مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۱، ص ۱۴–۲۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.20016

نتایجی در مورد مدول‌های کوهمولوژی خاص با تکیه‌گاه کراندار

میرصادق سیدصادقی [(۱)] [۱]، سیدحمید مسعودی پورلیر [(۲)] و میریوسف صادقی [(۳)]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
[(۲)] دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
[(۳)] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص.پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

دبیر مسئول: امیدعلی شهنی کرمزاده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷

چکیده: فرض کنید R یک حلقه یکدار، جابجایی و نوتری، J ایده‌الی از R و d عددی صحیح و نامنفی باشد. برای R- مدول M، $\Gamma_{d,J}(M)$ مجموعه همه xهایی از M است که در شرط $Ix \subseteq Jx$ برای ایده‌ال I از R با ویژگی $\dim(R/I) \leq d$ صدق می‌کنند. در این مقاله، با الهام از این مدول، برای R- مدولهای M و N، زیرمدول (d, J)- تاب $\Gamma_{d,J}(M, N)$ از $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ را تعریف کرده و برای هر عدد صحیح نامنفی i، i- امین فانکتور مشتق شده راست آن را با $H^i_{d,J}(M, -)$ نشان داده و برخی ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین با تعریف مجموعه‌های ایده‌الی $\mathrm{W}(d, J)$ و $\tilde{\mathrm{W}}(d, J)$ ، قضایایی را در خصوص ایده‌الهای اول وابسته $H^i_{d,J}(M, N)$ بیان کرده و اثبات می‌نمائیم. در نهایت تحت شرایطی نشان می‌دهیم $H^i_{d,J}(M, N) = 0$.

واژه‌های کلیدی: (d, J)- کوهمولوژی، ایده‌ال‌های اول وابسته، (d, J)- تاب

رده‌بندی ریاضی: 13D45, 13E05, 14B15

۱ مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقه یکدار، جابجایی و نوتری و d عدد صحیح نامنفی می‌باشد. فرض کنید

$$\Sigma = \{\mathfrak{a} \trianglelefteq R |\ \dim(R/\mathfrak{a}) \leq d\}.$$

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(M. Sayedsadeghi) m_sayedsadeghi@pnu.ac.ir, (M. Masoudi Porlir) masoudi.424@student.pnu.ac.ir
(M. Sadeghi) my.sadeghi@pnu.ac.ir

آشکارا Σ یک سیستم ایده الی است. بانیکا و همکاران در [۱]، $H_d^i(-)=\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Sigma}\mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a},-)$ را با عنوان i–امین d–کوهمولوژی موضعی تعریف کردند و مطالعاتی را روی آن انجام دادند. همچنین ناصر زمانی، محمدحسن بیژن زاده و میرصادق سیدصادقی در [۷] و [۸] مطالعات تکمیلی در خصوص $H_d^i(M)$ انجام دادند و با تعمیم d– کوهمولوژی موضعی معمولی به $H_d^i(M,N)$ روی دو R–مدول M و N ، قضایایی را بیان کرده و اثبات نمودند.

همچنین تاکاهاشی و همکاران در [۶] مطالعاتی را روی کوهمولوژی موضعی با تاکید بر جفت ایده‌ال (I,J) انجام دادند و در خصوص صفر شدن و صفر ناشدن $H_{I,J}^i(M)$ و نیز ارتباط آن با کوهمولوژی معمولی قضایایی را بیان کرده و اثبات نمودند. لیژونگ چو نیز در [۳] و [۴] برخی ویژگیهای $H_{I,J}^i(M)$ را روی حلقه موضعی $(R,\mathfrak{m})$ مورد بررسی قرار دادند. برای R– مدول M و ایده‌ال J از R، زیرمدول (d,J) –تاب، $\Gamma_{d,J}(M)$ از M را به شکل

$$\Gamma_{d,J}(M)=\{x\in M\mid \exists I\in\Sigma; Ix\subseteq Jx\}$$

معرفی می‌کنیم و برای $i\in\mathbb{N}_\circ$، $H_{d,J}^i(-)$ را به عنوان i– امین فانکتور مشتق شده راست $\Gamma_{d,J}(-)$ در نظر می‌گیریم. به‌راحتی می‌توان دید برای R– مدول M، $x\in\Gamma_{d,J}(M)$ اگر و فقط اگر $I\in\Sigma$ موجود باشد که $I\subseteq\mathrm{Ann}_R(x)+J$. به وضوح $\Gamma_{d,J}(-)$ یک فانکتور هموردِ خطی دقیق چپ از کاتگوری R– مدولها است و $\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J}(M))=\Gamma_{d,J}(M)$. همچنین در حالت خاص $J=\circ$، خواهیم داشت $\Gamma_{d,J}(M)=\mathrm{L}_d(M)$ که در [۸] معرفی شده است.

