یک نگرش جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p-مقدار

محسن عارفی[۱]

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۶/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۹

چکیده: در این مقاله، یک شیوه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس رویکرد p-مقدار مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در این روش، ابتدا فرضیه‌های موردنظر بر اساس مجموعه‌های فازی معرفی می‌گردند، و آنگاه، p-مقدار بر اساس انتگرال‌گیری روی δ-برش‌های فرضیه صفر فازی محاسبه می‌گردد. با مقایسه p-مقدار ارائه شده با سطح معناداری آزمون، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی انجام می‌گیرد. در نهایت، با ارائه برخی مثال‌های عددی، روش موردنظر تشریح گردیده است.

واژه‌های کلیدی: آزمون فرضیه آماری، آماره آزمون، فرضیه فازی، p-مقدار.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۷۲ E۰۳، ۶۲F۰۳

۱- مقدمه

موضوع آزمون فرضیه‌های آماری، یک موضوع مهم در مبحث استنباط آماری محسوب می‌شود. رویکردهای کلاسیک، بر این اصل استوار است که پارامترهای موردنظر به‌صورت دقیق هستند. ولی در برخی موارد، با انواع مختلفی از عدم اطمینان، خصوصاً در مواردی با پارامترهای نادقیق، مواجه می‌شویم. در چنین مواقعی، رویکردهای معمولی قادر به آزمون چنین پارامترهایی نیستند و ما باید از روش‌های دیگری استفاده نماییم. یک روش مناسب، فرمول‌بندی پارامترهای نادقیق بر اساس نظریه مجموعه‌های فازی و استفاده از رویکردهای ارائه شده برای آزمون چنین پارامترهای است.

برای مثال، فرض کنید در خط تولید یک کارخانه، پیچ‌های با استاندارد قطر ۲ اینچ تولید شوند. یک نمونه تصادفی استخراج و می‌خواهیم آزمون نماییم که آیا پیچ‌ها از استاندارد موردنظر

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: Arefi@Birjand.ac.ir

پیروی می‌کنند یا خیر؟ در روش کلاسیک، می‌خواهیم فرضیه $H_0: \mu = 2$ را در برابر $H_1: \mu \neq 2$ آزمون نماییم. ولی در عمل، کلیه پیچ‌هایی که قطر آن‌ها بین ۱/۸ اینچ تا ۲/۲ اینچ است قابل استفاده و استاندارد می‌باشد. با این تفاوت که، هر چه قطر به ۲ اینچ نزدیک‌تر گردد، استانداردتر و هر چه به ۱/۸ و ۲/۲ نزدیک شوند، استاندارد آن کمتر است. بنابراین، صورت‌بندی آن با فرضیه‌های کلاسیک، جالب به نظر نمی‌رسد. ولی می‌توان آن را با یک فرضیه نادقیق به فرم " μ تقریباً ۲ اینچ است : H_0" در برابر" μ دور از ۲ اینچ است : H_1" صورت‌بندی و برای هر فرضیه یک مجموعه فازی در نظر گرفت (بخش ۲ را ببینید). بعد از صورت‌بندی یک فرضیه با مجموعه‌های فازی، می‌توان از روش‌های موجود برای آزمون فرضیه‌های فازی استفاده نمود.

در این راستا، در این مقاله، یک شیوه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس روش p-مقدار معرفی و تشریح گردیده است. در شیوه ارائه شده، p-مقدار مبتنی بر سطوح تراز فرض صفر فازی است و با مقایسه آن با سطح معناداری آزمون، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه موردنظر انجام می‌گیرد.

لازم به ذکر است که آزمون فرضیه‌های آماری در محیط نادقیق (فازی) توسط نویسندگان مختلفی مورد آزمون قرار گرفته است. در زیر به برخی کارهای انجام شده در این زمینه اشاره می‌گردد. آزمون فرضیه بر اساس داده‌های فازی توسط کاسالز و گیل [۱]، کاسالز و همکاران [۲]، گرزگورزویسکی [۳]، قهرمان و همکاران [۴]، وو [۵] و عارفی [۳۶] مورد تحقیق قرار گرفته است. آزمون فرضیه میانگین‌های دو جامعه بر اساس متغیرهای تصادفی فازی توسط مونته‌نگرو و همکاران [۶] مطالعه شده است. آرنولد [۷،۸]، طاهری و عارفی [۹] و طاهری و بهبودیان [۱۰،۱۱]، عارفی [۳۷] و عارفی و طاهری [۳۸] مسئله آزمون فرضیه‌های فازی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. عارفی و طاهری [۱۲،۱۳،۳۹]، گرزگورزویسکی [۱۴]، طاهری و بهبودیان [۱۵] و ترابی و همکاران [۱۶] موضوع آزمون فرضیه را زمانی که هم فرضیه‌ها موردنظر و هم داده‌ها فازی باشند، مورد بررسی و مطالعه قرار داده‌اند. رویکرد p-مقدار برای آزمون فرضیه‌های آماری در محیط فازی توسط فلزموزر و فیتل [۱۷] و پرچمی و همکاران [۱۸،۱۹] و پرچمی و ما شین‌چی [۴۰] مورد تحقیق قرار گرفته است. اکبری و رضایی [۲۰] و طاهری و حسامیان [۲۱،۲۲] و زینلی و همکاران [۴۱،۴۲] برخی آزمون‌های ناپارامتری در محیط فازی را تعمیم داده‌اند. برای بررسی برخی رویکردهای دیگر در محیط‌های نادقیق (فازی یا مبهم)، به عارفی و طاهری [۲۳]، باکلی [۲۴]، چاچی و همکاران [۲۵]، سعیدی و همکاران [۲۶]، ترابی [۲۷] و یوسفی و همکاران [۲۸] مراجعه نمایید. همچنین، برای بررسی برخی روش‌های آماری در محیط فازی به فیتل [۲۹]، طاهری [۳۰،۴۳] و طاهری و ما شین‌چی [۴۴] مراجعه نمایید.

