آزمون فرض تساوی میانگین‌ها در مقابل فرض مرتب شده در توزیع نرمال چند متغیره

ابوذر بازیاری، رحیم چینی‌پرداز[۱] و علی‌اکبر راسخی

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۸۹/۳/۱۶ **تاریخ پذیرش:** ۸۹/۷/۲۵

چکیده: در این مقاله آزمون فرض تساوی میانگین‌ها در مقابل فرض مرتب شده میانگین‌ها در توزیع نرمال چند متغیره در نظر گرفته شده است. سه حالت متفاوت برای ماتریس‌های واریانس کواریانس در نظر گرفته شده است. ابتدا با فرض اینکه این ماتریس‌ها معلوم باشند، مقادیر بحرانی آماره آزمون پیشنهاد شده توسط ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) به ازای سطح‌های معنی‌داری برای تعداد مختلفی از جامعه‌های نرمال دو و سه متغیره محاسبه شده‌اند. توان و $p-$مقدار آماره با استفاده از روش شبیه-سازی برآورد شده‌اند. سپس با فرض اینکه ماتریس‌های واریانس کواریانس نیمه مجهول (دارای عامل مقیاسی مجهول) باشند، شرایطی روی مولفه‌های بردار میانگین تعریف می‌شود که تحت آن شرایط برآورد پارامتر مقیاسی (واریانس) وجود ندارد. آنگاه با توجه به شرایط گفته شده، مقادیر بحرانی آماره آزمون پیشنهاد شده توسط کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴) به ازای سطح‌های معنی‌داری برای تعداد مختلفی از جامعه‌های نرمال سه متغیره به‌دست آورده شده‌اند. همچنین توان در دو سطح معنی‌داری و نیز $p-$مقدار آزمون با شبیه‌سازی برآورد می‌شوند. برای وقتی‌که ماتریس‌های واریانس کواریانس کاملاً مجهول و برابر باشند، در ادامه کار ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳)، تعدادی آزمون را ارائه و نشان داده می‌شود که محاسبه احتمال آنها می‌تواند به عنوان کران‌های بالا برای $p-$مقدارهای آماره آزمون بکار روند.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس، آزمون نسبت درستنمایی، رگرسیون همنوا، $p-$مقدار.

کد موضوع بندی ریاضی: ۶۲F۳۰، ۶۲F۰۳

---

[۱] آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: رحیم چینی‌پرداز chinipardaz_r@scu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید $\mathbf{X}_{i1},\mathbf{X}_{i2},\ldots,\mathbf{X}_{in_i}$ نمونه‌های تصادفی از جامعه $N_p(\boldsymbol{\mu}_i,\Sigma_i)$، $i=1,2,\ldots,k$، باشند. آزمون فرض H_0 در مقابل H_1 به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &H_0:\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=\cdots=\boldsymbol{\mu}_k \\ &H_1:\boldsymbol{\mu}_1\le\boldsymbol{\mu}_2\le\cdots\le\boldsymbol{\mu}_k, \end{aligned} \tag{1}$$

(با حداقل یک نامساوی اکید در H_1)، بطوری‌که $\boldsymbol{\mu}_i\le\boldsymbol{\mu}_j$ به این معنی است که تمام مقادیر $\boldsymbol{\mu}_j-\boldsymbol{\mu}_i$ غیر منفی هستند. همچنین محدودیت تحمیل شده در فرض H_1 بیـانگر آن اسـت که تمام p بعد بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_i$ با زیاد شدن i بطور همزمان افزایش می‌یابند.

چنین آزموهایی، که آزمون مساوی بودن میانگین‌ها در مقابل میانگین‌های مرتـب شـده گفتـه می‌شوند، می‌توانند در حوزه‌های مختلف علمی بکار روند. تمرین روی سن راه رفتن یک کودک، مثالی از این موارد هستند. پژوهش‌گر ممکن است فرض کند که تمرین راه رفتن اثـر منفـی در افزایش میانگین سنی که یک کودک شروع به راه رفتن می‌کند، ندارد. فـرض کنیـد متغیـر Y نشان‌دهنده سنی باشد که کودک شروع به راه رفتن می‌کند. داده‌های متغیر Y در جـدول (۱) آمده است (سیل‌واپول و سن، ۲۰۰۵).

جدول ۱: داده‌های سن راه رفتن کودک

تیمار	سن راه رفتن (بر حسب ماه)						n_i	$\bar{y}_i$	$\boldsymbol{\mu}_i$
۱	۹	۹/۵	۹/۷۵	۱۰	۱۳	۹/۵	۶	۱۰/۱۲۵	$\boldsymbol{\mu}_1$
۲	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱/۷۵	۱۰/۵	۱۵	۶	۱۱/۳۷۵	$\boldsymbol{\mu}_2$
۳	۱۳/۲۵	۱۱/۵	۱۲	۱۳/۵	۱۱/۵		۵	۱۲/۳۵	$\boldsymbol{\mu}_3$

در جدول (۱)، گروه اول هر روز به مدت ۱۲ دقیقه تمرین راه رفتن، گروه دوم هر روز به مـدت ۷ دقیقه تمرین راه رفتن را تجربه کرده‌اند ولی گروه سوم (گروه کنترل) هیچ تمرینی ندیده‌اند. آزمون رایج در آنالیز واریانس به‌صورت زیر است:

$$H'_0:\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=\boldsymbol{\mu}_3$$

H'_1: $\boldsymbol{\mu}_1$، $\boldsymbol{\mu}_2$ و $\boldsymbol{\mu}_3$ با هم برابر نیستند.

روش استاندارد برای آزمون کردن این فرض‌ها استفاده از آزمون F می‌باشد. اما اگر پژوهش‌گر فرض کند که تمرین راه رفتن اثر منفی در افزایش میانگین سن آغاز راه رفتن کودک نـدارد در این صورت آزمون فرض به‌صورت زیر خواهد بود:

$$H_0' : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \boldsymbol{\mu}_3$$
$$H_2 : \boldsymbol{\mu}_1 \leq \boldsymbol{\mu}_2 \leq \boldsymbol{\mu}_3 - H_0.$$

رابرتسون و همکاران (۱۹۸۸)، سارکا و همکاران (۱۹۹۵) و سیل‌واپول و سـن (۲۰۰۵)، مثـال-های مشابهی را در حوزه‌های مختلف بخصوص در پزشکی مطرح کرده‌اند.

اولین بار بارتولومو (۱۹۵۹a)، آزمون تساوی k میانگین جامعه نرمال یک متغیـره را در مقابـل میانگین‌های مرتب شده انجام داد. بارتولومو (۱۹۵۹a)، برای این فرض‌ها آمـاره آزمـون نسـبت درستنمایی، $\overline{\chi}_k^2$، را با فرض معلوم بودن واریانس‌ها به‌دست آورد. همچنین آماره آزمون نسبت درستنمایی، $\overline{F}$، را با فرض مجهول بودن واریـانس‌هـا محاسـبه کـرد. در حقیقـت روش مـورد استفاده برای برآورد پارامترهای مرتب شده، الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس[1] بود. بـارتولومو (۱۹۵۹b)، این مساله آزمون را برای حالت دو طرفـه مـورد بررسـی قـرار داد، آمـاره آزمـونی را پیشنهاد و تقریبی برای توزیع آماره در حالت $k = 5$ به‌دست آورد. بررسـی و مطالعـات بیشـتر روی چنین آزمون‌هـایی توسـط بـارتولومو (۱۹۶۱)، چـاکو (۱۹۶۳)، شـوراک (۱۹۶۷)، بـارلو و همکاران (۱۹۷۲) و کودو و یاعو (۱۹۸۲) انجام گرفت. ساسابوچی و کولاتونگا (۱۹۸۵)، تقریب-هایی را برای توزیع صفر آماره $\overline{F}$ پیشنهاد دادند و با مقایسه‌های عددی نشان دادنـد کـه ایـن تقریب‌ها نتایج بهتری را ارائه می‌دهند. در گسترش این کار در چند متغیره، کودو (۱۹۶۳)، یک جامعه نرمال p متغیره را با میانگین مجهول $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس واریـانس کواریـانس معلـوم Σ در نظر گرفت و آماره آزمون بر اساس روش نسبت درستنمایی برای آزمون فرض

$$H_0'' : \boldsymbol{\mu}_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, p)$$

در مقابل فرض

$$H_1'' : \boldsymbol{\mu}_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, p), \quad \max_{1 \leq i \leq p} \boldsymbol{\mu}_i > 0,$$

به‌دست آورد. پرلمن (۱۹۶۹)، این آزمون را با ماتریس واریانس کواریانس کاملاً مجهول براساس روش نسبت درستنمایی مورد بررسی قرار داد و توزیع دقیق آماره را تحت فرض اولیه محاسـبه کرد. کودو و چوی (۱۹۷۵)، این مساله آزمون را با فرض ویژه بودن ماتریس واریانس کواریـانس

[1] Pool Adjacent Violators Algorithm

در نظر گرفته و آماره آزمون را با روش نسبت درستنمایی محاسبه کردند. تانگ و همکاران (۱۹۸۹)، آماره آزمون جدیدی را برای مساله کودو (۱۹۸۹) با ماتریس واریانس کواریانس معلوم پیشنهاد و توزیع آن را تحت فرض اولیه محاسبه کردند.