در اینجا، دو مجموعه ایده‌الی $\mathrm{W}(d,J)$ و $\tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ را به شکل

$$\mathrm{W}(d,J)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid \exists I\in\Sigma;\ I\subseteq\mathfrak{p}+J\}$$

و

$$\tilde{\mathrm{W}}(d,J)=\{\mathfrak{a}\trianglelefteq R\mid \exists I\in\Sigma;\ I\subseteq\mathfrak{a}+J\}$$

تعریف می‌کنیم. بنا به [۲، ص. ۲۱]، $\tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ یک سیستم ایده‌الی است و برای $J=\circ$، همان سیستم ایده‌الی Σ می‌شود. در اینجا، برای R– مدولهای M و N، زیرمدول (d,J)– تاب $\Gamma_{d,J}(M,N)$ از $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ را معرفی می‌نمائیم. برای هر R– مدول M، $\Gamma_{d,J}(M,-)$ یک فانکتور هموردِ خطی دقیق چپ در کاتگوری R– مدولها است و i– امین فانکتور مشتق شده راست آن را با $H_{d,J}^i(M,-)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است اگر $M=R$ باشد آنگاه خواهیم داشت $\Gamma_{d,J}(M,N)=\Gamma_{d,J}(N)$ و از این‌رو برای هر $i\in\mathbb{N}_\circ$، $H_{d,J}^i(R,N)=H_{d,J}^i(N)$. در این مقاله به بررسی برخی ویژگی‌های $H_{d,J}^i(M,N)$ پرداخته و تحت شرایطی، قضایایی را در خصوص ایده‌الهای اول وابسته و همچنین صفر شدگی آن بیان کرده و اثبات می‌کنیم.

۲ مفاهیم اولیه از (d,J) – کوهمولوژی موضعی و ایده‌الهای اول وابسته

تعریف ۱.۲. فرض کنید M و N دو R– مدول دلخواه باشند. در این‌صورت $\Gamma_{d,J}(M,N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_{d,J}(M,N)=\Gamma_{d,J}(\mathrm{Hom}_R(M,N)).$$

آشکار است که در حالت $M=R$ داریم:

$$\Gamma_{d,J}(R,N)=\Gamma_{d,J}(\mathrm{Hom}_R(R,N))=\Gamma_{d,J}(N).$$

برای هر R– مدول M، $\Gamma_{d,J}(M,-)$ یک فانکتور هموردِ دقیق چپ از کاتگوری R– مدول‌ها به خودش است. برای هر عدد صحیح نامنفی i،

$$H_{d,J}^i(M,-)=\mathcal{R}^i(\Gamma_{d,J}(M,-))$$

نشان‌دهنده i– امین فانکتور مشتق شده راست فانکتور $\Gamma_{d,J}(M,-)$ است.

لم ۲.۲. فرض کنید M یک R– مدول با تولید متناهی و N یک R– مدول دلخواه باشد. در این‌صورت

$$\Gamma_{d,J}(M,N)=\mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(N)).$$

