

## شبیه‌سازی گازهای تنفسی در مجراهای هوایی

عظیم امین عطایی<sup>۱</sup>

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۸/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۴/۱۲

**چکیده:** در این مطالعه، به شبیه‌سازی گازهای تنفسی در مجراهای هوایی انسان می‌پردازیم و معادله شبیه‌سازی شده را به دو روش متفاوت حل می‌نماییم. مشاهده شده‌است که استفاده از روش عددی برای حل معادله حاصل از شبیه‌سازی در مقایسه با روش تحلیلی ارائه شده مشکل و پرهزینه است.

**واژه‌های کلیدی:** روش تحلیلی، روش عددی، غلظت، هندسه مجرای هوایی، نای

**رده بندی ریاضی:** ۹۲B۰۵، ۳۵K۱۰

### ۱- مقدمه

مکانیک زیستی به‌عنوان شاخه‌ای مهم از ریاضیات کاربردی سال‌ها است که در علوم بین رشته‌ای در جهان مطرح است. در این علم ساختمان و اعمال حیاتی موجودات زنده از دیدگاه تجربی و ریاضی بررسی می‌شوند. آن‌گاه معادله شبیه‌سازی شده با استفاده از شرایطی که از لحاظ فیزیکی، شیمیایی و زیستی به موضوع حاکم است، حاصل می‌شود. در واقع با شبیه‌سازی، شرایط و واقعیت موجود در طبیعت را دقیق‌تر و از دیدگاه ریاضی بررسی می‌کنیم. در نتیجه با شبیه‌سازی اعمال حیاتی، مدلی را که از لحاظ طبیعی با واقعیت مسئله منطبق است، به دست می‌آوریم. در این فرآیند، تبادل گاز بین هوا و خون جریان یافته در مجراهای تنفسی از طریق مویرگ‌های ریوی انجام می‌گیرد و عمدتاً به انتشار مولکولی، حرکت هم‌رفت گازهای تنفسی، انتشار تسهیل شونده و انتشار فعال بستگی دارد.

انتشار مولکولی فرآیندی است که شامل حرکت مولکول‌ها از ناحیه‌ای با غلظت بیشتر به ناحیه‌ای با غلظت کمتر شده و در حالت کلی با قانون فیک<sup>۲</sup> بررسی می‌شود [۱]. حرکت هم‌رفت،

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: عظیم امین عطایی ataeei@kntu.ac.ir

انتشاری است که به حرکت سیال بستگی دارد. انتشار تسهیل شونده، فرایندی است که یک حامل به‌طور شیمیایی با ماده انتشار شرکت می‌کند و حرکتش را از ناحیه‌ای با غلظت بالاتر به ناحیه‌ای با غلظت پایین‌تر تسریع می‌کند. در انتشار فعال، ماده با انرژی تهیه شده در واکنش-های بیولوژیکی و بیوشیمیایی در جهت مخالف گرادیان غلظت حرکت می‌کند.

در این مطالعه به بررسی انتشار مولکولی و حرکت همرفت گازهای تنفسی می‌پردازیم. این نوع مطالعه در مسائل بیومهندسی، مانند انتشار مواد [۲]، جریان لایه‌ی سیالات، جریان الکتریکی در کابل‌ها و مسائل انتقال جرم، با شرایط گفته شده در منبع‌ها کاربرد فراوان دارد [۳-۱۳].

مقایسه روش‌های صریح و ضمنی در حل عددی معادله یک بعدی انتشار توسط امین عطایی [۱۴] بررسی شده است. همچنین اخیراً یک مدل ریاضی (عددی) غیریکنواخت در روند انتقال اکسیژن در یک مویرگ ریه توسط امین عطایی [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. در نتیجه، پس از توصیف مدل ریاضی انتقال گاز، جواب‌های عددی و تحلیلی از معادله اساسی ارائه می‌شود. این شبیه‌سازی با استفاده از ضریب پراکندگی انجام شده است [۱۶]. از آنجا که ضریب پراکندگی بستگی نزدیکی به سرعت سیال دارد، سه مقدار ثابت از نسبت جریان  $cm^3/s$  (۳۰۰ و ۲۰۰ و ۱۰۰) در نظر گرفته شده است. به‌علاوه از دو گاز بی‌اثر سنگین و سبک هگزافلورید سولفور ( $SF_6$ ) و هلیوم ( $He$ ) برای بررسی اثر چگالی گاز در مجراهای هوایی در شبیه‌سازی استفاده شده است.