آزمون تساوی k میانگین جامعه نرمال چند متغیره در مقابل این فرض که هیچ محدودیتی روی میانگین‌ها نباشد توسط آندرسون (۱۹۸۴) مورد مطالعه قرار گرفت. توسعه کار بارتولومو (1959a) در چند متغیره به وسیله نویسندگان دیگر انجام شده است. اولین بار ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳)، با فرض معلوم بودن ماتریس‌های واریانس کواریانس، ضمن به‌دست آوردن آماره آزمون تساوی میانگین‌ها در مقابل میانگین‌های مرتب شده در توزیع نرمال p متغیره با روش نسبت درستنمایی، الگوریتمی را نیز برای محاسبه برآوردهای رگرسیون همنوا[1]ی دو متغیره پیشنهاد کرده و همگرایی این الگوریتم را مورد بررسی قرار دادند. کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴)، توزیع آماره آزمون را برای دو حالت معلوم و نیمه مجهول بودن (دارای عامل مقیاسی مجهول) ماتریس‌های واریانس کواریانس به‌دست آوردند. ساسابوچی و همکاران (۱۹۹۲)، الگوریتم ارائه شده توسط ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) را برای رگرسیون همنوای چند متغیره بسط دادند. نوماکوچی و شی (۱۹۸۸)، برای چنین فرض‌هایی، آزمون جدیدی را ارائه دادند تا محاسبه توزیع آن تحت فرض اولیه آسان‌تر باشد.

در تمام حالت‌های بالا تنها به ارائه آماره آزمون اکتفا شده است و آزمون به‌صورت مستقل به‌دست نیامده است. کولاتونگا و همکاران (۱۹۹۰)، برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کواریانس قطری نباشند، آزمون‌هایی را پیشنهاد داده و با روش شبیه‌سازی آن‌ها را مورد مطالعه قرار دادند. ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳)، با فرض مجهول بودن ماتریس واریانس کواریانس، آماره آزمونی را ارائه داده و توزیع آن را تحت فرض صفر نیز به‌دست آوردند. ساسابوچی (۲۰۰۷)، تحت این فرض دنباله‌ای از آزمون‌ها را ارائه دادند که از آزمون به‌دست آمده توسط ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳)، پرتوان‌تر می‌باشند اما اینکه در بین این دنباله آزمون‌ها کدام‌یک از همه پرتوان‌تر است بحثی نشده است.

در مقاله حاضر آزمون فرض (۱) در نظر گرفته شده است. ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) و کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴) برای این آزمون تنها به یافتن آماره و توزیع آن اکتفا کردند. در بخش دوم این مقاله، ضمن بررسی نتایج و قضایای به‌دست آمده توسط بارلو و همکاران (۱۹۷۲)، ساسابوچی و همکاران (۱۹۸۳) و کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴)، مقادیر بحرانی آماره آزمون برای وقتی‌که ماتریس‌های واریانس کواریانس معلوم، برابر و قطری باشند، محاسبه

[1] Isotonic Regression

شده‌اند. در بخش سوم، توان آزمون در سطوح معنی‌داری $\alpha = ۰/۱, ۰/۰۵$ و نیز $p-$مقدار آزمون برای توزیع نرمال دو متغیره با روش شبیه‌سازی برآورد شده‌اند. در بخش چهارم، در ادامه کار کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴)، برای وقتی‌که ماتریس‌های واریانس کواریانس نیمه مجهول باشند، شرایطی روی مولفه‌های بردار میانگین تعریف شده و نشان داده می‌شود که تحت آن شرایط برآورد پارامتر مقیاسی (واریانس) وجود ندارد. آنگاه با توجه به این شرایط، مقادیر بحرانی آماره آزمون پیشنهاد شده توسط کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴) به ازای سطح-های معنی‌داری برای تعداد مختلفی از جامعه‌های نرمال سه متغیره به‌دست آورده شده‌اند. توان آزمون در دو سطح معنی‌داری شبیه‌سازی شده است. همچنین $p-$مقدار آماره برای دو و سه جامعه نرمال دو متغیره برآورد شده است. در بخش پنجم، این آزمون با ماتریس‌های واریانس کواریانس کاملاً مجهول و برابر در نظر گرفته شده است. در این مورد ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳)، به محاسبه آماره آزمون و تعیین توزیع آن پرداختند. در ادامه کار آنها تحت شرایط گفته شده روی ماتریس‌های واریانس کواریانس، تعدادی آزمون ارائه شده که بر حسب این آزمون‌ها کران‌های بالا برای $p-$مقدارهای آماره به‌دست آمده است.

۲- تعاریف و نتایج اولیه در آزمون فرض پارامترهای مرتب‌شده

تعریف ۱. بردارهای حقیقی p بعدی $\mathbf{X}_۱,\dots,\mathbf{X}_k$ و ماتریس‌های معین مثبت $p\times p$، $\Sigma_۱,\dots,\Sigma_k$ را در نظر بگیرید. ماتریس $p\times k$، $[\hat{\boldsymbol{\mu}}_۱,\dots,\hat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ را رگرسیون همنوای p متغیره $\mathbf{X}_۱,\dots,\mathbf{X}_k$ با وزن‌های $\Sigma_۱^{-۱},\dots,\Sigma_k^{-۱}$ گویند اگر $\hat{\boldsymbol{\mu}}_۱ \le \hat{\boldsymbol{\mu}}_۲ \le \cdots \le \hat{\boldsymbol{\mu}}_k$ و نیز $\hat{\boldsymbol{\mu}}_۱,\dots,\hat{\boldsymbol{\mu}}_k$ در رابطه زیر صدق کنند:

$$\min_{\boldsymbol{\mu}_۱\le\boldsymbol{\mu}_۲\le\cdots\le\boldsymbol{\mu}_k}\sum_{i=۱}^{k}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu}_i)'\Sigma_i^{-۱}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu}_i)=\sum_{i=۱}^{k}(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'\Sigma_i^{-۱}(\mathbf{X}_i-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i).$$

این تعریف حالت یک متغیره را که بارلو و همکاران (۱۹۷۲)، مطرح کرده‌اند را شامل می‌شود. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای میانگین تحت فرض مرتب شده که همان برآوردهای رگرسیون همنوا هستند، با استفاده از الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس به‌دست می‌آیند (برای جزئیات بیشتر به بارلو و همکاران، ۱۹۷۲، رابرتسون و همکاران، ۱۹۸۸ و سیل-واپول و سن، ۲۰۰۵ رجوع کنید). همچنین ساسابوچی و همکاران(۱۹۸۳)، یک الگوریتم برای محاسبه برآوردهای رگرسیون همنوا ارائه و همگرایی این الگوریتم را برای $p=۲$ مورد بررسی قرار دادند.

قضیه۱. برای آزمون فرض $H_\circ$ در مقابل H_1 با ماتریس واریانس کوواریانس معلوم و برابر Σ، ناحیه بحرانی آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از:

$$\bar{\chi}^2_{k,p} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \overline{\mathbf{X}})'\Sigma^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \overline{\mathbf{X}}) \geq t, \quad (۲)$$

کــه در آن $\overline{\mathbf{X}} = (\sum_{i=1}^{k} n_i)^{-1}\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{\mathbf{X}}_i$، $\overline{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\mathbf{X}_{ij}$، $i = 1,\dots,k$، و $[\hat{\boldsymbol{\mu}}_1,\dots,\hat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ برآوردهای رگرسیون همنوای p متغیره $\overline{\mathbf{X}}_1,\dots,\overline{\mathbf{X}}_k$ با وزن‌هـای $n_1\Sigma^{-1},\dots,n_k\Sigma^{-1}$ مـی‌باشند (ساسابوچی و همکاران، ۱۹۸۳).