بخش‌های مختلف مقاله به‌صــورت زیر مرتب شــده‌اند: در بخش ۲، برخی مفاهیم اولیه در مورد مجموعه‌های فازی و تعاریف فرضیه‌های فازی ارائه شده است. در بخش ۳، رویکرد اساسی مقاله که آزمون فرضــیه‌های فازی بر اســاس روش p-مقدار اســت، مورد بررســی و مطالعه قرار گرفته اســت. در بخش ۴ با ارائه برخی مثال‌های عددی، روش موردنظر تشــریح گردیده اســت. برخی نتایج روی روش بیان شده در بخش ۵ آورده شده است.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا برخی مفاهیم اولیه روی مجموعه‌های فازی بیان و در ادامه فرضیه‌های فازی معرفی می‌گردد (برای بررســـی بیشـــتر به کلایر و یوان [۳۱]، کراس و مایر [۳۲] و زاده [۳۳] مراجعه نمایید).

تعریف ۱: یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه مرجع X به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\},$$

که $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ درجه عضــویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ اســت. δ-برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{A}[\delta] = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \delta\}, \qquad 0 < \delta \leq 1.$$

تعریف ۲: در مسئله آزمون فرضیه، هر فرضیه به فرم "$H : \theta$ است $\tilde{H}(\theta)$ به‌صورت" را یک فرضــیه فازی گویند، که در آن $\tilde{H}(\theta) : \Theta \to [0,1]$ یک تابع عضــویت مناســب روی فضــای پارامتر $\theta \in \Theta$ است (مراجعه کنید به طاهری و بهبودیان [۱۰]).

تعریف ۳: فرضیه فازی $H : \theta \ is \ \tilde{H}(\theta)$ را تحت شرایط زیر یک فرضیه فازی یک‌طرفه گویند (مراجعه کنید به پرچمی و همکاران [۱۸]):

الف) تابع $\tilde{H}(\theta)$ یک تابع یکنوا برحسب θ باشد،

ب) مقدار $\theta_1 \in \Theta$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای $\theta \geq \theta_1$ (یا برای $\theta \leq \theta_1$) $\tilde{H}(\theta) = 1$،

ج) دامنه تغییرات $\tilde{H}(\theta)$ در بازه $[0,1]$ تغییر کند.

تعریف ۴: فرضیه فازی $H : \theta \ is \ \tilde{H}(\theta)$ را تحت شرایط زیر یک فرضیه فازی دوطرفه گویند (مراجعه کنید به پرچمی و همکاران [۱۸]):

الف) بازه $[\theta_1, \theta_2] \subset \Theta$ موجود باشد، به‌طوری‌که $\tilde{H}(\theta) = 1$ برای $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$،

ب) تابع $\tilde{H}(\theta)$ به ازای $\theta \le \theta_1$ یک تابع صعودی و به ازای $\theta \ge \theta_2$ یک تابع نزولی باشد،

ج) دامنه تغییرات $\tilde{H}(\theta)$ در بازه $[0,1]$ تغییر کند.

مثال ۱: (مراجعه کنید به عارفی و طاهری [۱۲] و پرچمی و همکاران [۱۸]) فرضیه فازی $H: \theta \ is \ \tilde{H}(\theta)$ را با تابع عضویت‌های زیر در نظر بگیرید:

الف) اگر $\tilde{H}_1 = (a_1, a_2, a_3)_T$ یک عدد مثلثی با تابع عضویت زیر باشد، آنگاه آن یک فرضیه فازی ساده است:

$$\tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le \theta < a_2, \\ \dfrac{a_3 - \theta}{a_3 - a_2} & a_2 \le \theta < a_3. \end{cases}$$

ب) اگر تابع عضویت فرضیه فازی عکس یک عدد مثلثی به‌صورت زیر باشد، آنگاه آن یک فرضیه فازی دوطرفه است:

$$\tilde{H}_2(\theta) = 1 - \tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < a_1, \\ \dfrac{a_2 - \theta}{a_2 - a_1} & a_1 \le \theta < a_2, \\ \dfrac{\theta - a_2}{a_3 - a_2} & a_2 \le \theta < a_3, \\ 1 & a_3 \le \theta. \end{cases}$$

ج) اگر $\tilde{H}(\theta)$ به صورت یکی از توابع عضویت زیر باشد، آنگاه آن یک فرضیه فازی یک‌طرفه است:

$$\tilde{H}_3(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le \theta < a_2, \\ 1 & a_2 \le \theta, \end{cases} \qquad \tilde{H}_4(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < a_2, \\ \dfrac{a_3 - \theta}{a_3 - a_2} & a_2 \le \theta < a_3. \end{cases}$$

تذکر ۱: توجه کنید که فرضیه‌های فازی محدود به توابع عضویت ارائه شده در مثال ۱ نمی‌باشد. هر فرضیه‌ای که در تعریف ۲ صدق نمایید، یک فرضیه فازی است.

تذکر ۲: قابل‌توجه است که اگر تابع عضویت در یک فرضیه فازی به‌صورت یکی از توابع زیر باشد، آنگاه به یک فرضیه معمولی تبدیل می‌شود:

$$\tilde{H}(\theta)=\begin{cases}1 & \theta\in\Theta_0,\\ 0 & \theta\in\Theta_1,\end{cases}\qquad \tilde{H}(\theta)=\begin{cases}1 & \theta\in\Theta_1,\\ 0 & \theta\in\Theta_0,\end{cases}$$

که در آن $\Theta_0,\Theta_1\subset\Theta$ و $\Theta_0\cap\Theta_1=\{\}$.

اکنون فرض کنید یک نمونه تصـــادفی $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_n)$ از جامعه‌ای با تابع چگالی (جرم) احتمال $f_\theta(x)$ اســتخراج و مقادیر $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ مشــاهده شــوند. در ادامه می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم:

$$\begin{cases}H_0:\theta\ is\ \tilde{H}_0(\theta),\\ H_1:\theta\ is\ \tilde{H}_1(\theta),\end{cases}$$

که $\tilde{H}_0(\theta)$ و $\tilde{H}_1(\theta)$ دو تابع عضویت مناسب روی فضای پارامتر هستند.