اثبات. فرض کنید $f \in \Gamma_{d,J}(M,N)$. در این‌صورت $I \in \Sigma$ وجود دارد که برای هر $x \in M$ داریم:

$$f(x)I \subseteq f(x)J.$$

بنابرین برای هر $x \in M$، $f(x) \in \Gamma_{d,J}(N)$ و از این‌رو

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M, \Gamma_{d,J}(N)).$$

حال فرض کنید

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M, \Gamma_{d,J}(N)).$$

فرض کنید $M =< x_۱, x_۲, ..., x_t >$. پس برای هر $۱ \leq i \leq t$، $f(x_i) \in \Gamma_{d,J}(M)$ و از این‌رو

$$\exists I_i \in \Sigma;\ \ f(x_i)I_i \subseteq f(x_i)J.$$

قرار می‌دهیم $I = I_۱ I_۲ ... I_t$. بدیهی است که $I \in \Sigma$ و نیز برای هر $x \in M$،

$$f(x).I \subseteq f(x).J.$$

بنابراین $f.I \subseteq f.J$ و در نتیجه

$$f \in \Gamma_{d,J}(\mathrm{Hom}_R(M,N)).$$

□

قضیه **۳.۲.** فرض کنید M یک R- مدول دلخواه باشد. در این‌صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_۰$،

$$H^i_{d,J}(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)} H^i_{\mathfrak{a}}(M).$$

اثبات. بنا به [۲، تمرین ۴.۳.۱] کافی است نشان دهیم

$$\Gamma_{d,J}(M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M).$$

برای این‌کار، از آنجایی که $\tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ یک سیستم ایده‌الی است نشان می‌دهیم $\Gamma_{d,J}(M) = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. فرض کنید $x \in \Gamma_{d,J}(M)$. بنابراین $I \in \Sigma$ وجود دارد که $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(x) + J$. فرض کنید $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$. در این‌صورت $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ و $x \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$.

برای عکس شمول، فرض کنید $x \in \bigcup_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. بنابراین $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ وجود دارد که در آن $x \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. فرض کنید $I \in \Sigma$ و عدد صحیح نامنفی n چنان باشند که $I \subseteq \mathfrak{a} + J$ و $\mathfrak{a}^n x = ۰$. بنابراین $I^n \subseteq (\mathfrak{a}+J)^n \subseteq \mathfrak{a}^n + J$ و از این‌رو $I^n x \subseteq Jx$. بنابراین $x \in \Gamma_{d,J}(M)$ و حکم تمام است. □

لم **۴.۲.** فرض کنید E یک R- مدول انژکتیو باشد. در این‌صورت $\Gamma_{d,J}(E)$ نیز چنین است.

اثبات. بنا به قضیه ۳.۲، $\Gamma_{d,J}(E) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(E)$. چون E انژکتیو است، پس برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ به‌ویژه هر $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(d,J)$، $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E)$ نیز انژکتیو است. حال چون R حلقه نوتری است، پس بنا [۵، ص ۲۵۶ (تمرین ۳۵.۵)]، $\Gamma_{d,J}(E)$ نیز انژکتیو است.

□

لم **۵.۲.** فرض کنید M و N دو R- مدول و M با تولید متناهی باشند. در این‌صورت احکام زیر برقرارند.

(۱) فرض کنید E° یک تحلیل انژکتیو از N باشد، در این‌صورت

$$H^i_{d,J}(M,N)_{i \in \mathbb{N}_۰} \cong H^i(\Gamma_{d,J}(\mathrm{Hom}_R(M,E^{\circ})))_{i \in \mathbb{N}_۰}$$

به ویژه

$$(H^i_{d,J}(M,N))_{i \in \mathbb{N}_۰} \cong (H^i(\mathrm{Hom}_R(M, \Gamma_{d,J}(E^{\circ}))))_{i \in \mathbb{N}_۰}.$$

(۲) اگر $\Gamma_{d,J}(N) = N$ ، آنگاه برای هر $i \geq ۰$ ،

$$H^i_{d,J}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M,N).$$

(۳) اگر $pd(M) = t$، آنگاه برای هر $i > t$ ،

$$H^i_{d,J}(M,N) \cong H^i_{d,J}(M, N/\Gamma_{d,J}(N)).$$

(۴)

$$H^i_{d,J}(M,N) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\tilde{\mathrm{W}}(d,J)} H^i_{\mathfrak{a}}(M,N).$$

اثبات. (۱) قسمت اول بدیهی است. برای قسمت دوم از یکریختی زیر استفاده می‌کنیم

$$\Gamma_{d,J}(\mathrm{Hom}_R(M,E^\circ)) \cong \mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(E^\circ)).$$