قضیه۲. (کولاتونگا و ساسابوچی، ۱۹۸۴) بـا فـرض اینکـه $n_i = 1$ و مـاتریس‌هـای واریـانس کواریانس معلوم و قطری باشند، اگر فرض $H_\circ$ درست باشد برای $t > \circ$، توزیع آماره (۲) تحت فرض صفر عبارت است از:

$$\begin{aligned} P(\bar{\chi}^2_{k,p} \geq t) &= \sum_{l=p+1}^{kp} Q(l,k,p)P(\chi^2_{l-p} \geq t), \\ P(\bar{\chi}^2_{k,p} = \circ) &= (k)^{-p}, \end{aligned} \quad (۳)$$

به‌طوری‌که در آن $Q(l,k,p)$ پیچش احتمـالات $P(l_m,k)$، $m = 1,2,\dots,p$ بـوده و بـه‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q(l,k,p) = \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_p=l} P(l_1,k)P(l_2,k)\cdots P(l_p,k), \quad (۴)$$

همچنــین $P(l_m,k)$، $m = 1,2,\dots,p$، احتمــال آن اســت کــه بــردار تصــادفی متغیرهــای $(X_1^{(m)},X_2^{(m)},\dots,X_k^{(m)})$ روی فــــرض مرتــــب شــــده بــــردار پارامترهــــای $(\mu_1^{(m)},\mu_2^{(m)},\dots,\mu_k^{(m)})$ دقیقــا l_m مقــدار مجــزا را اختیــار کنــد و $X_i^{(m)}$ و $\mu_i^{(m)}$، $i = 1,2,\dots,k$، به‌ترتیب mامین متغیر و mامین میانگین از بردارهای X_i و μ_i هسـتند (بارلو و همکاران، ۱۹۷۲).

روش محاسبه و جدول‌های عددی برای محاسبـه احتمـال $Q(l,k,p)$ در رابطـه (۴)، توسـط کولاتونگا (۱۹۸۴) ارائه شده است. برای حالتی که ماتریس‌های واریانس کواریانس غیر قطـری

باشد، کولاتونگا و همکاران (۱۹۹۰)، آزمون‌هایی را ارائه و ویژگی آن‌ها را بـا روش شـبیه‌سـازی مورد مطالعه قرار دادند.

جدول ۲: مقادیر بحرانی آماره آزمون $\overline{\chi}^{۲}_{k,p}$ برای $p=۲$

	α						α				
k	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵	k	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵
۲	۲/۹۵۲	۴/۲۳۱	۵/۵۳۷	۷/۲۸۹	۸/۶۲۸	۱۷	۹/۸۳۳	۱۱/۹۶۸	۱۴/۰۰۵	۱۶/۵۹۳	۱۸/۴۹۲
۳	۴/۳۷۲	۵/۸۶۱	۷/۳۴۴	۹/۲۹۵	۱۰/۷۶۳	۱۸	۱۰/۰۱	۱۲/۱۵۷	۱۴/۲۰۹	۱۶/۸۱۴	۱۸/۷۲۵
۴	۵/۳۲۶	۶/۹۴۳	۸/۵۳۵	۱۰/۶۱۰	۱۲/۱۶۲	۱۹	۱۰/۱۶۷	۱۲/۳۳۴	۱۴/۴۰۱	۱۷/۰۲۲	۱۸/۹۴۳
۵	۶/۰۴۸	۷/۷۵۸	۹/۴۲۸	۱۱/۵۹۳	۱۳/۲۰۵	۲۰	۱۰/۳۲۰	۱۲/۵۰۲	۱۴/۵۸۱	۱۷/۲۱۸	۱۹/۱۵۱
۶	۶/۶۲۹	۸/۴۱۰	۱۰/۱۴۱	۱۲/۳۷۶	۱۴/۰۳۶	۲۱	۱۰/۴۶۴	۱۲/۶۶۱	۱۴/۷۵۳	۱۷/۴۰۴	۱۹/۳۴۷
۷	۷/۱۱۴	۸/۹۵۲	۱۰/۷۳۴	۱۳/۰۲۶	۱۴/۷۲۵	۲۲	۱۰/۶۰۲	۱۲/۸۱۳	۱۴/۹۱۶	۱۷/۵۸۲	۱۹/۵۳۳
۸	۷/۵۳۱	۹/۴۱۹	۱۱/۲۴۱	۱۳/۵۸۱	۱۵/۳۱۳	۲۳	۱۰/۷۳۳	۱۲/۹۵۸	۱۵/۰۷۲	۱۷/۷۵۰	۱۹/۷۱۰
۹	۷/۸۹۵	۹/۸۲۵	۱۱/۶۸۴	۱۴/۰۶۵	۱۵/۸۲۴	۲۴	۱۰/۸۶۰	۱۳/۰۹۵	۱۵/۲۲۱	۱۷/۹۱۱	۱۹/۸۸۰
۱۰	۸/۲۲۲	۱۰/۱۸۷	۱۲/۰۷۶	۱۴/۴۹۴	۱۶/۲۷۸	۲۵	۱۰/۹۸۰	۱۳/۲۲۸	۱۵/۳۶۲	۱۸/۰۶۵	۲۰/۰۴۱
۱۱	۸/۵۱۵	۱۰/۵۱۱	۱۲/۴۲۸	۱۴/۸۷۸	۱۶/۶۸۲	۲۶	۱۱/۰۹۵	۱۳/۳۵۴	۱۵/۴۹	۱۸/۲۱۲	۲۰/۱۹۶
۱۲	۸/۷۸۱	۱۰/۸۰۵	۱۲/۷۴۸	۱۵/۲۲۶	۱۷/۰۵۰	۲۷	۱۱/۲۰۶	۱۳/۴۷۶۲	۱۵/۶۲۹	۱۸/۳۵۳	۲۰/۳۴۴
۱۳	۹/۰۲۴	۱۱/۰۷۴	۱۳/۰۴۰	۱۵/۵۴۳	۱۷/۳۸۵	۲۸	۱۱/۳۱۳	۱۳/۵۹۲	۱۵/۷۵۵	۱۸/۴۸۹	۲۰/۴۸۸
۱۴	۹/۲۵۰	۱۱/۳۲۳	۱۳/۳۱۰	۱۵/۸۳۶	۱۷/۶۹۳	۲۹	۱۱/۴۱۷	۱۳/۷۰۵	۱۵/۸۷۷	۱۸/۶۲۰	۲۰/۶۲۵
۱۵	۹/۴۵۸	۱۱/۵۵۳	۱۳/۵۵۷	۱۶/۱۰۷	۱۷/۹۷۸	۳۰	۱۱/۵۱۵	۳/۸۱۳	۱۵/۹۹۸	۱۸/۷۴۷	۲۰/۷۵۸
۱۶	۹/۶۵۱	۱۱/۷۶۸	۱۳/۷۸۹	۱۶/۳۵۹	۱۸/۲۴۴						

مقـادیر بحرانـی آمـاره آزمـون، $\overline{\chi}^{۲}_{k,p}$، بـرای $p=۲$، $p=۳$ و $k=۲,۳,\ldots,۳۰$ محاسـبه شده‌اند که این نتایج به‌ترتیب در جدول‌های(۲) و (۳) آورده شده‌اند.

طبق نتایج به‌دست آمده از جدول‌های (۲) و (۳) دیده می‌شود که برای هر k ثابت بـا کـاهش سطح معنی‌داری، مقدار بحرانی آماره آزمـون در حـال افـزایش اسـت. همچنـین در هـر سـطح معنی‌داری، با افزایش تعداد جامعه‌های نرمال (دو و سه متغیره) این مقـادیر نیـز در حـال زیـاد شدن هستند.

۳- توان و p –مقدار آماره آزمون برای توزیع نرمال دو متغیره

در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی توان آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ برای $k = ۲,۳$ در سطوح معنی‌داری ۰/۰۵ و ۰/۱ برای توزیع نرمال دو متغیره براساس ۱۰۰۰۰ بار تکرار برآورد شده است. در این شبیه‌سازی ماتریس‌های کواریانس برابر با $۲۰I_{۲}$ بوده و نیز میانگین هر جامعه به‌صورت $\mathbf{\mu}_{v} = (\beta v, \beta v + ۱)$ ، $v = ۱,۲,\ldots,k$ ، $\beta = ۳,۲,\frac{۳}{۲},۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\ldots,\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۲۰},\ldots,\frac{۱}{۷۰},۰$ است.