۳- آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p-مقدار

در این بخش، یک شـــیوه جدید برای آزمون فرضـــیه‌های فازی بر اســـاس روش p-مقدار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای انجام این هدف، ابتدا بر اســاس شــیوه‌های موجود یک آماره آزمون برای فرضـــیه‌های فازی ارائه می‌گردد، و در ادامه، p-مقدار برای آزمون چنین فرضـــیه‌هایی، بر اساس انتگرال‌گیری روی δ-برش فرضیه صفر فازی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد. در نهایت، با مقایسه p-مقدار با سطح معناداری آزمون، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی انجام می‌گیرد.

p-مقدار کمترین خطای نوع اول است که به ازای داده‌های مشاهده شده، منجر به رد فرضیه صــفر می‌گردد. به‌عبارتی‌دیگر، p-مقدار، یک آماره آزمون به‌صــورت $p(\boldsymbol{X})$ اســت که به ازای داده‌های مشاهده شده، مقادیر آن به صورت $0\le p(\boldsymbol{x})\le 1$ تغییر می‌کند. اگر مقادیر این آماره کوچک باشد، ما تصمیم به رد فرضیه صفر می‌گیریم. ما می‌توانیم با مقایسه p-مقدار با سطح معناداری آزمون، نســـبت به رد یا پذیرش فرضـــیه صـــفر تصـــمیم‌گیری نماییم. یعنی اگر $p(\boldsymbol{x})\le\alpha$ باشد، فرضیه صفر را رد می‌کنیم. خصوصیت استفاده از روش p-مقدار در این است که با ازای یک ســـطح معناداری مشـــخص، بدون اســـتفاده از جداول آماری (جداول مربوط به چندک‌های آماره آزمون)، تصمیم‌گیری در مورد فرضیه صفر انجام می‌گیرد. همچنین، در آزمون فرضیه‌هایی که توابع آزمون آن‌ها به‌صورت تصادفی شده هستند، تصمیم‌گیری قطعی با مشکل مواجه می‌شود، درصورتی‌که با استفاده از روش p-مقدار این مشکل مرتفع می‌گردد (به کسلا و برگر [۳۴] مراجعه نمایید). در ادامه، روش p-مقدار را به حالتی که فرضـــیه‌های مورد آزمون به‌صورت فازی صورت‌بندی شده باشند، مورد بسط قرار می‌دهیم.

تعریف ۵: فرض کنید $T(\boldsymbol{X})$، یک آماره آزمون برای آزمون فرضیه فازی $H_0: \theta\ is\ \tilde{H}_0(\theta)$ در مقابل فرضیه فازی دیگری بر اساس یک نمونه تصادفی $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)$ با مقادیر $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$ باشد که به ازای مقادیر بزرگی از آن بتوان فرضیه H_0 را رد نمود. آنگاه، p-مقدار به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$p(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(T(\boldsymbol{X}) \geq T(\boldsymbol{x}))d\delta,$$

که $\tilde{H}_0[\delta]$ برابر δ-برش فرضیه صفر فازی است.

تذکر ۳: توجه کنید برای آزمون فرضیه‌های معمولی در حالت کلاسیک، p-مقدار به‌صورت $p_{\theta \in \Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(\boldsymbol{X}) \geq T(\boldsymbol{x}))$ تعریف می‌شود (مراجعه کنید به کسلا و برگر [۳۴]، بخش ۸,۳,۴). بنابراین، p-مقدار ارائه شده در تعریف ۵ تعمیمی از روش p-مقدار معمولی تحت فرضیه‌های فازی است که با انتگرال‌گیری روی تمام δ-برش‌های فرضیه صفر فازی تعریف شده است. به عبارتی می‌توان آن را به‌صورت زیر نیز بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(T(\mathbf{X}) \geq T(\mathbf{x}))d\delta \\ &= \int_0^1 p_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]}(\mathbf{x})d\delta, \end{aligned}$$

که $p_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]}(\mathbf{x})$ برابر p-مقدار معمولی روی مقادیر پارامتری است که δ-برش فرضیه صفر فازی تغییر می‌کنند.

تذکر ۴: در روش‌های کلاسیک برای محاسبه یک آماره آزمون می‌توان از دو روش متداول استفاده نمود. روش اول مبتنی بر محاسبه آماره آزمون و مقایسه آن با چندک موردنظر (یا محاسبه تابع آزمون) است. روش دوم مبتنی بر محاسبه p-مقدار است. معمولاً نتیجه به دست آمده در دو روش برای رد یا پذیرش فرضیه صفر یکسان است. قابل‌توجه است که در محیط فازی، روش‌های متعددی برای آزمون فرضیه‌های فازی پیشنهاد شده است که شامل دو روش فوق نیز می‌گردد. نکته قابل‌توجه در این است که روشی که بتواند هم‌زمان هم آماره آزمون را و هم p-مقدار را محاسبه نماید و نتایج آن نیز باهم یکی باشد، ارائه نشده است. دلیل آن این است که ممکن است برخی آماره‌های آزمون و یا p-مقدارهای محاسبه شده به جواب‌های فازی منجر گردد که تصمیم‌گیری برای رد یا پذیرش فرضیه صفر را منعطف نماید (برای مثال به پرچمی و همکاران [۱۸] و باکلی [۲۴] مراجعه نمایید). به‌طور مسلم نمی‌توان اظهار داشت که نتایج مبتنی بر آماره‌های آزمون فازی و نتایج مبتنی بر p-مقدار فازی بر یکدیگر منطبق

هستند. در این راستا، دیدگاه مطرح شده در این مقاله، یک روش p-مقدار برای فرضیه‌های فازی تعریف می‌کند که می‌تواند نسبت به رد یا پذیرش فرضیه صفر تصمیم‌گیری نماید. قابل‌توجه است که ازآنجایی‌که در این روش از آماره آزمون‌های فازی موجود برای محاسبه p-مقدار استفاده شده است، نتایج آن با حالت معمولی تطابق بیشتری دارد.

تذکر ۵: با توجه به نکات بیان شده در تذکر ۴، برای محاسبه p-مقدار در تعریف ۵، نیاز به محا سبه یک آماره آزمون $T(\boldsymbol{X}) = T(X_1,...,X_n)$ (یا ناحیه بحرانی) برای فر ضیه‌های فازی وجود دارد. نویسندگان مختلفی برخی آماره‌های آزمون برای فرضیه‌های فازی ارائه نموده‌اند. برای مثال، در زیر به چهار دیدگاه در این زمینه اشاره شده است و بر اساس آماره آزمون آن‌ها، روش ارائه شده در این مقاله تشریح شده است.