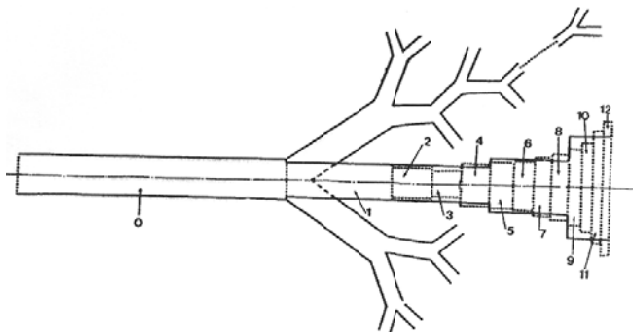
## ۲- مدل ریاضی مسأله مورد مطالعه

ساختار آناتومی لازم برای مدل، براساس اطلاعات زیستی توسط وایبل [۱۷] بررسی شده است. این اطلاعات به‌عنوان یک شبکه مجرای، به‌طور متقارن تقسیم‌بندی و ارائه شده است. در هر سطح همه مجراها باهم در یک مسیر منفرد بررسی می‌شوند. به‌علاوه جهت سادگی، سطوح (۱) و ۲ و ۳ و ۴، (۵ و ۶ و ۷ و ۸) و (۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲) را باهم به‌ترتیب در سطوح جدید ۱، ۲، ۳ و ۴ مجدداً گروه‌بندی می‌کنیم. در این‌صورت چهار شماره سطح ۰ (نای)، ۱، ۲ و ۳ حاصل می‌شود. ساختار هندسی مدل ریاضی در شکل ۱ ترسیم و ابعادش در جدول ۱ داده شده است. با استفاده از جریان همرفت و انتقال گاز، قانون فیک و قانون بقای جرم، داریم [۱]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \left( \frac{\gamma}{s} \frac{ds}{dx} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{v}{s} \right) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (1)$$

که در آن  $c$  غلظت سیال،  $x$  فاصله طولی،  $t$  زمان،  $s$  سطح مقطع،  $v$  نسبت جریان و  $\gamma$  ضریب پراکندگی است. براساس پیشنهاد شرر و همکاران [۱۶]،  $\gamma$  برابر  $\gamma = D + kud$  است که  $k$  ثابت،  $D$  ضریب انتشار مولکولی،  $u$  سرعت میانگین سیال و  $d$  قطر یک مجرای

هوایی است. بنابراین مدل ریاضی انتقال گازها در مجراهای تنفسی با معادله دیفرانسیل جزئی فوق کنترل می‌شود. معادله (۱) را به دو روش عددی و تحلیلی حل می‌کنیم و درمی‌یابیم که روش عددی یک تخمین خوب از جواب دقیق معادله انتقال است و تفاوتی بین این دو جواب وجود ندارد.



شکل ۱: نمایش مدل زیست شناختی از مجرای تنفسی

جدول ۱: اطلاعات زیستی اصلاح شده مجرای تنفسی ارائه شده در وایبل [۱۷]

جمع کلی		طول	حجم $V(z)$ cm <sup>3</sup>	سطح مقطع $S(z)$ (cm <sup>2</sup> )	طول $l(z)$ (cm)	شماره سطوح $z$
حجم	سطح مقطع					
۳۰/۵۰	۲/۵۴	۱۲/۰۰	۳۰/۵۰	۲/۵۴	۱۲/۰۰	۰
			۱۱/۲۵	۲/۳۳	۴/۷۶	۱
			۳/۹۷	۲/۱۳	۱/۹۰	۲
۲۰/۲۰	۲/۳۲	۸/۶۹	۱/۵۲	۲/۰۰	۰/۷۶	۳
			۳/۴۶	۲/۴۸	۱/۲۷	۴
			۳/۳۰	۳/۱۱	۱/۰۷	۵
			۳/۵۳	۳/۹۶	۰/۹۰	۶
۱۵/۱۰	۴/۴۸	۳/۳۷	۳/۸۵	۵/۱۰	۰/۷۶	۷
			۴/۴۵	۶/۹۵	۰/۶۴	۸
			۵/۱۷	۹/۵۶	۰/۵۴	۹
			۶/۲۱	۱۳/۴۰	۰/۴۶	۱۰
۲۸/۸۰	۱۶/۷۴	۱/۷۲	۷/۵۶	۱۹/۶۰	۰/۳۹	۱۱
			۹/۸۲	۲۸/۸۰	۰/۳۳	۱۲