جدول ۳: مقادیر بحرانی آماره آزمون $\overline{\chi}^{۲}_{k,p}$ برای $p = ۳$

	α						α				
k	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵	k	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵
۲	۴/۰۱۰۲	۵/۴۳۴۵	۶/۸۶۱۰	۸/۷۴۶۳	۱۰/۱۷۱	۱۷	۱۳/۳۷۸	۱۵/۸۱۷	۱۸/۱۱۶	۲۱/۰۰۵	۲۳/۱۰۷
۳	۵/۸۸۲	۷/۵۵۲	۹/۱۸۶۱۰	۱۱/۳۰۷	۱۲/۸۸۹	۱۸	۱۳/۶۱۶	۱۶/۰۷۷	۱۸/۳۹۴	۲۱/۳۰۴	۲۳/۴۲۰
۴	۷/۱۶۵	۸/۹۸۶	۱۰/۷۵۰۴	۱۳/۰۲۰	۱۴/۷۰۲	۱۹	۱۳/۸۴۱	۱۶/۳۲۲	۱۸/۶۵۶	۲۱/۵۸۶	۲۳/۷۱۵
۵	۸/۱۴۵	۱۰/۰۷۶	۱۱/۹۳۴۶	۱۴/۳۱۳	۱۶/۰۶۸	۲۰	۱۴/۰۵۵	۱۶/۵۵۴	۱۸/۹۰۴	۲۱/۸۵۲	۲۳/۹۹۴
۶	۸/۹۳۹	۱۰/۹۵۵	۱۲/۸۸۷	۱۵/۳۴۹	۱۷/۱۶۲	۲۱	۱۴/۲۵۸	۱۶/۷۷۴	۱۹/۱۳۹	۲۲/۱۰۵	۲۴/۲۵۹
۷	۹/۶۰۷	۱۱/۶۹	۱۳/۶۸۲	۱۶/۲۱۴	۱۸/۰۷۳	۲۲	۱۴/۴۵۱	۱۶/۹۸۳	۱۹/۳۶۳	۲۲/۳۴۵	۲۴/۵۱۱
۸	۱۰/۱۸۲	۱۲/۳۲۴	۱۴/۳۶۵۹	۱۶/۹۵۵	۱۸/۸۵۳	۲۳	۱۴/۶۳۵	۱۷/۱۸۳	۱۹/۵۷۶	۲۲/۵۷۴	۲۴/۷۵۰
۹	۱۰/۶۸۷	۱۲/۸۷۸	۱۴/۹۶۲	۱۷/۶۰۲	۱۹/۵۳۴	۲۴	۱۴/۸۱۱	۱۷/۳۷	۱۹/۷۷۹	۲۲/۷۹۳	۲۴/۹۷۹
۱۰	۱۱/۱۳۴	۱۳/۳۷۱	۱۵/۴۹۳	۱۸/۱۷۷	۲۰/۱۳۸	۲۵	۱۴/۹۸۰	۱۷/۵۵۷	۱۹/۹۷۵	۲۳/۰۰۲	۲۵/۱۹۷
۱۱	۱۱/۵۴۲	۱۳/۸۱۵	۱۵/۹۷۰	۱۸/۶۹۲	۲۰/۶۷۹	۲۶	۱۵/۱۴۲	۱۷/۷۳۲	۲۰/۱۶۲	۲۳/۲۰۳	۲۵/۴۰۷
۱۲	۱۱/۹۱۱	۱۴/۲۱۹	۱۶/۴۰۳	۱۹/۱۵۹	۲۱/۱۷۱	۲۷	۱۵/۲۹۸	۱۷/۹۰۱	۲۰/۳۴۱	۲۳/۳۹۵	۲۵/۶۰۸
۱۳	۱۲/۲۵۰	۱۴/۵۸۹	۱۶/۸۰۰	۱۹/۵۸۷	۲۱/۶۲۰	۲۸	۱۵/۴۴۸	۱۸/۰۶۳	۲۰/۵۱۴	۲۳/۵۸۰	۲۵/۸۰۲
۱۴	۱۲/۵۶۲	۱۴/۹۲۹	۱۷/۱۶۵	۱۹/۹۸۲	۲۲/۰۳۴	۲۹	۱۵/۵۹۲	۱۸/۲۱۹	۲۰/۶۸۰	۲۳/۷۵۹	۲۵/۹۸۸
۱۵	۱۲/۸۵۲	۱۵/۲۴۵	۱۷/۵۰۵	۲۰/۳۴۷	۲۲/۴۱۷	۳۰	۱۵/۷۳۱	۱۸/۳۷۰	۲۰/۸۴۱	۲۳/۹۳۰	۲۶/۱۶۸
۱۶	۱۳/۱۲۳	۱۵/۵۴۰	۱۷/۸۲۰	۲۰/۶۸۷	۲۲/۷۷۳						

از جدول (۴) چنین استنباط می‌شود که برای هر k ثابت اولاً با افزایش مقدار α، توان نیز در حال افزایش است، ثانیاً در هر سطح α با کاهش مقدار β، توان نیز کاهش یافته، بطوری‌که برای $\beta = ۰$، مقدار توان برآوردی برای سطح معنی‌داری می‌باشد. حال برای آزمون فرض (۱)، با روش شبیه‌سازی p –مقدار آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$، برای توزیع نرمال دو متغیره، به‌دست آورده می-

شود. فرض کنید $\overline{\chi}^{۲}$ مقدار نمونه‌ای برای آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ باشد. در این صورت برای آزمون فرض (۱)، $p-$ مقدار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p-value = P_{\boldsymbol{\mu}\in H_۰}(\overline{\chi}^{۲}_{k,۲} \geq \overline{\chi}^{۲}),$$

و یک آزمون در سطح α برای فرض $H_۰$ در مقابل فرض $H_۱$، باعث رد شدن فرض $H_۰$ می‌شود اگر $p-$مقدار کوچکتر از α باشد.

جدول ۴: توان آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ در سطوح معنی‌داری ۰/۰۵ و ۰/۱

k	۲	۳	۲	۳	k	۲	۳	۲	۳
	α					α			
β	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱	β	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱
۳	۰/۸۲۴	۰/۹۱۶	۰/۸۸۲	۰/۹۶۳	۱/۱۰	۰/۲۹۶	۰/۳۲۳	۰/۳۴۱	۰/۴۲۲
۲	۰/۷۷۷	۰/۸۶۰	۰/۸۵۱	۰/۸۹۱	۱/۲۰	۰/۲۳۴	۰/۳۱۴	۰/۲۸۱	۰/۳۹۱
۳/۲	۰/۶۹۵	۰/۷۵۳	۰/۸۳۰	۰/۸۶۲	۱/۳۰	۰/۱۶۵	۰/۲۸۷	۰/۲۵۳	۰/۳۳۸
۱	۰/۶۲۰	۰/۶۸۸	۰/۶۴۹	۰/۷۰۵	۱/۴۰	۰/۱۴۷	۰/۲۴۰	۰/۲۲۲	۰/۲۹۰
۱/۲	۰/۵۵۲	۰/۵۸۰	۰/۵۹۷	۰/۶۴۷	۱/۵۰	۰/۰۹۸	۰/۱۳۱	۰/۱۸۳	۰/۲۲۵
۱/۳	۰/۴۸۹	۰/۵۳۳	۰/۵۲۴	۰/۶۰۳	۱/۶۰	۰/۰۷۶	۰/۰۸۳	۰/۱۵۰	۰/۱۷۱
۱/۴	۰/۴۵۷	۰/۴۷۸	۰/۴۸۶	۰/۵۷۵	۱/۷۰	۰/۰۶۱	۰/۰۶۸	۰/۱۱۷	۰/۱۳۵
۱/۵	۰/۴۰۶	۰/۴۲۱	۰/۴۴۳	۰/۵۲۰	۰	۰/۰۵۴	۰/۰۵۸	۰/۱۰۴	۰/۱۱۰
۱/۸	۰/۳۵۱	۰/۳۷۴	۰/۳۸۸	۰/۴۷۹					

برای محاسبه p -مقدار آماره مراحل زیر را دنبال کنید:

۱) مشاهدات مستقل از توزیع نرمال دو متغیره $N_۲(\boldsymbol{\mu}_۰, \Sigma_۰)$ که در آن بردار $\boldsymbol{\mu}_۰$ هر بردار دلخواه و ماتریس واریانس کواریانس $\Sigma_۰$ ماتریسی قطری باشد را برای مقادیر $k = ۲,۳$ تولید می‌شود. با توجه قضیه ۲، توزیع آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ تحت فرض صفر به پارامتر مجهول بستگی ندارد. بنابراین هر مقدار دلخواه را برای بردار پارامتر $\boldsymbol{\mu}_۰$ و ماتریس واریانس کواریانس می‌توان در نظر گرفت.

۲) با توجه به داده‌ها مقدار آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ محاسبه می‌شود.

۳) با تکرار مراحل ۱و ۲ به تعداد $N = ۱۰۰۰۰$، $p-$مقدار از رابطه $\frac{M}{N}$ به‌دست می‌آید که در آن M تعداد دفعات مقادیر برآورد شده آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ در مرحلـه دوم اسـت بطوری‌که از مقدار اولیه کوچکتر نباشد.