(۲) فرض کنید E° یک تحلیل انژکتیو از N باشد که $\Gamma_{d,J}(E^\circ) = E^\circ$. اکنون از قسمت (۱) داریم:

$$\begin{aligned} H^i_{d,J}(M,N) &\cong H^i(\mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(E^\circ))) \\ &= H^i(\mathrm{Hom}_R(M,E^\circ)) \\ &\cong \mathrm{Ext}^i_R(M,N). \end{aligned}$$

(۳) از دنباله دقیق کوتاه

$$۰ \to \Gamma_{d,J}(N) \to N \to N/\Gamma_{d,J}(N) \to ۰,$$

دنباله دقیق

$$H^i_{d,J}(M,\Gamma_{d,J}(N)) \to H^i_{d,J}(M,N) \to H^i_{d,J}(M,N/\Gamma_{d,J}(N)) \to H^{i+۱}_{d,J}(M,\Gamma_{d,J}(N))$$

به‌دست می‌آید. فرض کنید $i > t = pd(M)$. از آنجایی که $\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J}(N)) = \Gamma_{d,J}(N)$ ، پس از (۲) داریم

$$H^i_{d,J}(M,\Gamma_{d,J}(N) \cong \mathrm{Ext}^i_R(M,\Gamma_{d,J}(N)) = ۰.$$

بنابراین برای هر $i > t = pd(M)$،

$$H^i_{d,J}(M,N) \cong H^i_{d,J}(M,N/\Gamma_{d,J}(N)).$$

(۴) بنا به لم ۲.۲ و قضیه ۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{d,J}(M,N) &= \mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(N)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) \\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)) \\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\tilde{\mathrm{W}}(d,J)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M,N). \end{aligned}$$

اکنون حکم از یکریختی اخیر به‌دست می‌آید. □

قضیه **۶.۲**. فرض کنید M یک R– مدول با تولید متناهی و N یک R– مدول باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Ass}(\Gamma_{d,J}(M,N)) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(N) \cap \mathrm{W}(d,J).$$

اثبات. از آنجایی که M یک R- مدول با تولید متناهی است پس برای هر R- مدول K،

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_R(M,K)) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Ass}(K).$$

اکنون بنا به تعریف ۲.۱ و لم ۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ass}(\Gamma_{d,J}(M,N)) &= \mathrm{Ass}(\Gamma_{d,J}(\mathrm{Hom}_R(M,N)))\\ &= \mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(N)))\\ &= \mathrm{Supp}(M)\cap \mathrm{Ass}(\Gamma_{d,J}(N))\\ &= \mathrm{Supp}(M)\cap \mathrm{Ass}(N)\cap \mathrm{W}(d,J).\end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۲. فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و N یک R- مدول باشد. همچنین فرض کنید J و J' دو ایده‌آل و d و d' دو عدد دلخواه باشند. در این‌صورت

(۱) $\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d',J'}(M,N)) = \Gamma_{d',J'}(\Gamma_{d,J}(M,N))$.

(۲) اگر $d \leqslant d'$ آنگاه $\Gamma_{d',J}(M,N) \subseteq \Gamma_{d,J}(M,N)$.

(۳) اگر $J \subseteq J'$ آنگاه $\Gamma_{d,J}(M,N) \subseteq \Gamma_{d,J'}(M,N)$.

(۴) $\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(M,N)) = \Gamma_{d,JJ'}(M,N) = \Gamma_{d,J\cap J'}(M,N)$

به‌ویژه برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{d,JJ'}(M,N) = H^i_{d,J\cap J'}(M,N)$.

(۵) اگر $\sqrt{J} = \sqrt{J'}$ آنگاه برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{d,J}(M,N) = H^i_{d,J'}(M,N)$.