تذکر ۶: فرض کنید در مسئله آزمون فرضیه، بجای فرضیه‌های فازی با فرضیه‌های معمولی $H_0 : \theta \in \Theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta \in \Theta_1$ مواجه گردیم. در این صورت، بر اساس تذکر ۲، می‌توانیم فرضیه‌ها را به‌صورت فازی با تابع عضویت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{H}_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_0, \\ 0 & \theta \in \Theta_1, \end{cases} \qquad \tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_1, \\ 0 & \theta \in \Theta_0, \end{cases}$$

در این صورت، p-مقدار $p(\boldsymbol{x})$ در تعریف ۵ به p-مقدار در حالت معمولی $p_{\theta \in \Theta_0}(\boldsymbol{x})$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(\boldsymbol{X}) \geq T(\boldsymbol{x}))\, d\delta \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(\boldsymbol{X}) \geq T(\boldsymbol{x})) \int_0^1 d\delta \\ &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T(\boldsymbol{X}) \geq T(\boldsymbol{x})) \\ &= p_{\theta \in \Theta_0}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

۳-۱- محاسبه p-مقدار برای آزمون فرضیه‌های یک‌طرفه و دوطرفه فازی

پرچمی و همکاران [۱۸] یک رویکرد برای آزمون فرضیه‌های فازی یک‌طرفه و دوطرفه بر اساس یک p-مقدار فازی ارائه کرده‌اند. بر اساس تعریف‌های ۳ و ۴ از فرضیه‌های فازی یک‌طرفه و دوطرفه، پرچمی و همکاران سه ناحیه بحرانی زیر را پیشنهاد کرده‌اند:

$$T_1 \leq t_l, \qquad T_2 \geq t_r, \qquad T_3 \notin (t_1, t_2).$$

بنابراین، p-مقدار بر اساس این آماره‌های آزمون به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$p(\boldsymbol{x})=\int_{\circ}^{\backslash}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\theta}(T_{1}(\boldsymbol{X})\le T_{1}(\boldsymbol{x}))d\delta,$$

$$p(\boldsymbol{x})=\int_{\circ}^{1}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\theta}(T_{2}(\boldsymbol{X})\ge T_{2}(\boldsymbol{x}))d\delta,$$

$$p(\boldsymbol{x})=2\min\left[\int_{\circ}^{1}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\theta}(T_{3}(\boldsymbol{X})\le T_{3}(\boldsymbol{x}))d\delta,\int_{\circ}^{1}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\theta}(T_{3}(\boldsymbol{X})\ge T_{3}(\boldsymbol{x}))d\delta\right].$$

۳-۲- محاسبه p-مقدار بر اساس آماره آزمون طاهری و بهبودیان

طاهری و بهبودیان [۱۰]، یک نگرش برای آزمون فر ضیه‌های فازی بر ا ساس لم نیمن-پیر سن تعمیم یافته را مورد بررســـی و مطالعه قرار داده‌اند. در این نگرش، آماره آزمون به‌صـــورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\lambda'(\boldsymbol{X})=\frac{\int_{\circ}^{1}f_{\theta}(\boldsymbol{X})\tilde{H}_{1}(\theta)d\theta}{\int_{\circ}^{1}f_{\theta}(\boldsymbol{X})\tilde{H}_{\circ}(\theta)d\theta}.$$

همچنین، تابع آزمون به‌صورت زیر است:

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1 & \lambda'(\boldsymbol{X})>c,\\ \gamma & \lambda'(\boldsymbol{X})=c,\\ \circ & \lambda'(\boldsymbol{X})<c.\end{cases}$$

بر اســاس تابع آزمون فوق، به ازای مقادیر بزرگی از $\lambda'(\boldsymbol{X})$، فرضــیه صــفر فازی رد می‌شــود. بنابراین، p-مقدار بر اساس این آماره آزمون به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\int_{\circ}^{1}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\theta}(\lambda'(\boldsymbol{X})\ge\lambda'(\boldsymbol{x}))d\delta\\&=\int_{\circ}^{1}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\theta}\left(\frac{\int_{\circ}^{1}f_{\theta}(\boldsymbol{X})\tilde{H}_{1}(\theta)d\theta}{\int_{\circ}^{1}f_{\theta}(\boldsymbol{X})\tilde{H}_{\circ}(\theta)d\theta}\ge\frac{\int_{\circ}^{1}f_{\theta}(\boldsymbol{x})\tilde{H}_{1}(\theta)d\theta}{\int_{\circ}^{1}f_{\theta}(\boldsymbol{x})\tilde{H}_{\circ}(\theta)d\theta}\right)d\delta.\end{aligned}$$

۳-۳- محاسبه p-مقدار بر اساس آماره آزمون ترابی و بهبودیان

ترابی و بهبودیان [۳۵]، یک نگرش برای آزمون فر ضیه‌های فازی بر ا ساس آماره آزمون ن سبت درستنمایی را مورد تحقیق قرار داده‌اند. در این نگرش، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\begin{cases}\dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta}\tilde{H}_{۰}(\theta)L(\theta;\boldsymbol{X})}{\sup\limits_{\theta\in\Theta}L(\theta;\boldsymbol{X})} & \text{if } \tilde{H}_{۱}(\theta)=۱-\tilde{H}_{۰}(\theta),\\[2ex] \dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta}\tilde{H}_{۰}(\theta)L(\theta;\boldsymbol{X})}{\max\{\sup\limits_{\theta\in\Theta}\tilde{H}_{۰}(\theta)L(\theta;\boldsymbol{X}),\sup\limits_{\theta\in\Theta}\tilde{H}_{۱}(\theta)L(\theta;\boldsymbol{X})\}} & \text{if } \tilde{H}_{۱}(\theta)\neq ۱-\tilde{H}_{۰}(\theta).\end{cases}$$

همچنین، تابع آزمون به‌صورت زیر است:

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}۱ & \lambda(\boldsymbol{X})<c,\\ \gamma & \lambda(\boldsymbol{X})=c,\\ ۰ & \lambda(\boldsymbol{X})>c.\end{cases}$$

بنابراین، به ازای مقادیر بزرگی از $-\lambda(\boldsymbol{X})$، فر ضیه صفر فازی رد می شود. در نتیجه، p-مقدار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\int_{۰}^{۱}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{۰}[\delta]}P_{\theta}(-\lambda(\boldsymbol{X})\geq-\lambda(\boldsymbol{x}))d\,\delta\\ &=\int_{۰}^{۱}\sup_{\theta\in\tilde{H}_{۰}[\delta]}P_{\theta}(\lambda(\boldsymbol{X})\leq\lambda(\boldsymbol{x}))d\,\delta.\end{aligned}$$

