\circ(x)g_\circ(x) > \delta\}) > \circ.$$

چون فضای اندازه غیراتمی است، دنباله‌ی گسسته‌ی $\{E_n\}_n$ به‌طوری‌که $E_n \subseteq E_\delta$ و $\circ < \mu(E_n) < \infty$ را می‌توان یافت. فرض کنید $g_n = g_\circ \chi_{E_n}$. آشکارا $g_n \in L^{\Phi'}(\mathcal{A})$ و برای هر $f \in L^\Phi(\mathcal{A})$ داریم:

$$\int_X \bar{f}(EM_u)^*(g_n)d\mu = \int_X \bar{f}\bar{u}E(g_n)d\mu = \int_X g_\circ E(\bar{u}\bar{f}.\chi_{E_n})d\mu = L_{g_\circ}(EM_u f) = \circ.$$

Φ' تابع یانگ مکمل Φ است و نیز دوگان عملگر امید شرطی ضربی EM_u چنین است:

$$(EM_u)^* = (M_u)^*(E)^* = M_{\bar{u}}E$$
$$M_{\bar{u}}E : L^{\Phi'}(A) \longrightarrow L^{\Phi'}(\sum)$$
$$M_{\bar{u}}E(f) = M_{\bar{u}}f = \bar{u}f.$$

این دلالت دارد بر این‌که $g_n \in N((EM_u)^*)$ و بنابراین $N((EM_u)^*)$ نامتناهی‌البعد است. بنابراین، هم‌بعد از برد EM_u یعنی $R(EM_u)$ متناهی نیست که این خلاف فرض است. بنابراین فرض خلف باطل و باید EM_u پوشا باشد. فرض کنید $\circ \neq f \in L^\Phi(\sum)$ باشد به‌طوری‌که $EM_u(f) = \circ$. چون $S(f) \subseteq S(E(|f|))$ و $\mu(S(f)) > \circ$ و $S(E(|f|))$، A–اندازه‌پذیر است، آن‌گاه $A \in \mathcal{A}$ با $\circ < \mu(A) < \infty$ و $\mu(S(f) \cap A) > \circ$ وجود دارد. همچنین چون فضای اندازه غیر اتمی است، می‌توان یک دنباله از زیرمجموعه‌های A–اندازه‌پذیر $\{A_n\}$ از Aها با $\mu(S(f) \cap A_n) > \circ$ یافت. به‌وضوح $f_n = f.\chi_{S(f)\cap A_n} \in L^\Phi(\sum)$ و $EM_u(f_n) = \chi_{A_n}.EM_u(f) = \circ$ و این به آن معناست که $N(EM_u)$ نامتناهی بعد است که تناقض با فرض فردهلم بودن EM_u می‌باشد. پس EM_u باید یک به یک باشد پس EM_u دوسویی است و بنابراین EM_u باید وارون‌پذیر باشد. برعکس نیز واضح است. □

سرانجام در گزاره‌ی بعدی نشان می‌دهیم که اگر یک تابع غیرصفر در فضای پوچ EM_u وجود داشته باشد به‌طوری‌که محمل آن مجموعه‌ای غیراتمی باشد آن‌گاه EM_u نمی‌تواند فردهلم باشد.

گزاره ۸.۳. فرض کنید EM_u از $L^\Phi(\sum)$ به‌توی $L^\Psi(\sum)$ کراندار باشد. اگر $N(EM_u) \cap L^\Phi(B) \neq \varnothing$، آن‌گاه EM_u نمی‌تواند فردهلم باشد.

اثبات. به کمک همان روشی که در اثبات قضیه‌ی قبلی استفاده نمودیم اثبات گزاره آسان است. □

طبق قضیه‌ای از مرجع [۴] فرض کنیم Φ و Ψ و θ توابع یانگ باشند که فقط در صفر، صفر می‌شوند، فقط مقادیر متناهی می‌گیرند و به‌طوری‌که $\Psi, \theta \in \triangle_۲$ و $\Phi(xy) \leqslant \Psi(x) + \theta(y)$ برای هر $x, y \geqslant \circ$ باشد. اگر EM_u یک عملگر ضربی کراندار از $L^\Phi(\sum)$ به‌توی $L^\Psi(\sum)$ باشد و $\frac{۱}{E(u)} \in L_+^\theta(\sum)$، آن‌گاه EM_u دارای رتبه متناهی است. این معادل با برد بسته بودن EM_u است و باز معادل آنست که مجموعه‌ی $F = \{n \in \mathbb{N} : E(u)(A_n) \neq \circ\}$ متناهی است.

EM_u دارای بردبسته است معادل آنست که $\varepsilon > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $u(w) \geqslant \varepsilon$ تقریباً همه‌جا $w \in \Omega$ و طبق [۲] می‌دانیم که اگر هم‌بعد از برد EM_u متناهی است، آن‌گاه EM_u پوشاست.