اثبات. در این‌جا قسمت (۴) را اثبات می‌کنیم. اثبات بقیه به‌طور مشابه است. برای این‌کار فرض کنید X یک R- مدول دلخواه باشد. فرض کنید $x \in \Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(X))$. بنابراین ایده‌الهای $I_1 \in \Sigma$ و $I_2 \in \Sigma$ موجودند که $I_1x \subseteq Jx$ و $I_2x \subseteq J'x$. در نتیجه $I_1I_2x \subseteq I_1J'x \subseteq JJ'x$. از آنجایی که $I_1I_2 \in \Sigma$ پس $x \in \Gamma_{d,JJ'}(X)$. بنابراین

$$\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(X)) \subseteq \Gamma_{d,JJ'}(X).$$

همچنین چون $JJ' \subseteq J\cap J'$ پس $\Gamma_{d,JJ'}(X) \subseteq \Gamma_{d,J\cap J'}(X)$. اکنون فرض کنید $y \in \Gamma_{d,J\cap J'}(X)$. پس $I \in \Sigma$ موجود است که $Iy \subseteq J\cap J'x$. بنابراین $Iy \subseteq Jy$ و $Iy \subseteq J'y$. در نتیجه $y \in \Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(X)$ و این یعنی

$$\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(X) = \Gamma_{d,JJ'}(X) = \Gamma_{d,J\cap J'}(X).$$

اکنون بنا بر ویژگی‌های $\Gamma_{d,J}(-)$ ، داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(M,N)) &= \Gamma_{d,J}(\Gamma_{d,J'}(\mathrm{Hom}_R(M,N)))\\ &= \Gamma_{d,JJ'}(\mathrm{Hom}_R(M,N))\\ &= \Gamma_{d,J\cap J'}(\mathrm{Hom}_R(M,N)).\end{aligned}$$

اکنون با توجه به تساوی‌های

$$\Gamma_{d,JJ'}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = \Gamma_{d,JJ'}(M,N)$$

و

$$\Gamma_{d,J\cap J'}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = \Gamma_{d,J\cap J'}(M,N),$$

حکم تمام است. □

قضیه ۸.۲. فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و N یک R- مدول J- تاب باشد. در این‌صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_0$،

$$H^i_{d,J}(M,N) \cong H^i_d(M,N).$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\Gamma_{d,J}(M,N)=L_d(M,N)$. آشکارا $L_d(N)\subseteq\Gamma_{d,J}(N)$. اکنون فرض کنید $x\in\Gamma_{d,J}(N)$. بنابراین

$$\exists I\in\Sigma; Ix\subseteq Jx.$$

از طرفی چون $\Gamma_J(N)=N$، پس $x\in\Gamma_J(N)$ و از این‌رو

$$\begin{aligned}&\exists t\in\mathbb{N}; J^t.x=\circ\\ &\Rightarrow I^tx=\circ\Rightarrow x\in L_d(N).\end{aligned}$$

بنابراین $\Gamma_{d,J}(N)=L_d(N)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\Gamma_{d,J}(M,N)&=\mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(N))\\ &=\mathrm{Hom}_R(M,L_d(N))\\ &=L_d(M,N).\end{aligned}$$

اکنون بنا به [۷، لم ۱.۲] و استفاده از فانکتورهای مشتق شده راست، برای هر $i\in\mathbb{N}_\circ$،

$$H^i_{d,J}(M,N)\cong H^i_d(M,N).$$

□

قضیه ۹.۲. فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و N یک R- مدول دلخواه باشد. در این‌صورت برای هر عدد صحیح نامنفی t داریم:

$$\mathrm{Ass}(H^t_{d,J}(M,N))\subseteq\bigcup_{j=\circ}^{t}\mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}^j_R(M,H^{t-j}_{d,J}(N))).$$

اثبات. فرض کنید $G(-)=\Gamma_{d,J}(-)$ و $F(-)=\mathrm{Hom}_R(M,-)$ کاتگوری R -مدول‌ها به خودش باشند. واضح است که $FG=\Gamma_{d,J}(M,-)$ و F فانکتور دقیق چپ است. از طرفی برای هر R -مدول انژکتیو E، $\Gamma_{d,J}(E)$ انژکتیو است و برای هر $i>\circ$،

$$\mathcal{R}^iF(G(E))=\mathcal{R}^i\mathrm{Hom}_R(M,\Gamma_{d,J}(E))=\circ.$$

از این‌رو بنا به [۵، قضیه ۴۷.۱۰]، دنباله طیفی به‌صورت

$$\mathrm{E}_۲^{p,q}:=\mathrm{Ext}^p_R(M,H^q_{d,J}(N))\underset{p}{\Rightarrow}H^{p+q}_{d,J}(M,N)$$