۴-۳- محاسبه p-مقدار بر اساس آماره آزمون یوسفی و همکاران

یوسفی و همکاران [۲۸]، مسئله آزمون فرضیه‌های فازی را بر اساس آماره آزمون نسبت در ستنمایی مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این نگرش، آماره آزمون ن سبت در ستنمایی به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\int_{۰}^{۱}f_{X}(\delta)d\,\delta,$$

که $f_{X}(\delta)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f_X(\delta)=\begin{cases}\dfrac{\sup_{\theta\in\tilde{H}_0[\delta]} L(\theta;\boldsymbol{X})}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta;\boldsymbol{X})} & \text{if } \tilde{H}_1(\theta)=1-\tilde{H}_0(\theta),\\[2ex] \dfrac{\sup_{\theta\in\tilde{H}_0[\delta]} L(\theta;\boldsymbol{X})}{\max\{\sup_{\theta\in\tilde{H}_0[\delta]} L(\theta;\boldsymbol{X}),\ \sup_{\theta\in\tilde{H}_1[\delta]} L(\theta;\boldsymbol{X})\}} & \text{if } \tilde{H}_1(\theta)\neq 1-\tilde{H}_0(\theta),\end{cases}$$

که در آن $L(\theta;\boldsymbol{X})=f_\theta(\boldsymbol{X})$ تابع درستنمایی است. همچنین، بر اساس این آماره آزمون، تابع آزمون به‌صورت زیر است:

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1 & \lambda(\boldsymbol{X})<c,\\ \gamma & \lambda(\boldsymbol{X})=c,\\ 0 & \lambda(\boldsymbol{X})>c,\end{cases}$$

بر اساس تابع آزمون فوق، p-مقدار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\int_0^1 \sup_{\theta\in\tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(-\lambda(\boldsymbol{X})\geq-\lambda(\boldsymbol{x}))d\delta\\ &=\int_0^1 \sup_{\theta\in\tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(\lambda(\boldsymbol{X})\leq\lambda(\boldsymbol{x}))d\delta.\end{aligned}$$

۴- مثال‌های عددی

در این بخش، برخی مثال‌های عددی برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p-مقدار معرفی شده، ارائه خواهد شد.

۴-۱- آزمون فرضیه‌های فازی برای میانگین یک جامعه با واریانس معلوم

۴-۱-۱- فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه مرکب فازی

فرض کنید یک نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ با σ^2 معلوم استخراج کرده‌ایم و بخواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم (ببینید همچنین یوسفی و همکاران [۲۸] و ترابی و بهبودیان [۳۵]):

$$\begin{cases}H_0:\mu\simeq\mu_0\\ H_1:\mu\neq\mu_0\end{cases}\equiv\begin{cases}H_0:\mu\ is\ \tilde{H}_0(\mu),\\ H_1:\mu\ is\ \tilde{H}_1(\mu),\end{cases}$$

که در آن داریم:

$$\tilde{H}_{\circ}(\mu)=e^{-a(\mu-\mu_{\circ})^{۲}},\qquad \tilde{H}_{۱}(\mu)=۱-\tilde{H}_{\circ}(\mu),\qquad a>\circ.$$

اکنون براساس آماره‌های آزمون معرفی شده در بخش قبل، p-مقدار به‌صورت زیر به دست می آید:

الف) بر اساس دیدگاه طاهری و بهبودیان، آماره آزمون به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\lambda'(\boldsymbol{X})&=\frac{\int_{\circ}^{۱}\tilde{H}_{۱}(\mu)f_{\mu}(\boldsymbol{X})d\mu}{\int_{\circ}^{۱}\tilde{H}_{\circ}(\mu)f_{\mu}(\boldsymbol{X})d\mu}\\&=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(۱-e^{-a(\mu-\mu_{\circ})^{۲}})e^{-\frac{n}{۲}(\bar{X}-\mu)^{۲}}d\mu}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(\mu-\mu_{\circ})^{۲}}e^{-\frac{n}{۲}(\bar{X}-\mu)^{۲}}d\mu}\\&=\sqrt{۱+\frac{۲a}{n}}e^{\frac{na(\bar{X}-\mu_{\circ})^{۲}}{n+۲a}}-۱\end{aligned}$$

بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p-مقدار به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\int_{\circ}^{۱}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\mu}(\lambda'(\boldsymbol{X})\geq\lambda'(\boldsymbol{x}))d\delta\\&=\int_{\circ}^{۱}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\mu}\left(\sqrt{۱+\frac{۲a}{n}}e^{\frac{na(\bar{X}-\mu_{\circ})^{۲}}{n+۲a}}-۱\geq\sqrt{۱+\frac{۲a}{n}}e^{\frac{na(\bar{x}-\mu_{\circ})^{۲}}{n+۲a}}-۱\right)d\delta\\&=\int_{\circ}^{۱}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\mu}(|\bar{X}-\mu_{\circ}|\geq|\bar{x}-\mu_{\circ}|)d\delta\\&=\int_{\circ}^{۱}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}\left[۱-P_{\mu}\left(\frac{\mu_{\circ}-\mu-|\bar{x}-\mu_{\circ}|}{\sigma/\sqrt{n}}\leq Z\leq\frac{\mu_{\circ}-\mu+|\bar{x}-\mu_{\circ}|}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]d\delta\\&=\int_{\circ}^{۱}\left[۱-P_{H_{\delta}^{L}}\left(\frac{\mu_{\circ}-\mu-|\bar{x}-\mu_{\circ}|}{\sigma/\sqrt{n}}\leq Z\leq\frac{\mu_{\circ}-\mu+|\bar{x}-\mu_{\circ}|}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]d\delta\\&=\int_{\circ}^{۱}\left[۱-P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}-|\bar{x}-\mu_{\circ}|)\leq Z\leq\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}+|\bar{x}-\mu_{\circ}|)\right)\right]d\delta,\end{aligned}\qquad (۱)$$

که $\tilde{H}_{\circ}[\delta]=[H_{\delta}^{L},H_{\delta}^{U}]=[\mu_{\circ}-\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}},\mu_{\circ}+\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}]$.