### ۳- حل تحلیلی مسأله مورد مطالعه

معادله انتشار-همرفت شبیه‌سازی شده با معادله (۱) توصیف شده‌است. به سبب طبیعت مختلط، حل معادله فوق بسیار پیچیده و مشکل است. برای حل آن سطح مقطع  $s$  را ثابت فرض کرده یا تابع ساده‌ای از  $x$  در نظر می‌گیریم و هم‌چنین قرار می‌دهیم  $\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$ . در این صورت معادله (۱) با روش‌های تحلیلی و تقریب عددی قابل حل است. یک مشکل اساسی در حل معادله شبیه‌سازی شده جمله  $(\frac{\gamma ds}{s dx} - \frac{v^\circ}{s})$  است. برای رفع این مشکل جمله مذکور را معادل با ثابت  $\alpha$  در نظر می‌گیریم. از این رو داریم:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

که در آن

$$\alpha = \frac{\gamma ds}{s dx} - \frac{v^\circ}{s} \quad (3)$$

است. با حل معادله (۳) رابطه‌ای بین فاصله طولی و سطح مقطع به دست می‌آید. با توجه به تعریف وایبل [۱۷] از سطح مقطع داریم:

$$s(x) = (s_0 + \frac{v^\circ}{s}) e^{\frac{\alpha x}{\gamma}} - \frac{v^\circ}{\alpha}, \quad (4)$$

که در آن  $s_0$  سطح مقطع اولیه است. معادله (۲) را ابتدا بدون جمله همرفت به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

می‌دانیم تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(p) = Lf(t) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \quad (6)$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادله (۵)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial c}{\partial t} dt - \gamma \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dt = 0. \quad (7)$$

انتگرال اول را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial c}{\partial t} dt = [e^{-pt} c]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} c dt = pLc(t) - c_0(x). \quad (۸)$$

با در نظر گرفتن معادله (۸)، معادله (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\gamma \frac{d^{\gamma} c}{dx^{\gamma}} L[c] - pL[c] = c_0(x); \quad (۹)$$

و یا با فرض  $L[c] = \bar{c}$  به صورت ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^{\gamma} \bar{c}}{dx^{\gamma}} - \frac{p}{\gamma} \bar{c} = \frac{c_0(x)}{\gamma}. \quad (۱۰)$$

شرایط اولیه و کرانه‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} c(x, 0) = h(x, 0) = 0, \\ c(0, t) = h(0, t) = \delta(t), \end{cases} \quad (۱۱)$$

که در آن  $\delta$  تابع دلتای دیراک است و  $L[\delta(t)] = 1$ . از  $c_0(x) = 0$  و معادله (۱۰) داریم:

$$\frac{d^{\gamma} \bar{c}}{dx^{\gamma}} - \frac{p}{\gamma} \bar{c} = 0. \quad (۱۲)$$

با توجه به شرایط فوق، جواب معادله (۱۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{c} = \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{\gamma} x\right). \quad (۱۳)$$

با استفاده از جداولی که در مراجع [۱۸ و ۱۹] آمده‌است، از عبارت فوق تبدیل لاپلاس معکوس گرفته که این اولین جواب مسئله است:

$$h(x, t) = \frac{x}{\sqrt{\pi \gamma t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4 \gamma t}\right). \quad (۱۴)$$

با تغییر متغیر  $x + at$  به جای  $x$  جواب معادله (۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 h(x, t) &= \frac{x + \alpha t}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right) \\
 &= \frac{x}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right) + \frac{\alpha t}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

با توجه به یکی از شرایط (۱۱) باید داشته باشیم  $\alpha \exp\left(-\frac{(x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right) = 0$ . در این صورت