در جدول (۵) برای دو و سه جامعه نرمال دو متغیره مقادیر $p-$مقدار را با فرض اینکـه بـردار پـارامتر بـه‌صـورت $\mu_v = (\beta v, \beta v + ۱)$، $v = ۱,۲,\ldots,k$ و $\beta = ۳,۲,\frac{۳}{۲},۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\ldots,\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۲۰},\ldots,\frac{۱}{۷۰}$ باشد، شبیه‌سازی شده است.

جدول ۵ : p-مقدار آماره $\overline{\chi}^{۲}_{k,۲}$ برای دو و سه جامعه نرمال دو متغیره

	k			k	
β	۲	۳	β	۲	۳
۳	۰/۱۳۵	۰/۲۶۶	$\frac{۱}{۹}$	۰/۴۷۵	۰/۱۲۲
۲	۰/۰۵۵	۰/۲۱۰	$\frac{۱}{۱۰}$	۰/۲۰۵	۰/۳۱۵
$\frac{۳}{۲}$	۰/۲۱۵	۰/۰۳۱	$\frac{۱}{۲۰}$	۰/۱۷۵	۰/۱۱۸
۱	۰/۰۴۰	۰/۲۳۳	$\frac{۱}{۳۰}$	۰/۰۳۸	۰/۲۴۳
$\frac{۱}{۲}$	۰/۴۴۵	۰/۰۸۷	$\frac{۱}{۴۰}$	۰/۱۸۵	۰/۰۷۶
$\frac{۱}{۳}$	۰/۳۲۵	۰/۱۴۵	$\frac{۱}{۵۰}$	۰/۱۸۰	۰/۰۴۷
$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۰۵	۰/۰۳۵	$\frac{۱}{۶۰}$	۰/۲۵۵	۰/۳۲۳
$\frac{۱}{۵}$	۰/۰۹۵	۰/۳۰۸	$\frac{۱}{۷۰}$	۰/۰۸۵	۰/۰۹۵
$\frac{۱}{۸}$	۰/۲۳۵	۰/۰۵۲			

با ثابت بودن سطح معنی‌داری، مثلاً $\alpha = ۰/۰۵$، با توجه به این مقادیر دیده مـی‌شـود کـه در توزیع نرمال دو متغیره، برای $k = ۲$ تنها دو مقدار و برای $k = ۳$ سه مقـدار باعـث رد شـدن فرض صفر می‌شوند.

۴- آماره آزمون وقتی ماتریس‌های واریانس کواریانس نیمه مجهول باشند

در این بخش، فرض کنید ماتریس‌های واریانس کواریانس دارای یـک عامـل مقیاسـی مجهـول باشند. به عبارت دیگر Σ_iها ساختاری به فـرم $\Sigma_i = \sigma^۲ \Lambda_i$، $i = ۱,\ldots,k$، را داشـته باشـند

بطوری‌که Λ_i ها ماتریس‌های ناویژه[1] و معلوم بوده و $\sigma^{۲}$ مجهول باشد. در این حالت کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴)، تنها آماره آزمون و توزیع تحت فرض صفر آن را محاسبه کردند. البته آماره به‌دست آمده توسط آنها یکتا نمی‌باشد، چرا که مقدار برآورد شده برای پارامتر $\sigma^{۲}$ در ساختار آماره از یک جامعه به جامعه دیگر تغییر می‌کند. در قضیه زیر، نشان داده شده که ممکن است برآورد پارامتر $\sigma^{۲}$ تحت برخی از فرضیه‌ها روی مولفه‌های بردار میانگین وجود نداشته باشد. در حقیقت مقدار این برآورد می‌تواند صفر باشد.

قضیه۳. فرض کنید $\mathbf{X}_{i۱},\mathbf{X}_{i۲},\ldots,\mathbf{X}_{in_i}$ ، $i=۱,۲,\ldots,k$، نمونه‌های تصادفی n_i تایی از جامعه نرمال p متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_i$ و ماتریس واریانس کواریانس به فرم $\Sigma_i=\sigma^{۲}\Lambda_i$ باشند. اگر نمونه‌های به‌دست آمده از جامعه iام در فرض مرتب شده

$$H':\mu_{۱i}\le\mu_{۲i}\le\ldots\le\mu_{pi} \tag{۵}$$

(با حداقل یک نامساوی اکید) یا در فرض

$$H'':\mu_{۱i}\ge\mu_{۲i}\ge\ldots\ge\mu_{pi} \tag{۶}$$

(با حداقل یک نامساوی اکید) صدق کنند که در آن μ_{si} ، $s=۱,۲,\ldots,p$، مولفه sام بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_i$ است، در آن صورت برآورد $\sigma^{۲}$ برابر صفر می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$ برآورد ماکسیمم درستنمایی بردار پارامتر $\boldsymbol{\mu}_i$ تحت فرض H' باشد. آنگاه تابع درستنمایی بر اساس نمونه‌های به‌دست آمده از iامین جامعه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}L(\mu_i,\Sigma_i)&=(۲\pi)^{-n_ip/۲}\left|\Sigma_i\right|^{-n_i/۲}\exp\left\{-\frac{۱}{۲}\sum_{j=۱}^{n_i}(\mathrm{X}_{ij}-\hat{\mu}_i)'\Sigma_i^{-۱}(\mathrm{X}_{ij}-\hat{\mu}_i)\right\}\\&=(۲\pi)^{-n_ip/۲}\left|\Lambda_i\right|^{-n_i/۲}(\sigma^{۲})^{-n_ip/۲}\exp\left\{-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}}\sum_{j=۱}^{n_i}(\mathrm{X}_{ij}-\hat{\mu}_i)'\Lambda_i^{-۱}(\mathrm{X}_{ij}-\hat{\mu}_i)\right\}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^{۲}}\ln L(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i,\Sigma_i)=-\frac{n_ip}{\sigma}+\frac{\sum_{j=۱}^{n_i}(\mathbf{X}_{ij}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'\Lambda_i^{-۱}(\mathbf{X}_{ij}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)}{\sigma^{۳}}.$$

[1] Nonsingular Matrices

با مساوی صفر قرار دادن این عبارت، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر $\sigma^{۲}$ عبارت است از:

$$\hat{\sigma}^{۲} = \frac{۱}{n_i p} \sum_{j=۱}^{n_i} (\mathbf{X}_{ij} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i)' \Lambda_i^{-۱} (\mathbf{X}_{ij} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_i).$$

بنابراین اگر داده‌ها در رابطه (۵) صدق کنند، آنگاه مطابق با الگوریتم ادغام مجاورهای متجانس (سیل‌واپول و سن، ۲۰۰۵)، بردار X_{si} برآوردی برای μ_{si} می‌باشد. چون برای تمام $s = ۱,۲,\ldots,p$ چنین چیزی درست است، بنابراین $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i = \mathbf{X}_{ij}$ خواهد بود و در نتیجه $\hat{\sigma}^{۲} = ۰$.

لازم به ذکر است که اگر مولفه‌های بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_i$ نیز به‌صورت غیر صعودی مرتب شده باشند، (در رابطه (۶) صدق کنند) روش اثبات مشابه است. بنابراین تحت شرایط گفته شده، آماره آزمون پیشنهاد شده در قضیه ۳.۴ توسط کولاتونگا و ساسابوچی (۱۹۸۴) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{E}^{۲}_{k,p,\hat{\sigma}^{۲}=۰} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \bar{\mathbf{X}})' \Lambda_i^{-۱} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \bar{\mathbf{X}})}{\sum_{i=۱}^{k} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \Lambda_i^{-۱} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})}. \qquad (۷)$$