ب) بر اساس دیدگاه ترابی و بهبودیان، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت زیر است:

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\exp\left\{\frac{(n\bar{X}+2a\mu_{\circ}\sigma^{2})^{2}}{(2\sigma^{2})(n+2a\sigma^{2})}-\frac{(n\bar{X}^{2}+2a\mu_{\circ}^{2}\sigma^{2})}{(2\sigma^{2})}\right\}.$$

بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p-مقدار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{x})&=\int_{\circ}^{1}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\mu}(\lambda(\boldsymbol{X})\leq\lambda(\boldsymbol{x}))d\delta\\&=\int_{\circ}^{1}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\mu}\left(\frac{(n\bar{X}+2a\mu_{\circ}\sigma^{2})^{2}}{(2\sigma^{2})(n+2a\sigma^{2})}\geq\frac{(n\bar{x}+2a\mu_{\circ}\sigma^{2})^{2}}{(2\sigma^{2})(n+2a\sigma^{2})}\right)d\delta\\&=\int_{\circ}^{1}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{\circ}[\delta]}P_{\mu}(|\bar{X}-\mu_{\circ}|\geq|\bar{x}-\mu_{\circ}|)d\delta,\end{aligned}$$

که مشابه حالت الف می‌باشد.

ج) بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت زیر است:

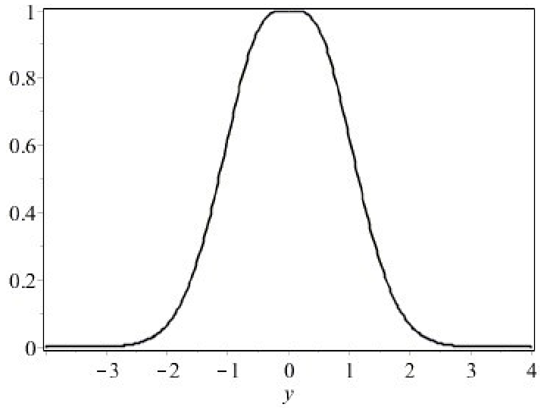
$$\lambda(\boldsymbol{X})=\lambda_{1}(\boldsymbol{X})I(\bar{X}\leq\mu_{\circ})+\lambda_{2}(\boldsymbol{X})I(\bar{X}>\mu_{\circ}),$$

که $I(.)$ تابع نشانگر و $\lambda_{1}(\boldsymbol{X})$ و $\lambda_{2}(\boldsymbol{X})$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\lambda_{1}(\boldsymbol{X})=e^{-a(\bar{X}-\mu_{\circ})^{2}}+\int_{e^{-a(\bar{X}-\mu_{\circ})^{2}}}^{1}e^{\frac{-n}{2\sigma^{2}}(\bar{X}-\mu_{\circ}+\sqrt{\frac{\ln\delta}{-a}})^{2}}d\delta,$$

$$\lambda_{2}(\boldsymbol{X})=e^{-a(\bar{X}-\mu_{\circ})^{2}}+\int_{e^{-a(\bar{X}-\mu_{\circ})^{2}}}^{1}e^{\frac{-n}{2\sigma^{2}}(\bar{X}-\mu_{\circ}-\sqrt{\frac{\ln\delta}{-a}})^{2}}d\delta.$$

ازآنجایی‌که $\lambda(\boldsymbol{X})$ یک تابع مقعر متقارن حول $\mu_{\circ}$ است، مقدار p-مقدار مشابه فرمول (۱) محاسبه می‌گردد (شکل ۱ را برای $y=\bar{x}-\mu_{\circ}$، $n=16$، $a=1$ و $\sigma=1$ ببینید).



شکل (۱): آماره آزمون نسبت درستنمایی بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران

مثال ۲: فرض کنید یک نمونه تصـادفی به حجم $n=۱۶$ از یک جامعه نرمال $N(\mu,\sigma^{۲}=۱)$ اســتخراج کرده‌ایم. می‌خواهیم فرضــیه‌های فازی زیر را در ســطح معناداری $\alpha=۰/۱۰$ آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_{۰}: \mu \simeq ۰, \\ H_{۱}: \mu \neq ۰, \end{cases}$$

که در آن $\tilde{H}_{۰}(\mu)=e^{-a\mu^{۲}}$ و $\tilde{H}_{۱}(\mu)=۱-e^{-a\mu^{۲}}$. بر اســـاس فرمول (۱)، p-مقدار به ازای مقادیر مختلف $\bar{x}$ و a و نتیجه آزمون در جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول (۱): p-مقدار و نتیجه آزمون در مثال ۲

	$\bar{x}$	$\pm ۰/۵$	± ۱	$\pm ۱/۵$	± ۲	$\pm ۲/۵$	± ۳
$a=۰/۵$	p-مقدار	۰/۰۱۴۰	۰/۰۵۱۲	۰/۱۴۷۷	۰/۳۳۶۵	۰/۶۰۶۰	۰/۸۶۲۸
	نتیجه	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$AH_{۰}$	$AH_{۰}$	$AH_{۰}$	$AH_{۰}$
$a=۱$	p-مقدار	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۳۶	۰/۰۲۶۹	۰/۱۲۷۶	۰/۳۸۷۶	۰/۷۵۵۶
	نتیجه	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$AH_{۰}$	$AH_{۰}$	$AH_{۰}$
$a=۱/۵$	p-مقدار	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۵۹	۰/۰۵۳۵	۰/۲۵۹۵	۰/۶۷۰۲
	نتیجه	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$AH_{۰}$	$AH_{۰}$
$a=۱۰۰$	p-مقدار	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۶۳۲
	نتیجه	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$
$a=۱۰۰۰$	p-مقدار	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۴۷۲
	نتیجه	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$	$RH_{۰}$

۴-۱-۲: فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه ساده فازی

مثال ۴٫۱ در مقاله ترابی و بهبودیان [۱۰] را ملاحظه نمایید. می‌خواهیم این مثال را بر اساس رویکرد p-مقدار ارائه شده در این مقاله مورد برر سی قرار دهیم. در این مثال فرض می شود که یک نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ (با σ^2 معلوم) استخراج شده و می‌خواهیم فرضیه‌های ساده فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم

$$\begin{cases} H_0 : \mu \simeq \mu_0 \\ H_1 : \mu \simeq \mu_1 \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \mu \ is\ \tilde{H}_0(\mu), \\ H_1 : \mu \ is\ \tilde{H}_1(\mu), \end{cases}$$