جواب نهایی معادله (۲) برای دم  $h(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right)$  است. برای به-دست آوردن جواب معادله برای بازدم  $(2L - x)$  را جایگزین  $x$  می‌کنیم:

$$h(x, t) = \frac{2L - x}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(2L - x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right).$$

در این صورت جواب معادله (۲) برای یک سیکل کامل تنفس به صورت زیر است:

$$h(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right) + \frac{2L - x}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \exp\left(-\frac{(2L - x + \alpha t)^2}{4\gamma t}\right). \quad (16)$$

جواب معادله (۲) با در نظر گرفتن شرط مرزی در حالت حدی حاصل شد، در این صورت جواب معادله با شرط کرانه‌ای اصلی (۱۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 L\{c\} &= L\{h\}L\{\psi(t)\} \Rightarrow L^{-1}\{L\{c\}\} \\
 &= L^{-1}\{L\{h\}L\{\psi(t)\}\} = \psi(t) * h(x, t). \quad (17)
 \end{aligned}$$

#### ۴- حل عددی مسئله مورد مطالعه

روش اجزاء متناهی برای حل عددی معادله انتشار مورد استفاده قرار گرفته است. در حل تمامی این نوع معادلات دو مفهوم کلی یعنی "تفاضلات متناهی" و "اجزاء متناهی" دخالت دارند. به-دلیل سادگی و جامعیت، فقط از اجزاء متناهی استفاده می‌کنیم خصوصاً زمانی که مرز ناحیه خمیده باشد [۲۰]. در این رابطه، روش اجزاء متناهی دچار مشکل نخواهد شد [۲۰]. معادله

$$L(c) \equiv \frac{\partial c}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \left(\frac{\gamma}{s} \frac{ds}{dx} - \frac{v^\circ}{s}\right) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

را با شرایط اولیه و کرانه‌ای به شکل

$$c(x, 0) = 0, x \in (0, L), \quad (19)$$

$$c(0, t) = \psi(t), \quad (20)$$

و

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_{x=L} = 0, \quad (21)$$

در نظر می‌گیریم که  $L$  طول محوری از ابتدای نای تا انتهای مدل است و  $\psi$  شرایط مرزی غیر صفر متناظر با مقدار گاز بی‌اثر را نشان می‌دهد. حل معادله فوق به روش اجزاء متناهی به-صورت زیر است:

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{-x}{h} + 1; & x \in (0, h), \\ 0; & x \notin (0, h), \end{cases}$$

$$w_j(x)_{j=1, \dots, N-1} = \begin{cases} \frac{x}{h} + 1 - j; & x \in ((j-1)h, jh), \\ \frac{-x}{h} + 1 + j; & x \in (jh, (j+1)h), \\ 0; & x \notin ((j-1)h, (j+1)h), \end{cases}$$

$$w_N(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - N + 1; & x \in ((N-1)h, Nh), \\ 0; & x \notin ((N-1)h, Nh). \end{cases}$$

جواب تقریبی  $c_h(0, t)$  از معادله  $L(c)$  را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$c_h(0, t) = \sum C_i(t)w_i + \psi w_0,$$

و

$$c_0(t) = \psi(t)$$

که در آن برای تعیین ضرایب  $C_i(t)$ ، دستگاه  $(L(c_h(0, t)), w_j) = 0$  را تشکیل می‌دهیم. بدین منظور تعریف می‌کنیم:

$$(\gamma, w) = \int_0^L \gamma(x)w(x)dx,$$

$$\begin{aligned}
(L(c_h(\circ, t)), w_j) &= \left( \frac{\partial c_h}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^r c_h}{\partial x^r} - \left( \frac{\gamma}{s} \frac{ds}{dx} - \frac{v^\circ}{s} \right) \frac{\partial c_h}{\partial x}, w_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{dc_i(t)}{dt} (w_i, w_j) - \gamma c_i(t) \left( \frac{d^r w_i}{dx^r}, w_j \right) \right. \\
&\quad \left. - c_i(t) \left( \left( \frac{\gamma}{s} \frac{ds}{dx} - \frac{v^\circ}{s} \frac{dw_i}{dx} \right), w_j \right) \right] + L(\psi(t) w_{\circ}, w_j).
\end{aligned}$$