موجود است. برای هر $i\geq ۲$ و هر $\circ\leqslant j\leqslant t$، دنباله دقیق

$$\circ\to\mathrm{Ker}(d_i^{j,t-j})\to\mathrm{E}_i^{j,t-j}\overset{d_i^{j,t-j}}{\to}\mathrm{E}_i^{j+i,t-i+۱-j}(*)$$

را در نظر می‌گیریم. از آنجا که

$$\mathrm{E}_i^{j,t}=\frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{E}_i^{j,t-j}\to\mathrm{E}_i^{j+i,t-i+۱-j})}{\mathrm{Im}(\mathrm{E}_i^{j-i,t+i-۱-j}\to\mathrm{E}_i^{t-j})}$$

و برای هر $j<\circ$، $\mathrm{E}_i^{i,j}=\circ$ پس از دنباله دقیق $(*)$ نتیجه می‌گیریم که برای هر $\circ\leqslant j\leqslant t$،

$$\mathrm{Ker}(d_{t+۲}^{j,t-j})\cong\mathrm{E}_{t+۲}^{j,t-j}\cong\mathrm{E}_{t+۳}^{j,t-j}\cong...\cong\mathrm{E}_\infty^{t,t-j}.$$

حال فیلترسازی متناهی

$$\circ=\Phi^{t+۱}H^t\subseteq\Phi^tH^t\subseteq...\subseteq\Phi^۱H^t\subseteq\Phi^\circ H^t=H^t$$

از $H^t=H^t_{d,J}(M,N)$ را که در آن $\mathrm{E}_\infty^{j,t-j}=\frac{\Phi^jH^t}{\Phi^{j+۱}H^t}$ است در نظر می‌گیریم. برای هر $\circ\leqslant j\leqslant t$ داریم:

$$\mathrm{E}_\infty^{j,t-j}\cong\mathrm{Ker}(d_{t+۲}^{j,t-j})\subseteq\mathrm{Ker}(d_۲^{j,t-j})\subseteq\mathrm{E}_۲^{j,t-j}.$$

اکنون برای هر $0 \leqslant j \leqslant t$، از دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to \Phi^{j+1}H^t \to \Phi^j H^t \to \mathrm{E}_\infty^{j,t-j} \to 0$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ass}(\Phi^j H^t) &\subseteq \mathrm{Ass}(\Phi^{j+1}H^t) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_\infty^{j,t-j}) \\
&\subseteq \mathrm{Ass}(\Phi^{j+1}H^t) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{j,t-j}) \\
&\Rightarrow \mathrm{Ass}(H_{d,J}^t(M,N)) \subseteq \mathrm{Ass}(\Phi^1 H^t) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{0,t}) \\
&\subseteq \mathrm{Ass}(\Phi^2 H^t) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{1,t-1}) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{0,t}) \\
&\subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ass}(0) \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{t,0}) \cup \ldots \cup \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{0,t}).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ass}(H_{d,J}^t(M,N)) &\subseteq \bigcup_{j=0}^{t} \mathrm{Ass}(\mathrm{E}_2^{j,t-j}) \\
&= \bigcup_{j=0}^{t} \mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}_R^j(M, H_{d,J}^{t-j}(N))).
\end{aligned}$$

□

نتیجه **۱۰.۲**. فرض کنید M و N، دو R- مدول با تولید متناهی و $\Gamma_{d,J}(N) = N$ باشد. در این‌صورت به ازای هر عدد صحیح نامنفی t،

$$|\mathrm{Ass}(H_{d,J}^t(M,N))| < \infty.$$

اثبات. از آنجائی که $\Gamma_{d,J}(N) = N$ پس برای هر $i \geqslant 1$، $H_{d,J}^i(N) = 0$. اکنون از قضیه ۹.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Ass}(H_{d,J}^t(M,N))| &\leq |\mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}_R^t(M, \Gamma_{d,J}(N)))| \\
&= |\mathrm{Ass}(\mathrm{Ext}_R^t(M,N))| < \infty.
\end{aligned}$$

□

قضیه **۱۱.۲**. فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و N یک R- مدول دلخواه باشد. اگر $pd(M) < \infty$ آنگاه برای هر $i > pd(M) + \dim_R(N)$، $H_{d,J}^i(M,N) = 0$.