جدول ۶: مقادیر بحرانی آماره $\bar{E}^{۲}_{k,p,\hat{\sigma}^{۲}=۰}$ برای $p = ۳$

k	α					k	α				
	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵		۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵
۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱۷	۰/۲۷۱	۰/۳۱۳	۰/۳۵۱	۰/۳۹۷	۰/۴۲۷
۳	۰/۸۸۷	۰/۹۶۵	۰/۹۹۹	۱	۱	۱۸	۰/۲۵۹	۰/۳۰۰	۰/۳۳۷	۰/۳۸۰	۰/۴۱۰
۴	۰/۷۲۴	۰/۸۱۴	۰/۸۷۷	۰/۹۳۳	۰/۹۶۱	۱۹	۰/۲۴۹	۰/۲۸۹	۰/۳۲۳	۰/۳۶۶	۰/۳۹۴
۵	۰/۶۲۸	۰/۷۱۵	۰/۷۸۲	۰/۸۴۸	۰/۸۸۶	۲۰	۰/۲۴۰	۰/۲۷۸	۰/۳۱۲	۰/۳۵۲	۰/۳۸۰
۶	۰/۵۵۸	۰/۶۳۹	۰/۷۰۵	۰/۷۷۵	۰/۸۱۶	۲۱	۰/۲۳۲	۰/۲۶۸	۰/۳۰۱	۰/۳۳۹	۰/۳۶۷
۷	۰/۵۰۳	۰/۵۷۹	۰/۶۴۲	۰/۷۱۱	۰/۷۵۴	۲۲	۰/۲۲۴	۰/۲۵۹	۰/۲۹۰	۰/۳۲۸	۰/۳۵۴
۸	۰/۴۶۰	۰/۵۳۱	۰/۵۹۰	۰/۶۵۷	۰/۶۹۹	۲۳	۰/۲۱۷	۰/۲۵۱	۰/۲۸۱	۰/۳۱۷	۰/۳۴۳
۹	۰/۴۲۵	۰/۴۹۰	۰/۵۴۶	۰/۶۱۱	۰/۶۵۲	۲۴	۰/۲۱۰	۰/۲۴۲	۰/۲۷۲	۰/۳۰۷	۰/۳۳۲
۱۰	۰/۳۹۵	۰/۴۵۶	۰/۵۰۹	۰/۵۷۱	۰/۶۱۱	۲۵	۰/۲۰۳	۰/۲۳۵	۰/۲۶۴	۰/۲۹۸	۰/۳۲۲
۱۱	۰/۳۶۹	۰/۴۲۷	۰/۴۷۷	۰/۵۳۶	۰/۵۷۴	۲۶	۰/۱۹۸	۰/۲۲۸	۰/۲۵۶	۰/۲۸۹	۰/۳۱۳
۱۲	۰/۳۴۸	۰/۴۰۲	۰/۴۵۰	۰/۵۰۵	۰/۵۴۳	۲۷	۰/۱۹۲	۰/۲۲۱	۰/۲۴۹	۰/۲۸۱	۰/۳۰۴
۱۳	۰/۳۲۹	۰/۳۸۰	۰/۴۲۵	۰/۴۷۹	۰/۵۱۵	۲۸	۰/۱۸۷	۰/۲۱۵	۰/۲۴۲	۰/۲۷۳	۰/۲۹۶
۱۴	۰/۳۱۲	۰/۳۶۰	۰/۴۰۳	۰/۴۵۵	۰/۴۸۹	۲۹	۰/۱۸۲	۰/۲۱۰	۰/۲۳۶	۰/۲۶۶	۰/۲۸۸
۱۵	۰/۲۹۷	۰/۳۴۳	۰/۳۸۴	۰/۴۳۳	۰/۴۶۷	۳۰	۰/۱۷۸	۰/۲۰۴	۰/۲۲۹	۰/۲۵۹	۰/۲۸۱
۱۶	۰/۲۸۳	۰/۳۲۸	۰/۳۶۷	۰/۴۱۴	۰/۴۴۶						

جدول ۷: توان آماره $\bar{E}^{2}_{k,p,\hat{\sigma}^2=0}$ در سطوح معنی‌داری ۰/۰۵ و ۰/۰۲۵ و $\boldsymbol{\mu}_v=(\beta v,\beta v+1)$

k	۲	۳	۲	۳	k	۲	۳	۲	۳
	α					α			
β	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۵	β	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۵
۳	۰/۹۰۶	۰/۹۲۸	۰/۹۴۷	۱	۱/۱۰	۰/۲۹۰	۰/۳۳۵	۰/۳۲۶	۰/۴۱۱
۲	۰/۸۶۱	۰/۸۹۳	۰/۸۸۴	۰/۹۷۳	۱/۲۰	۰/۲۷۶	۰/۲۸۳	۰/۲۸۰	۰/۳۷۰
۳/۲	۰/۷۹۲	۰/۸۷۰	۰/۸۳۱	۰/۹۲۲	۱/۳۰	۰/۲۵۲	۰/۲۶۰	۰/۲۵۸	۰/۳۲۸
۱	۰/۷۲۶	۰/۷۴۰	۰/۷۸۳	۰/۸۳۰	۱/۴۰	۰/۱۹۳	۰/۲۰۲	۰/۲۴۶	۰/۲۹۷
۱/۲	۰/۵۸۱	۰/۶۲۹	۰/۶۱۸	۰/۷۴۹	۱/۵۰	۰/۱۱۲	۰/۱۲۶	۰/۱۳۹	۰/۱۵۸
۱/۳	۰/۴۵۰	۰/۵۲۱	۰/۴۹۶	۰/۵۷۷	۱/۶۰	۰/۰۸۹	۰/۰۷۵	۰/۰۹۲	۰/۰۸۷
۱/۴	۰/۴۲۲	۰/۴۶۹	۰/۴۷۵	۰/۵۰۶	۱/۷۰	۰/۰۴۶	۰/۰۵۰	۰/۰۶۸	۰/۰۷۲
۱/۵	۰/۳۹۵	۰/۴۱۴	۰/۴۳۲	۰/۴۶۲	۰	۰/۰۲۶	۰/۰۲۸	۰/۰۵۶	۰/۰۶۰
۱/۸	۰/۳۶۴	۰/۳۷۸	۰/۴۰۹	۰/۴۲۵					

آنچه از نتایج جدول (۶) استنباط می‌شود، مشابه استنباط در مورد نتایج جداول (۲) و (۳) می‌باشد و استنباط نتایج از جدول (۷) نیز مشابه استنباط نتایج در مورد جدول (۴) است.

جدول ۸: p -مقدار آماره $\bar{E}^{2}_{k,p,\hat{\sigma}^2=0}$ برای دو و سه جامعه نرمال دو متغیره

	k			k	
β	۲	۳	β	۲	۳
۳	۰/۲۰۷	۰/۲۸۳	۱/۹	۰/۴۶۳	۰/۲۲۴
۲	۰/۰۸۱	۰/۲۷۶	۱/۱۰	۰/۳۰۶	۰/۴۰۵
۳/۲	۰/۲۹۴	۰/۱۰۵	۱/۲۰	۰/۲۱۱	۰/۱۸۳
۱	۰/۱۱۷	۰/۳۲۱	۱/۳۰	۰/۰۹۱	۰/۳۵۵
۱/۲	۰/۳۹۳	۰/۲۰۱	۱/۴۰	۰/۲۰۶	۰/۱۱۹
۱/۳	۰/۳۶۶	۰/۲۰۴	۱/۵۰	۰/۲۴۵	۰/۰۷۴
۱/۴	۰/۳۱۸	۰/۱۰۶	۱/۶۰	۰/۲۲۳	۰/۲۶۱
۱/۵	۰/۱۳۳	۰/۴۲۱	۱/۷۰	۰/۰۷۱	۰/۰۸۴
۱/۸	۰/۲۷۰	۰/۰۸۵			

۵- محاسبه آماره آزمون با ماتریس‌های واریانس کواریانس مجهول و برابر بر حسب مخروط‌های محدب بسته

ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳)، برای مساله آزمون (۱) وقتی‌که ماتریس‌های واریانس کواریانس کاملاً مجهول و برابر باشند، آماره

$$\overline{T}^{2} = \sum_{i=1}^{k} n_i (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \overline{\mathbf{X}})' S^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_i - \overline{\mathbf{X}}), \qquad (۹)$$

را پیشنهاد دادند که در آن $\overline{\mathbf{X}} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^{k} n_i \overline{\mathbf{X}}_i$، $S = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{X}_{ij} - \overline{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_{ij} - \overline{\mathbf{X}}_i)'$ و $[\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\mu}}_k]$ رگرسیون همنوای p متغیره $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k$ با وزن‌های $n_1 S^{-1}, \ldots, n_k S^{-1}$ می‌باشد. همچنین به مطالعه توزیع آماره تحت فرض صفر پرداختند.

در این بخش تعدادی آزمون ارائه شده، و نشان داده می‌شود که محاسبه احتمال آنها با توجه به مقدار مشاهده شده می‌تواند به عنوان کران‌های بالا برای $p-$مقدارهای آزمون (۱) برای وقتی‌که ماتریس‌های واریانس کواریانس کاملاً مجهول و برابر هستند، بکار روند.

تعریف ۲. فرض کنید $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)'$ و $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k)'$ بردارهای p بعدی در فضای اقلیدسی R^p باشند. برای هر ماتریس $p \times p$ معین مثبت $\mathbf{\Lambda}$، ضرب داخلی در فضای اقلیدسی R^{pk} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\Lambda} = \sum_{i=1}^{k} n_i \mathbf{x}_i' \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{y}_i = (\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \ldots, \mathbf{x}_k') \begin{pmatrix} n_1 \mathbf{\Lambda}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_k \mathbf{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}.$$

همچنین نرم $\|.\|_{\Lambda}$ در R^{pk} عبارت است از $\|\mathbf{x}\|_{\Lambda} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\Lambda}^{1/2}$.