که در آن داریم:

$$\tilde{H}_0(\mu) = e^{-a\mu^2}, \qquad \tilde{H}_1(\mu) = e^{-a(\mu-2)^2}, \qquad a > 0.$$

بر اساس این دیدگاه، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت زیر است:

$$\lambda(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1 & L_0(\boldsymbol{X}) \ge L_1(\boldsymbol{X}) \\ \\ \dfrac{L_0(\boldsymbol{X})}{L_1(\boldsymbol{X})} & L_0(\boldsymbol{X}) < L_1(\boldsymbol{X}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & L_0(\boldsymbol{X}) \ge L_1(\boldsymbol{X}), \\ m\bar{X}(\mu_0 - \mu_1) & L_0(\boldsymbol{X}) < L_1(\boldsymbol{X}), \end{cases}$$

که $L_0(\boldsymbol{X}) = \sup_{\mu \in R} H_0(\mu) L(\mu;\boldsymbol{X})$، $L_1(\boldsymbol{X}) = \sup_{\mu \in R} H_1(\mu) L(\mu;\boldsymbol{X})$ و $m > 0$ یک مقدار مثبت ثابت است. ناحیه بحرانی بر اساس این آماره آزمون، به ازای $\mu_1 > \mu_0$ به‌صورت $CR = \{\boldsymbol{X} \mid \bar{X} > k\}$ و به ازای $\mu_1 < \mu_0$ به صورت $CR = \{\boldsymbol{X} \mid \bar{X} < k'\}$ ا ست. بنابراین p-مقدار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$p(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\mu(\lambda(\boldsymbol{X}) \le \lambda(\boldsymbol{x})) d\delta$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\mu\left(\bar{X} > \bar{x}\right) d\delta & if \ \ \mu_1 > \mu_0 \\ \displaystyle\int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\mu\left(\bar{X} < \bar{x}\right) d\delta & if \ \ \mu_1 < \mu_0 \end{cases} \tag{2}$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 P_{\mu = H_\delta^U}(\bar{X} > \bar{x}) d\delta & if \ \ \mu_1 > \mu_0 \\ \displaystyle\int_0^1 P_{\mu = H_\delta^L}(\bar{X} < \bar{x}) d\delta & if \ \ \mu_1 < \mu_0 \end{cases}$$

که $\tilde{H}_{\circ}[\delta]=[H_{\delta}^{L},H_{\delta}^{U}]=\left[\mu_{\circ}-\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}},\mu_{\circ}+\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}\right]$.

مثال ۳: فرض کنید بر اســـاس حجم نمونه‌های تصـــادفی $n=۱۶$، $n=۲۵$ و $n=۳۶$ از یک جامعه نرمال $N(\mu,\sigma^{۲}=۱۶)$ بخواهیم فر ضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری $\alpha=۰/۱۰$ آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_{\circ}:\mu\simeq ۰, \\ H_{۱}:\mu\simeq ۲, \end{cases}$$

که در آن $\tilde{H}_{\circ}(\mu)=e^{-۲\mu^{۲}}$ و $\tilde{H}_{۱}(\mu)=e^{-۲(\mu-۲)^{۲}}$. بر اســـاس فرمول (۲)، p-مقدار به ازای حجم نمونه‌های و مقادیر مختلف $\bar{x}$ محاسبه و نتایج در جدول ۲ خلاصه شده است.

جدول (۲): p-مقدار برای فرضیه‌های ساده فازی و نتیجه آزمون در مثال ۳

	$\bar{x}$	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$n=۱۶$	p-مقدار	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۴۰	۰/۹۳۹۵	۰/۷۲۳۶	۰/۳۶۰۳	۰/۰۹۶۳	۰/۰۱۲۵
	نتیجه	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$RH_{\circ}$	$RH_{\circ}$
$n=۲۵$	p-مقدار	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۰	۰/۹۷۱۱	۰/۷۶۵۰	۰/۳۳۱۱	۰/۰۵۷۰	۰/۰۰۳۴
	نتیجه	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$RH_{\circ}$	$RH_{\circ}$
$n=۳۶$	p-مقدار	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۸	۰/۹۸۶۹	۰/۸۰۰۰	۰/۳۰۵۱	۰/۰۳۳۸	۰/۰۰۰۹
	نتیجه	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$AH_{\circ}$	$RH_{\circ}$	$RH_{\circ}$

تذکر: لازم به ذکر اســت که بر اســاس دیدگاه یوسـفی و همکاران [۲۸] نیز ناحیه بحرانی برای فر ضیه‌های ساده فازی، مشابه حالت قبل است (هر چند آماره آزمون متفاوت است) و بنابراین p-مقدار مشابه فرمول (۲) به دست می‌آید.

مثال ۴: فرض کنید X یک متغیر تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی زیر باشد (به یوسفی و همکاران [۲۸] و ترابی و بهبودیان [۳۵] مراجعه نمایید):

$$f_{\theta}(x)=۲\theta x+۲(۱-\theta)(۱-x),\qquad ۰<x<۱,\qquad ۰<\theta<۱.$$

اکنون می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_{\circ}:\theta\simeq ۱, \\ H_{۱}:\theta\not\simeq ۱, \end{cases} \equiv \begin{cases} H_{\circ}:\theta\ is\ \tilde{H}_{\circ}(\theta), \\ H_{۱}:\theta\ is\ \tilde{H}_{۱}(\theta), \end{cases}$$

که $\tilde{H}_{\circ}(\theta)=\theta$ و $\tilde{H}_{۱}(\theta)=۱-\tilde{H}_{\circ}(\theta)$ به ازای هر $۰<\theta<۱$.