اثبات. بنا به [۵، قضیه ۴۷.۱۰]، دنباله طیفی به‌صورت

$$H_{d,J}^i(\mathrm{Ext}_R^j(M,N)) \Rightarrow H_{d,J}^{i+j}(M,N)$$

موجود است. اگر $j > pd(M)$ پس $\mathrm{Ext}_R^j(M,N) = 0$ حال فرض کنیم $i > \dim(N)$ از آنجایی که

$$\dim_R(\mathrm{Ext}_R^j(M,N)) \leqslant \dim_R(N)$$

بنابراین $i > \dim(\mathrm{Ext}_R^j(M,N))$ و از این‌رو برای هر $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)$،

$$H_{\mathfrak{a}}^i(\mathrm{Ext}_R^j(M,N)) = 0$$

و در نتیجه برای هر $i > \dim_R(N)$، داریم $H_{d,J}^i(\mathrm{Ext}_R^j(M,N)) = 0$. بنابراین برای هر $i+j > pd(M)+\dim_R(N)$، $H_{d,J}^{i+j}(M,N)) = 0$ و حکم تمام است. □

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید R یک حلقه نیم‌موضعی و M و N دو R- مدول با تولید متناهی و $p := pd(M) < \infty$ باشند. در این‌صورت اگر

$$H_{d,J}^{p+1}(M,N), H_{d,J}^{p+2}(M,N), ..., H_{d,J}^{p+\dim_R(N)}(M,N)$$

همگی R- مدول‌های با تولید متناهی باشند، آنگاه برای هر $i > p$، $H_{d,J}^{t}(M,N) = 0$.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ..., \mathfrak{m}_n$ ایده‌آل‌های ماکزیمال R باشند. بنا به قسمت (۳) لم ۵.۲ فرض می‌کنیم $\Gamma_{d,J}(N) = 0$. بنابراین $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i \nsubseteq \mathrm{Z}_R(N)$. اکنون فرض کنید $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i \setminus \mathrm{Z}_R(N)$. اثبات را به استقراء روی $t := \dim_R(N)$ انجام می‌دهیم. اگر $t = 0$ آنگاه حکم بنا به قضیه ۳.۲ تمام است. فرض کنیم $t > 0$ و حکم برای هر R- مدول X تحت شرایط $\dim_R(X) \leqslant t-1$ برقرار باشد. دنباله دقیق کوتاه

$$0 \to N \xrightarrow{x} N \to N/xN \to 0$$

دنباله دقیق

$$... \to H_{d,J}^{p+i}(M,N) \xrightarrow{x} H_{d,J}^{p+i}(M,N) \to H_{d,J}^{p+i}(M,N/xN) \to H_{d,J}^{p+i+1}(M,N) \to ...$$

را برای هر $i \geqslant 1$ نتیجه می‌دهد و از این‌رو برای هر عدد صحیح $1 \leqslant i < \dim_R(N)$، $H_{d,J}^{p+i}(M,N/xN)$ با تولید متناهی است. از آنجا که $\dim_R(N/xN) = t-1$ پس بنا به فرض استقراء برای هر $i \geqslant 1$، $H_{d,J}^{p+i}(M,N/xN) = 0$. بنابراین دنباله

$$H_{d,J}^{p+i}(M,N) \xrightarrow{x} H_{d,J}^{p+i}(M,N) \to 0$$

برای هر $i \geqslant 1$، دقیق است. از این‌رو برای هر $i \geqslant 1$،

$$H_{d,J}^{p+i}(M,N) \cong xH_{d,J}^{p+i}(M,N)$$

و در نتیجه بنا به لم ناکایاما، برای هر $i \geqslant 1$، $H_{d,J}^{p+i}(M,N) = 0$ و حکم تمام است. □