از رابطه فوق داریم:

$$A \frac{dF(t)}{dt} = BF(t) + y(t), \quad (22)$$

که در آن

$$A = h \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & \dots & \circ \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \circ & \dots & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

9

$$B = \left( \left( \frac{\gamma}{s} \frac{ds}{dx} - \frac{v^\circ}{s} \right) \frac{dw_i}{dx}, w_j \right).$$

از طرفی برای  $j \neq 1$ ، داریم  $L(\psi(t) w_{\circ}, w_j) = 0$ . از این رو می توان نوشت:

$$y(t) = L(\psi(t) w_{\circ}, w_j) = \frac{d\psi(t)}{dx} (w_{\circ}, w_1) - \gamma \psi(t) \left( \frac{d^r w_{\circ}}{dx^r}, w_1 \right), \quad (23)$$

9

$$y(t) = \frac{1}{6} \frac{d\psi(t)}{dt} - \psi(t) \left( \left( \frac{\gamma}{s} \frac{ds}{dx} - \frac{v^\circ}{s} \right) \frac{dw_{\circ}}{dx}, w_1 \right), \quad (24)$$

که در آن  $y^T(t) = (y(t), \circ, \dots, \circ)$  و  $F^T(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_h(t))$ . حال برای به-

دست آوردن جواب عددی از دستگاه دیفرانسیلی،  $\frac{dF}{dt}$  به صورت



$$\frac{dF}{dt}(n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}(F((n+1)\Delta t) - F(n\Delta t))$$

تخمین زده می‌شود. سپس طرح ضمنی مرتبه اول به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A(F((n+1)\Delta t) - F(n\Delta t)) = \Delta t(BF(n+1)\Delta t + y(n+1)\Delta t). \quad (25)$$

با حل دستگاه فوق مقادیر  $c_i(t)$  به دست می‌آیند.

## ۵- نتایج و بحث

مقایسه بین منحنی‌های ترسیم شده از جواب‌های عددی و تحلیلی نشان می‌دهند که این دو جواب برهم منطبق می‌باشند (شکل ۲). جهت بررسی غلظت‌های گاز خروجی برای چهار سطح  $(c_0, c_1, c_2, c_3)$ ، جواب تحلیلی معادله (۱۷) را در نظر می‌گیریم:

$$c(x, t) = \psi(t) * h(x, t) = \int_0^t \psi(\tau) h(x, t - \tau) d\tau, \quad (26)$$

که در آن  $*$  عملگر پیچشی،  $\psi(t)$  الگوی غلظت مقدار گاز تزریق شده در منفذ بالایی نای و  $h(x, t)$  پاسخ دستگاه به یک واحد حرکت است. از دیدگاه نظری  $\psi(t)$  به صورت

$$\psi(t) = 10^{-3} \exp(-10^4(t - 0.105)^2)$$

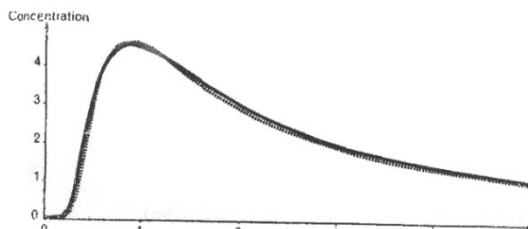
تعریف می‌شود. برای محاسبه غلظت گاز خروجی در هر سطح روش پیچشی را به کار می‌بریم.

سطح ۰ (نای)

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \psi(t) * h_0(t) = \int_0^t \psi(\tau) h_0(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n \psi(t_i) h_0(t - t_i) \Delta t. \end{aligned} \quad (27)$$

سطح ۱

$$\begin{aligned} c_1(t) &= c_0 * h_1(t) = \int_0^t c_0(\tau) h_1(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^n c_0(t_i) h_1(t - t_i) \Delta t. \end{aligned} \quad (28)$$



شکل ۲. مقایسه بین جواب‌های عددی (نقطه چین‌ها) و تحلیلی (خطوط پیوسته) معادله شبیه‌سازی شده

جدول ۲. سرعت متوسط متناظر با هر نسبت جریان بر حسب داده‌های زیستی و ایبل [۱۷]