قضیه **۹.۳.** فرض کنید $u:\Omega\longrightarrow \mathbb{R}_+$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد به‌طوری‌که $u(w)>0$ تقریباً همه‌جا $w\in\Omega$. اگر $\Phi\in\triangle_2$ (به‌طورسراسری) و EM_u یک عملگر پیوسته از $L^{\Phi}(\sum)$ به‌توی $L^{\Phi}(\sum)$ باشد آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

۱. EM_u دوسویی است.

۲. EM_u فردهلم است.

۳. هم‌بعد EM_u متناهی است.

۴. $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $u(w)\geqslant\varepsilon$ تقریباً همه‌جا $w\in\Omega$.

اثبات. موارد $(1)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(3)$ واضح هستند.
اگر $CodimR(EM_u)<\infty$، آن‌گاه $R(EM_u)$ بسته است و EM_u پوشاست. بنابراین (با $\Psi=\Phi$)، $\varepsilon>0$ وجود دارد به‌طوری‌که $u(w)\geqslant\varepsilon$ تقریباً همه جا $w\in\Omega$. از این‌رو $(3)\Longrightarrow(4)$ برقرار است. کافی است $(4)\Longrightarrow(1)$ را نشان دهیم. اگر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $u(w)\geqslant\varepsilon$ تقریباً همه جا $w\in\Omega$، آن‌گاه طبق مرجع [۲]، عملگر امید شرطی ضربی EM_u پوشاست. در نتیجه $R(EM_u)$ بسته است و $CodimR(EM_u)<\infty$. روشن است که $ker(EM_u)=\{0\}$ یعنی EM_u یک به یک است. بنابراین EM_u دوسویی است. □

۴ نتیجه گیری

در این مقاله، معادل بودن ویژگی‌های عملگری دوسویی بودن و فردهلم بودن برای عملگرهای از نوع شرطی وزن‌دار روی فضاهای اورلیچ اثبات شد.

فهرست منابع

[۱] زیوری رضاپور، محسن، ۱۴۰۱ . روشی محاسباتی برای یک کمینه‌سازی بازآرایی وابسته به مساله پواسون روی قرص یکّه در صفحه. مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، ۳(۱۲)، صص. ۳۳۶ - ۳۴۳. doi:۲۰۰۰.۳۹۷۶۴.۲۰۲۲/jamm.۱۰۲۲۰۲۵

[2] Chawziuk, T., Estaremi, Y. and Hudzik H., 2020. Surjectivity, closed Range, and Fredholmness of the composition and Multiplication operators between possibly distinct Orlicz spaces. *Results in mathematics*, 75 (3), pp. 1-18. doi:org/10.1007/s00025-020-01224-1

[3] Delfin, A., 2018. *Fredholm operators*. (october 25, 2018) university of oregen.

[4] Estaremi, Y., 2020. Some properties of MCE operators between different orlicz spaces. *European Journal of Mathematics,* pp. 1375-1387. doi:10.1007/s40879-019-00367-y

[5] Estaremi, Y., 2015. Some classes of weighted conditional type operators and their spectra. *Positivity*, 19, pp. 83-93. doi:10.1007/s11117-014-0284-6

[6] Estaremi, Y. and Jabbarzadeh, M.R., 2013. Weighted Lambert type operators on L^p-spaces. *Oper Matrices*, pp. 101-116. doi:10.7153/oam-07-05

[7] Estaremi, Y., 2014. Multiplication Conditional expectation type operators on orlicz spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 414, pp. 88-98. doi:10.1016/j.jmaa.2013.12.033

[8] Estaremi, Y., 2017. On properties of Multiplication Conditional type operators between l^p-space. *Filomat*, 31 (7), pp. 1933-1940. doi: 10.2298/FIL1707933E

[9] Murphy, G.J., 1990. C^* *- Algebras and operator Theory*. Academic Press.

[10] Rao, M.M. and Ren, Z.D., 1991. *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York.

[11] Takagi, H. and Yokouchi, K., 1999. Multiplication and composition operators between two L^p-spaces. *Contemp. Math.,* 232, pp. 321-338.

Some Results about Fredholm WCT operators on Orlicz spaces

Saeedeh Shamsigamchi(1) [5] and Soheila Nojoumi(2)

(1) Department of Mathematics, Payame Nour University, P.O. BOX 19395-4697, Tehran, Iran
(2) Department of Mathematics, Payame Nour University, P.O. BOX 19395-4697, Tehran, Iran

Communicated by: Mohammadesmael Samei

Received: 7 June Accepted: 5 February 2025

Abstract:
In this paper, the weighted conditional type operators (WCT) on one of the generalization of the L^P-spaces, known as orlicz spaces, are investigated. Then the necessary and suficient conditions for the boundedness and closed range of the operators (WCT) are presented.
Also we consider the closely related concepts of bijection, closed range and Fredholmness of weighted conditional type operators when the underlying measure space is non-atomic.

Keywords: Orlicz space, Weighted Conditional Type operator (WCT), Weighted Conditional Expectation operator (WCE), Fredholm operator, Measure space.

---

[5]Corresponding author
E-mail addresses:s.shamsi@pnu.ac.ir (S. Shamsi) s.shamsi@pnu.ac.ir, (S. Nojoumi) nojoumi.soh@student.pnu.ac.ir