۳ نتیجه‌گیری

فرض کنید M یک R- مدول با تولید متناهی و N یک R- مدول دلخواه باشد. در این‌صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، (d, J) - کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته $H_{d,J}^{i}(M,N)$ حد مستقیمی از $H_{\mathfrak{a}}^{i}(M,N)$ روی $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ است. همچنین ایده‌الهای اول وابسته $H_{d,J}^{0}(M,N)$ برابر با اشتراک $\mathrm{Supp}(M)$ ، $\mathrm{Ass}(N)$ و $\tilde{\mathrm{W}}(d,J)$ می‌باشد. در صورتی که اگر بعد تصویری M متناهی باشد آنگاه برای هر $i > pd(M) + \dim_R(N)$ ، $H_{d,J}^{i}(M,N) = 0$. بعلاوه اگر N، (d, J) - تاب نیز باشد در آن‌صورت ساختار $H_{d,J}^{i}(M,N)$ همان ساختار $\mathrm{Ext}_R^{i}(M,N)$ برای هر $i \in \mathbb{N}_0$ می‌باشد و در صورت با تولید متناهی بودن N نیز، ایده‌الهای اول وابسته $H_{d,J}^{i}(M,N)$ متناهی می‌باشند.

فهرست منابع

[1] Banica, C. and Stoia M., 1976. Singular sets of a module on local cohomology. *Boll. Un. Mat. Ital. B., 16,* pp. 923-934.

[2] Brodmann, N.P. and Sharp, R.Y., 1998. Local Cohomology- An Algebraic Introduction with Geometric Applications. *Cambridge University Press.* doi: 10.1017/CBO9780511629204

[3] Chu, L., 2011. Top local cohomology modules with respect to a pair of ideals. *Proc. Amer. Math. Soc., 139,* pp. 777-782. doi: 10.1090/s0002-9939-2010-10471-9

[4] Chu, L. and Wang, Q., 2009. Some results on local cohomology modules defined by a pair of ideals. *J. Math. Kyoto Univ., 49,* pp. 193-200. doi: 10.1215/kjm/1248983036

[5] Rotman J., 1979. Introduction to homological algebra. *Academic Press.* doi: 10.1007/978-0-387-68324-9

[6] Takahashi, R., Yoshino, Y., and Yoshizawa, T., 2009. Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals. *J. Pure. Appl. Algebra, 213,* pp. 582-600. doi: 10.1016/j.jpaa.2008.09.008

[7] Zamani, N., Bijan-zadeh, M.H. and Sayedsadeghi, M.S., 2016. cohomology with supports of dimension $\leq d$. *Journal of Algebra and Its Applications, 15,* pp. 1650042(1)-1650051(10). doi: 10.1142/S0219498816500420

[8] Zamani, N., Bijan-zadeh, M.H. and Sayedsadeghi, M.S., 2013. d-Transform Functor and Some Finiteness and Isomorphism Results. *Vie. J. Math., 41,* pp. 179-186. doi: 10.1007/s10013-013-0042-2

Results on special cohomology modules with bounded support

Mirsadegh Sayedsadeghi(1)[2], Seyedhamid Masoudi Poorlir(2) and Miryousef Sadeghi(3)

(1) Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-4697, tehran, iran
(2) Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-4697, tehran, iran
(3) Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-4697, tehran, iran

Communicated by: Omid Ali Karamzadeh

Received: 2024/03/07 Accepted: 2025/04/06

Abstract: Let R be a commutative Noetherian ring, J an ideal of R and let d a non-negative integer. For R- module M, $\Gamma_{d,J}(M)$ containing the x of M satisfying $Ix \subseteq Jx$, for some ideals of R such as I with condition $\dim_R(R/I) \leq d$. In this paper, inspired by this module, for R modules M and N, we define the submodule (d, J)- torsion $\Gamma_{d,J}(M, N)$ of $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ and for any non-negative integer i, denote its i-th right derived functor by $H^i_{d,J}(M, -)$ and study some of its features. Also, by defining the $\mathrm{W}(d, J)$, $\tilde{\mathrm{W}}(d, J)$ sets of ideals, we express and prove theorems about the associated prime ideals of $H^i_{d,J}(M, N)$. Finally, we show under the condition that $H^i_{d,J}(M, N) = 0$.

Keywords: (d, J)- cohomology, associated prime ideals, (d, J)-torsion.

[2]Corresponding author
E-mail addresses: m_sayedsadeghi@pnu.ac.ir (M. Sayedsadeghi) masoudi.424@student.pnu.ac.ir, (M. Masoudi Porlir) my.sadeghi@pnu.ac.ir (M. Sadeghi)