سرعت متوسط، u (cm/s)			
۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	نسبت جریان
			شماره سطوح
۱۱۸/۱۱	۷۸/۷۴	۳۹/۳۷	۰
۱۲۹/۳۱	۸۶/۲۱	۴۳/۱۰	(۱ و ۲ و ۳ و ۴)
۶۶/۹۶	۴۴/۶۴	۲۲/۳۲	(۵ و ۶ و ۷ و ۸)
۱۷/۹۲	۱۱/۹۵	۵/۹۷	(۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲)

سطح ۲'

$$\begin{aligned}
 c_{\gamma}(t) &= c_{\gamma} * h_{\gamma}(t) = \int_0^t c_{\gamma}(\tau) h_{\gamma}(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{i=1}^n c_{\gamma}(t_i) h_{\gamma}(t - t_i) \Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

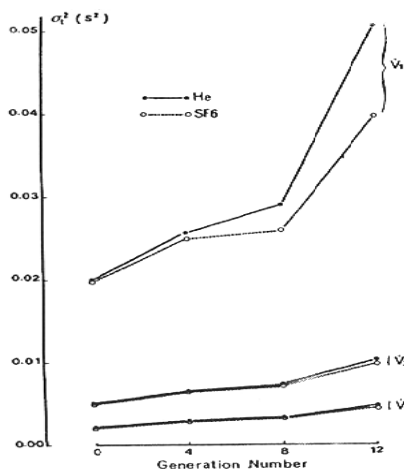
سطح ۳'

$$\begin{aligned}
 c_{\gamma}(t) &= c_{\gamma} * h_{\gamma}(t) = \int_0^t c_{\gamma}(\tau) h_{\gamma}(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{i=1}^n c_{\gamma}(t_i) h_{\gamma}(t - t_i) \Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

نتایج به صورت داده‌های عددی (جداول ۲ و ۳)، منحنی‌های وارینانس غلظت زمان و غلظت ماکسیمم خروجی ارائه شده است (شکل‌های ۳ و ۴).

**جدول ۳:** ضریب پراکندگی He و SF<sub>۶</sub> محاسبه شده برای هر نسبت جریان برحسب داده‌های زیستی [۱۷]

$\gamma$ (SF6) (cm <sup>۲</sup> /s)			$\gamma$ (He) (cm <sup>۲</sup> /s)			نسبت جریان شماره سطوح
۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	
۱۵۵/۳۰	۱۰۳/۵۶	۵۱/۸۳	۱۵۵/۹۸	۱۰۴/۲۴	۵۲/۵۱	۰
۷۵/۳۷	۵۰/۲۸	۲۵/۱۹	۷۶/۰۵	۵۰/۹۶	۲۵/۸۷	(۱ و ۲ و ۳ و ۴)
۱۴/۰۷	۹/۴۱	۴/۷۶	۱۴/۷۵	۱۰/۰۹	۵/۳۱	(۵ و ۶ و ۷ و ۸)
۲/۰۰	۱/۳۷	۰/۷۴	۲/۶۸	۲/۰۵	۱/۴۲	(۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲)

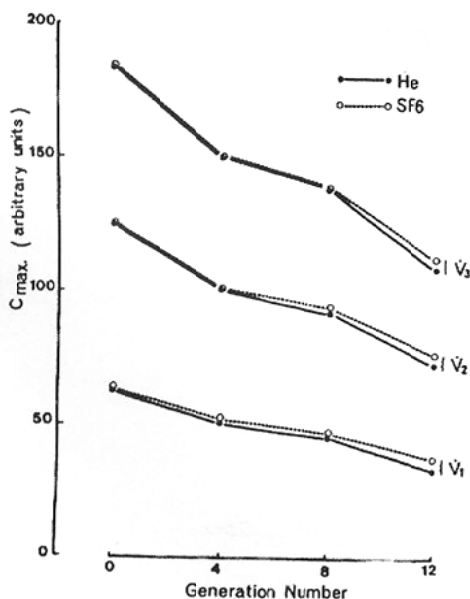


**شکل ۳:** منحنی واریانس غلظت زمان خروجی نسبت به شماره سطح در هر نسبت جریان برای He و SF<sub>۶</sub>.

### ۶- بحث و نتیجه‌گیری

استفاده از روش اجزاء متناهی برای حل معادله انتقال در مقایسه با روش تحلیلی مشکل و پرهزینه است. واریانس زمان با فاصله از نای افزایش و با افزایش نسبت جریان کاهش می‌یابد. مقایسه بین شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که تقریباً هیچ تفاوتی بین استفاده از He و SF<sub>۶</sub> وجود ندارد. غلظت ماکسیمم با افزایش نسبت جریان افزایش می‌یابد. مشاهده نشان می‌دهد که هیچ