تعریف ۳. فرض کنید $\mathcal{C}$ زیر مجموعه غیر تهی در فضای اقلیدسی باشد. $\mathcal{C}$ را یک مخروط محدب گویند اگر $x, y \in \mathcal{C}$ و $\lambda \geq 0, \gamma \geq 0$، آنگاه $\lambda x + \gamma y \in \mathcal{C}$. همچنین $\mathcal{C}$ یک مخروط محدب بسته گفته می شود اگر اولاً مخروطی محدب بوده و ثانیاً یک مجموعه بسته باشد. حال مخروط‌های محدب بسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L} = \left\{ \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{\mu}_1 = \cdots = \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\mu}_i \in R^p, i = 1,2,\ldots,k \right\},$$

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{\mu}_1 \le \cdots \le \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\mu}_i \in R^p, i = 1,2,\ldots,k \right\}.$$

در این صورت فرض‌های مورد بررسی در (۱) عبارتند از $H_0 : \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{L}$ در مقابل $H_1 : \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{C}_0$.

با استفاده از نماد ساسابوچی و همکاران (۲۰۰۳)، فرض کنید برای هر $\mathbf{x} \in R^{kp}$، $\pi_{\Lambda}(\mathbf{x}, \mathcal{C})$ بیانگر تصویر متعامد $\mathbf{x}$ روی مخروط محدب بسته $\mathcal{C}$ باشد. بنابراین $\pi_{\Lambda}(\mathbf{x}, \mathcal{C})$ نقطه‌ای است که عبارت $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{\Lambda}$ را برای هر $\mathbf{z} \in \mathcal{C}$ مینیمم می‌کند.

بنابراین آماره آزمون (۹) را می‌توان به‌صورت زیر بر حسب مخروط‌های محدب بسته $\mathcal{L}$ و $\mathcal{C}_0$ نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{T}^2 = \bar{T}^2(\boldsymbol{\mu}) &= \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\pi_S(\mathbf{X}_i, \mathcal{L}) - \pi_S(\mathbf{X}_i, \mathcal{C}_0)\right]' S^{-1} \left[\pi_S(\mathbf{X}_i, \mathcal{L}) - \pi_S(\mathbf{X}_i, \mathcal{C}_0)\right] \\ &= \| \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{L}) - \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_0) \|_S^2 \\ &= \langle \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{L}) - \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_0), \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{L}) - \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_0) \rangle_S. \end{aligned} \tag{10}$$

با تعریف $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$، بدیهی است که $\mathbf{Z}$ دارای توزیع $N_p(0, \Sigma)$ می‌باشد. با توجه به اینکه برای هر مخروط محدب بسته $\mathcal{C}$ که $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{C}$،

$$\pi_S(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}, \mathcal{C}) = \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}) - \boldsymbol{\mu}, \tag{11}$$

می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطه (۱۱)، $p-$مقدار آزمون عبارت است از:

$$\begin{aligned} p - value &= \sup_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{C}_0} \sup_{\Sigma > 0} P(\bar{T}^2(\boldsymbol{\mu}) > t_{ob}) \\ &= \sup_{\Sigma > 0} P(\bar{T}^2(\boldsymbol{\mu} = 0) > t_{ob}) \end{aligned} \tag{12}$$

که در آن t_{ob} مقدار مشاهده شده آماره و $\sup_{\Sigma}$ سوپریمم روی تمام ماتریس‌های معین مثبت $p \times p$ است.

۵-۱ کران‌های بالای p – مقدار

فرض کنید برای هر k، $k=1,\dots,p$، $\mathcal{C}_k$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که برای هر i و j، محدودیت یکنوایی روی kامین ردیف بردارهای $\boldsymbol{\mu}_i$ و $\boldsymbol{\mu}_j$ برقرار باشد. آنگاه بدیهی است کـه $\mathrm{L} \subset \mathcal{C}_0 = \bigcap_{i=1}^{p} \mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_k$. حال آماره زیر را در نظر بگیرید:

$$\bar{T}_k^2 = \bar{T}_k^2(\boldsymbol{\mu}) = \| \pi_S(\mathbf{X}, \mathrm{L}) - \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_k) \|_S^2 . \qquad (13)$$

لم .: اگر M یک ماتریس معین مثبت باشد، آنگاه

الف) $\bar{T}^2 = \| \pi_{MSM'}(M\mathbf{X}, M\mathrm{L}) - \pi_{MSM'}(M\mathbf{X}, M\mathcal{C}_0) \|_{MSM'}^2$

ب) $\bar{T}_k^2 = \| \pi_{MSM'}(M\mathbf{X}, M\mathrm{L}) - \pi_{MSM'}(M\mathbf{X}, M\mathcal{C}_k) \|_{MSM'}^2$

ج) $\bar{T}_k^2 \geq \bar{T}^2$.

اثبات. با توجه به تعریف ضرب داخلی، چون M یک ماتریس معین مثبت است، آنگـاه بـرای $A=(A_1,\dots,A_k)'$ و $B=(B_1,\dots,B_k)'$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle MA, MB \rangle_{MSM'} &= \sum_{i=1}^{k} n_i A_i' M' M^{-1'} S^{-1} M^{-1} M B_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i A_i' S^{-1} B_i = \langle A, B \rangle_S .\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به این تساوی، خواهیم داشت:

$$\bar{T}^2 = \| \pi_S(\mathbf{X}, \mathbf{L}) - \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_0) \|_S^2 = \| M\, \pi_{MSM'}(\mathbf{X}, \mathbf{L}) - M\, \pi_{MSM'}(\mathbf{X}, \mathcal{C}_0) \|_{MSM'}^2 .$$

از طرفی چون برای هر مخروط محدب بسته $\mathcal{C}$، $M\pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}) = \pi_S(M\mathbf{X}, M\mathcal{C})$ می‌باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bar{T}^2 = \| \pi_{MSM'}(M\mathbf{X}, M\mathrm{L}) - \pi_{MSM'}(M\mathbf{X}, M\mathcal{C}_0) \|_{MSM'}^2 .$$

اثبات قسمت (ب) شبیه اثبات (الف) است. برای اثبات قسمت (ج)، ابتدا نشان می‌دهیم رابطه

$$\bar{T}_k^2 = \bar{T}^2 + \| \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_0) - \pi_S(\mathbf{X}, \mathcal{C}_k) \|_S^2 + 2u, \qquad (14)$$

که در آن $u=\langle \pi_S(\mathbf{X},\mathrm{L})-\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_0),\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_0)-\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_k)\rangle_S$ برقرار است.

فرض کنید ϑ_i برآورد پارامتر روی مخروط $\mathcal{C}_k$ باشد، در این صورت رابطه (۱۴) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}n_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\bar{\mathbf{X}})'S^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\bar{\mathbf{X}})+\sum_{i=1}^{k}n_i(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\vartheta_i)'S^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\vartheta_i)+2\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{\mathbf{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'S^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\vartheta_i)\\
&=\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_i'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_i'S^{-1}\bar{\mathbf{X}}-\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{\mathbf{X}}'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i+\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{\mathbf{X}}'S^{-1}\bar{\mathbf{X}}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_i'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_i'S^{-1}\vartheta_i-\sum_{i=1}^{k}n_i\vartheta_i'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i+\sum_{i=1}^{k}n_i\vartheta_i'S^{-1}\vartheta_i\\
&\quad+2\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{\mathbf{X}}'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-2\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{\mathbf{X}}'S^{-1}\vartheta_i-2\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_i'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i+2\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{\boldsymbol{\mu}}_i'S^{-1}\vartheta_i\\
&=\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{\mathbf{X}}'S^{-1}\bar{\mathbf{X}}-2\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{\mathbf{X}}'S^{-1}\vartheta_i+\sum_{i=1}^{k}n_i\vartheta_i'S^{-1}\vartheta_i\\
&=\sum_{i=1}^{k}(\bar{\mathbf{X}}-\vartheta_i)'S^{-1}(\bar{\mathbf{X}}-\vartheta_i)=\|\pi_S(\mathbf{X},\mathbf{L})-\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_k)\|_S^2=\bar{T}_k^2.
\end{aligned}$$

از طرفی بنا به لم از ۱.۱ زارانتونلو (۱۹۷۱)، $\mathbf{x}^*=\pi_{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{x},\mathcal{C})$ اگر و فقط اگر

$$\mathbf{x}^*\in\mathcal{C},\quad <\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^*>=0,\quad <\mathbf{x}-\mathbf{x}^*,B>\leq 0, \tag{۱۵}$$

برای تمام $B\in\mathcal{C}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
u&=\langle\pi_S(\mathbf{X},\mathbf{L})-\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_0),\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_0)-\pi_S(\mathbf{X},\mathcal{C}_k)\rangle_S\\
&=\sum_{i=1}^{k}(\bar{\mathbf{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'S^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\vartheta_i)\\
&=\sum_{i=1}^{k}(\bar{\mathbf{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'S^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_i-\sum_{i=1}^{k}(\bar{\mathbf{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'S^{-1}\vartheta_i=-\sum_{i=1}^{k}(\bar{\mathbf{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_i)'S^{-1}\vartheta_i\geq 0.
\end{aligned}$$

پس از فرمول (۱۴) نتیجه می‌گیریم که $\bar{T}_k^2\geq\bar{T}^2$.