تفاوتی بین He و  $SF_6$  برای هر نسبت جریان وجود ندارد جز در سطح دوازده که غلظت ماکسیمم He پایین تر از غلظت ماکزیمم  $SF_6$  است. گازهای تنفسی در مجراهای هوایی به سه پارامتر نسبت جریان، هندسه مجراهای هوایی (پیوست ۱) و چگالی گاز بستگی دارند. هم چنین ایفای نقش این پارامترها در مجراهای هوایی مرکزی و پایانی متفاوت است.



شکل ۴: منحنی غلظت ماکسیمم خروجی نسبت به شماره سطح در هر نسبت جریان برای He و  $SF_6$ .

## سپاس‌گزاری

از داوران محترم، که پیشنهادات سازنده‌ای جهت ارائه بهتر این مقاله در بخش‌های مختلف آن نموده‌اند، صمیمانه قدردانی می‌شود.

## مراجع

- [1] Lih, M.M. (1975), *Transport Phenomena in Medicine and Biology*, New York: John Wiley & Sons.
- [2] Desai, C.S. and Johnson, L.D. (1973), Evaluation of some numerical schemes for consolidation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 7, 243.

- [3] Aminataei, A., Sharan, M. and Singh, M.P. (1985), A numerical solution for the nonlinear convective-facilitated diffusion reaction problem for the process of blood oxygenation in the lungs, *J. Nat. Acad. Math.*, **3**, 182.
- [4] Aminataei, A., Sharan, M. and Singh, M.P. (1987a), A numerical model for the process of gas exchange in the pulmonary capillaries, *Ind. J. pure Appl. Math.*, **18**, 1040.
- [5] Sharan, M., Aminataei, A. and Singh, M.P. (1987a), The process of gas exchange in the pulmonary circulation incorporating the contribution of axial diffusion, *Int. J. BioMedical Computing.*, **20**, 191.
- [6] Sharan, M., Singh, M.P. and Aminataei, A. (1987b), A numerical model for the blood oxygenation in the pulmonary capillaries-effect of pulmonary membrane resistance, *BioSystems.*, **20**, 355.
- [7] Sharan, M., Aminataei, A. and Singh, M.P. (1987c), A numerical study of non-steady transport of gases in the pulmonary capillaries, *J. Math. Biol.*, **25**, 433.
- [8] Aminataei, A., Sharan, M. and Singh, M.P. (1988), Two layer model for the process of blood oxygenation in the pulmonary capillaries-parabolic profiles in the core as well as in the plasma layer, *Appl. Math. Modelling.*, **12**, 601.
- [9] Sharan, M., Singh, M.P. and Aminataei, A. (1989), A mathematical model for the computation of the oxygen dissociation curve in human blood, *BioSystems*, **22**, 249.
- [10] Singh, M.P., Sharan, M. and Aminataei, A. (1989), Development of mathematical formulae for oxygen and carbon dioxide dissociation curve in the blood., *IMA J. Maths. Appl. in Medicine and Biology.*, **6**, 25.
- [11] Sharan, M., Singh, M.P. and Aminataei, A. (1990), A numerical model for studying the effect of plasma layer on the process of blood oxygenation in the pulmonary capillaries., *Transactions of the ASME J. of Biomech. Eng.*, **112**, 457.
- [12] Aminataei, A. (2005a), A mathematical model for oxygen dissociation curve in the blood, *Euro. J. Scien. Res.*, **6**(1), 5.
- [13] Aminataei, A. (2005b), Blood oxygenation in the pulmonary circulation: a review, *Euro. J. Scien. Res.*, **10**(2), 55.
- [14] Aminataei, A. (2002), Comparison of explicit and implicit approaches to numerical solution of uni-dimensional equation of diffusion, *J. of Sci., Al-Zahra Univ.*, **15**(2), 1.