با فرض $\boldsymbol{\mu}=0$، تعریف کنید $\mathbf{Y}=M\mathbf{X}$ آنگاه

$$\begin{aligned}
\bar{T}_k^2(\mathbf{Y})&=\|\pi_S(\mathbf{Y},M\mathrm{L})-\pi_S(\mathbf{Y},M\mathcal{C}_k)\|_S^2\\
&=\|\pi_{MSM'}(M\mathbf{X},M\mathrm{L})-\pi_{MSM'}(M\mathbf{X},M\mathcal{C}_k)\|_{MSM'}^2\ .
\end{aligned}\tag{۱۶}$$

با مقایسه رابطه (۱۴) با قسمت (ب) از لم ۱، بدیهی است که $\bar{T}_k^{۲} = \bar{T}_k^{۲}(\mathbf{Y})$. چون $\bar{T}_k^{۲} \geq \bar{T}^{۲}$، بنابراین $\bar{T}_k^{۲}(\mathbf{Y}) \geq \bar{T}^{۲}$. همچنین واضح است که $E(\mathrm{Y}) = ۰$ و ادعا می‌کنیم که $\Sigma_{\mathbf{Y}} = I$، زیرا چون Σ یک ماتریس معین مثبت است، بنابراین ماتریس متقارن و متعامد G وجود دارد که بر اساس تجزیه طیفی $(G\Sigma G)^{-\frac{۱}{۲}} = AD$ که در آن A ماتریس متعامد و D یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطری مثبت است. با فرض اینکه $M = GDG$ آنگاه

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{Y}} = \Sigma_{MX} &= M\Sigma M = (GDG)\Sigma(GDG)' = (GD)(G\Sigma G)(D'G) \\ &= (GA'AD)(G\Sigma G)(D'A'AG) = (GA')(AD)(G\Sigma G)(AD)'(AG) \\ &= (GA')(G\Sigma G)^{-\frac{۱}{۲}}(G\Sigma G)(G\Sigma G)^{-\frac{۱}{۲}}(AG) = I.\end{aligned}$$

پس $\mathbf{Y}$ دارای توزیع $N(۰,I)$ می‌باشد. بنابراین برای هر $t_{ob} \geq ۰$ داریم:

$$P(\bar{T}^{۲}(۰,\Sigma) > t_{ob}) \leq P(\bar{T}_k^{۲}(۰,I) > t_{ob}) = P(\bar{T}_k^{۲}(\mathrm{Y}) > t_{ob})$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sup_{\Sigma > ۰} P(\bar{T}^{۲}(۰,\Sigma) > t_{ob}) \leq P(\bar{T}_k^{۲}(۰,I) > t_{ob}).$$

بنابراین $P(\bar{T}_k^{۲}(۰,I) > t_{ob})$ که در آن $\bar{T}_k^{۲}$، $k = ۱,\dots,p$، آزمون‌های ارائه شده در رابطه (۱۳) هستند، کران‌های بالایی برای $p-$مقدارهای آزمون فرض (۱) برای حالت مجهول و برابر بودن ماتریس‌های واریانس کواریانس هستند.

مراجع

Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 2nd edition*, John Wiley, New York.

Barlow. R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972). *Statistical Inference under Order Restrictions: The Theory and Application of Isotonic Regression*. John Wiley, New York.

Bartholomew, D. J. (1959a). A test of homogeneity for ordered alternatives. *Biometrika*, **46**, 36-48.

Bartholomew, D. J. (1959b). A test of homogeneity for ordered alternatives II. *Biometrika*, **46**, 328-335.

Bartholomew, D. J. (1961). Ordered tests in the analysis of variance. *Biometrika*, **48**, 325-332.

Chacko, V. J. (1963). Testing homogeneity against ordered alternatives. *Ann. Math. Statist*., **34**, 945-956.

Kudo, A. (1963). A multivariate analogue of the one-sided test. *Biometrika*, **50**, 403-418.

Kudo, A. and Choi, J. R. (1975). A generalized multivariate analogue of the one-sided test. *Memoirs of the Faculty of Science*, *Kyushu Univ.*, **29(2)**, 303-328.

Kudo, A. and Yao, J. S. (1982). Tables for testing ordered alternatives in an analysis of variance without replications. *Biometrika*, **69(1)**, 237-238.

Kulatunga, D. D. S. (1984). Convolutions of the probabilities $P(l,k)$ used in order restricted inference. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, *Math*., **38**, 9-15.

Kulatunga, D. D. S., Inutsuka, M. and Sasabuchi, S. (1990). *A Simulation Study of Some Test Procedures for Testing Homogeneity of Mean Vectors against Multivariate Isotonic Alternatives.* Tech. Rep., *Kyushu Univ.*.

Kulatunga, D. D. S. and Sasabuchi, S. (1984). A test of homogeneity of mean vectors against multivariate isotonic alternatives. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, *Math*., **38**, 151-161.

Nomakuchi, K. and Shi. N. Z. (1988). A test of a multiple isotonic regression problem. *Biometrika*, **75**, 181-184.

Perlman, M. D. (1969). One-sided testing problems in multivariate analysis. *Ann. Math. Statist*., **40(2)**, 549-567.

Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L. (1988). *Order Restricted Statistical Inference*. John Wiley, New York.

Sarka, S. K., Snapinn, S., and Wang, W. (1995). On improving the min test for the analysis of combination drug trails (Corr: 1998V60 p 180-181). *J. Statist. Comput. and Simulat.*, **51**, 197-213.

Sasabuchi, S. (2007). More powerful tests for homogeneity of multivariate normal mean v ectors under an order restriction. *Sankhya*, **69(4)**, 700-716.

Sasabuchi, S., Inutsuka, M. and Kulatunga, D. D. S. (1983). A multivariate version of isotonic regression. *Biometrika*, **70**, 465-472.

Sasabuchi, S., Inutsuka, M. and Kulatunga, D. D. S. (1992). An algorithm for computing multivariate isotonic regression. *Hiroshima Math*. *J.*, **22**, 551-560.

Sasabuchi, S. and Kulatunga, D. D. S. (1985). Some approximations for the null distribution of the $\overline{E}^2$ statistic used in order restricted inference. *Biometrika*, **72(2)**, 476-480.

Sasabuchi, S., Tanaka, K. and Takeshi, T. (2003). Testing homogeneity of multivariate normal mean vectors under an order restriction when the covariance matrices are common but unknown. *Ann. Statist*., **31(5)**, 1517-1536.

Shorack, G. R. (1967). Testing against ordered alternative in model I analysis of variance: normal theory and nonparametric. *Ann. Math. Statist*., **38**, 1704-1753.

Silvapulle, M. J. and Sen, P. K. (2005). *Constrained Statistical Inference: Inequality, Order*, *and Shape Restrictions*, John Wiley, New York.

Tang, D. I., Gnecco, C. and Geller, N. (1989). An approximate likelihood ratio test for a normal mean vector with nonnegative components with application to clinical trials. *Biometrika*, **76**, 577-583.

Zarantonello, E. H. (1971). *Projection on Convex Sets in Hilbert Space and Spectral Theory*. John Wiley, Academic Press.

Testing Homogeneity of Mean Vectors against ordered restriction in Multivariate Normal Distribution

Abouzar Bazyari, Rahim Chinipardaz and Aliakbar Rasekhi

Department of Statistics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

Abstract

This paper concerned with the testing of homogeneity of mean vectors against ordered restriction in multivariate normal distribution. Three different cases for covariance matrices are considered. First when covariance matrices are known, second when it is assume that covariance matrices have an unknown scale factor and third when the covariance matrices are completely unknown and equal. In two first cases the critical values of test statistic are computed for bivariate and trivariate normal distribution. The power and $p-$value of the test statistic are estimated by simulation method. When the covariance matrices are completely unknown and equal some tests are presented which the computation of those probabilities can be used as the upper bonds of $p-$values.

Keywords: Pool adjacent violators algorithm, Likelihood ratio test, Isotonic regression, $p-$value.

Mathematics Subject Classification (2000): 62F30; 62F03.