- [15] Aminataei, A. (2008), A numerical simulation of the unsteady convective-diffusion equation, *The J. of Damghan Univ. of Basic Scis.*, **1**(2), 73.
- [16] Scherer, P.W., Shendalman, L.H., Greene, N.M. and Bouhuys, A. (1975), Measurement of axial diffusivities in a model of bronchial airways, *J. Appl. Physiol.*, **38**, 719.
- [17] Weibel, E. (1963), *Morphometry of The Human Lung*, New York: Springer Verlag.
- [18] Carslaw, H.S. and Jager, J.C. (1959), *Conduction of Heat in Solids.*, Oxford, Clarendon Press.
- [19] Crank, J. (197.), *The Mathematics of Diffusion.*, Oxford, Clarendon Press.
- [20] Gerald, C.F. and Wheatly, P.O. (1989), *Applied Numerical Analysis.*, 4<sup>th</sup> edn., Addison-Wesly Publishing Company., INC.

### پیوست ۱.

مدل هندسی مجراهای هوایی ریوی از دیدگاه وایبل [۱۷] توصیفی از اطلاعات آناتومی ریه توسط وایبل [۱۷] داده شده است. این روابط بر اساس  $l$  طول و  $S$  سطح مقطع مجراهای هوایی سطح  $z$  است.

برای  $z = 3$

$$\begin{aligned} l &= l_0 e^{az}, \\ S &= S_0 e^{az}, \end{aligned} \quad (31)$$

و برای  $z > 3$

$$\begin{aligned} l' &= l'_0 e^{dz}, \\ S' &= S'_0 e^{p+qz}, \end{aligned} \quad (32)$$

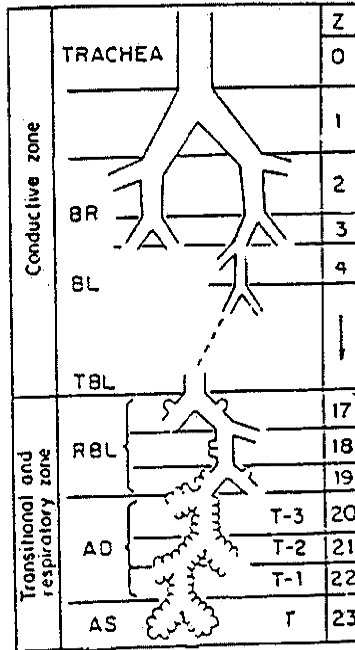
$$l_0 = 12 \text{ cm}, S_0 = 2/45 \text{ cm}^2, a = -0/92,$$

$$l'_0 = 2/5 \text{ cm}, S'_0 = 1/32, d = -0/17, p = 0/1074, q = 0/125.$$

اگر  $x$  فاصله از مبدا (سطح صفر) تا انتها (سطح ۲۳ شکل ۵) باشد، به ترتیب برای  $3 < z < 0$  و  $z < 23$  داریم:

$$x = l_0 \sum_{u=0}^z e^{au} = l_0 \frac{1 - e^{a(z+1)}}{1 - e^a}, \tag{۳۳}$$

$$x - ۱۹/۴۲ = l_0 \sum_{u=f}^z e^{du} = l_0 \frac{1 - e^{(z-f)d}}{1 - e^d} e^{fd}. \tag{۳۴}$$



شکل ۵: نمایش مدل تقسیمات متوالی مجراهای هوایی به شرح زیر:

BR=bronchus ; BL=bronchiole ; RBL=respiratory bronchiole ;  
 TBL=terminal bronchiole ; AD=alveolar duct ; AS=alveolar sac.

## **Simulation of the breathing gases in the airways**

Azim Amin Aminataei

Department of Mathematics, K.N. Toosi University of Technology, Tehran,  
Iran

### **Abstract**

In this study, we have simulated the breathing of gases in the human airways, and the simulated equation is solved in two different ways. It is observed that the numerical solution is more complicated in comparison with the analytic one.

**Keywords:** Analytic method; Numerical method; Concentration; Airway shape; Trachea.

**Mathematics Subject Classification (2000):** 92B05, 35K10