الف) بر اساس رویکرد طاهری و بهبودیان، آماره آزمون به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda'(X)=\frac{۲-X}{X+۱}.$$

ب) بر اساس رویکرد ترابی و بهبودیان، آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت زیر داده شده است:

$$\lambda(X)=\begin{cases}\dfrac{X-۱}{۴(۲X-۱)} & ۰<X\le\frac{۱}{۳},\\ \dfrac{X}{(۱-X)} & \frac{۱}{۳}<X\le\frac{۱}{۲},\\ ۱ & \frac{۱}{۲}<X\le ۱.\end{cases}$$

ج) بر اساس رویکرد یوسفی و همکاران، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت زیر داده شده است:

$$\lambda(X)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲(۱-X)} & ۰<X\le\frac{۱}{۲},\\ ۱ & \frac{۱}{۲}<X\le ۱.\end{cases}$$

بر اساس سه دیدگاه فوق، ناحیه بحرانی به‌صورت $CR=\{X \mid X<k\}$ است، بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p-مقدار به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}p(\underline{x})&=\int_{۰}^{۱}\sup_{\mu\in\tilde{H}_{۰}[\delta]}P_{\mu}(X<x)d\delta\\&=\int_{۰}^{۱}\sup_{\delta\le\theta<۱}\left[۲\theta x(x-۱)+x(۲-x)\right]d\delta\\&=\int_{۰}^{۱}\left[۲\delta x(x-۱)+x(۲-x)\right]d\delta\\&=x(x-۱)+x(۲-x)\\&=x.\end{aligned}$$

بنابراین، به ازای مقادیر مشاهده $x\in[۰,\alpha]$ فرضیه صفر فازی رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

مثال ۵: مفروضات مثال ۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم فرضیه‌های ساده فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_۰ : \theta \simeq \frac{۱}{۳}, \\ H_۱ : \theta \simeq \frac{۱}{۲}, \end{cases} \equiv \begin{cases} H_۰ : \theta \, is \, \tilde{H}_۰(\theta), \\ H_۱ : \theta \, is \, \tilde{H}_۱(\theta), \end{cases}$$

که در آن داریم:

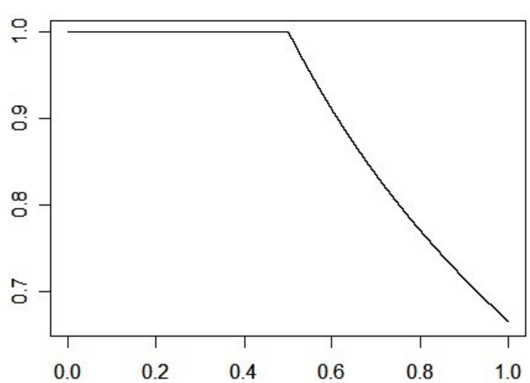
$$\tilde{H}_۰(\theta) = \begin{cases} ۳\theta & ۰ \le \theta < \frac{۱}{۳}, \\ ۲-۳\theta & \frac{۱}{۳} \le \theta < \frac{۲}{۳}, \end{cases} \qquad \tilde{H}_۱(\theta) = \begin{cases} ۲\theta & ۰ \le \theta < \frac{۱}{۲}, \\ ۲-۲\theta & \frac{۱}{۲} \le \theta < ۱. \end{cases}$$

الف) بر اساس رویکرد طاهری و بهبودیان، آماره آزمون به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda'(X) = \frac{۹}{۴(۲-X)}.$$

ب) بر اساس رویکرد یوسفی و همکاران، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت زیر داده شده است (شکل ۲):

$$\lambda(X) = \begin{cases} ۱ & ۰ < X \le \frac{۱}{۲}, \\ \frac{۲}{۳}\left[۱ - \frac{۱-X}{۱-۲X} \ln(۲X) \right] & \frac{۱}{۲} < X \le ۱. \end{cases}$$



شکل (۲): آماره آزمون نسبت درستنمایی بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران در مثال ۲

بنابراین، ناحیه بحرانی بر اساس آماره‌های آزمون فوق، به‌صورت $CR=\{X \mid X \geq k\}$ است، بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p-مقدار به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{۰}^{۱} \sup_{\mu \in \tilde{H}_{۰}[\delta]} P_{\mu}(X \geq x)\, d\delta \\ &= \int_{۰}^{۱} \sup_{\delta \leq \theta < ۱} \left[(x-۱)^{۲} - ۲\theta x\,(x-۱) \right] d\delta \\ &= \int_{۰}^{۱} \left[(x-۱)^{۲} - ۲x\,(x-۱) \right] d\delta \\ &= (x-۱)^{۲} - ۲x\,(x-۱) \\ &= ۱ - x^{۲}. \end{aligned}$$

بنابراین، به ازای مقادیر مشاهده $x \in [\sqrt{۱-\alpha}, ۱]$ فرضیه صفر فازی رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک دیدگاه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p-مقدار معرفی گردید. این شیوه، مبتنی بر سطوح تراز فرضیه فازی صفر استوار است. خصوصیت این روش نسبت به بقیه روش‌های ارائه شده بر اساس p-مقدار در این است که اولاً برای هر نوع فرضیه فازی کاربرد دارد و معطوف به حالت خاصی از فرضیه‌های فازی نیست و ثانیاً بر اساس مقدار محاسبه شده، می‌توانیم به‌طور قطعی در مورد رد یا پذیرش فرضیه‌های فازی تصمیم‌گیری نمود. بسط و توسعه روش ارائه شده برای آزمون فرضیه‌های آماری در حالتی که داده‌ها مورد دسترس نادقیق (فازی) باشند، در آینده تحقیق مورد بررسی و مطالعه قرار خواهد گرفت.

منابع

[1] Casals, M.R. and Gil, M.A. (1989). A note on the operativeness of Neyman-Pearson tests with fuzzy information, *Fuzzy Sets and Systems,* **30**, 215-220.

[2] Casals, M.R., Gil, M.A., and Gil, P. (1986). The fuzzy decision problem: an approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information, *European Journal of Operation Research,* **27**, 371-382.

[3] Grzegorzewski, P. (2000). Testing statistical hypotheses with vague data, *Fuzzy Sets and Systems,* **112**, 501-510.

[4] Kahraman, C., Bozdag, C.E., Ruan, D., and Ozok, A.F. (2004). Fuzzy sets approaches to statistical parametric and nonparametric tests, *International Journal of Intelligent Systems,* **19**, 1-19.

[5] Wu, H.Ch. (2005). Statistical hypotheses testing for fuzzy data, *Information Sciences,* **175**, 30-56.

[6] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A., and Gil, M.A. (2001). Two sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable, *Information Sciences,* **133**, 89-100.

[7] Arnold, B.F. (1996). An approach to fuzzy hypothesis testing, *Metrika,* **44**, 119-126.

[8] Arnold, B.F. (1998). Testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Fuzzy Sets and Systems,* **94**, 323-333.

[9] Taheri, S.M. and Arefi, M. (2009). Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic, *Soft Computing,* **13**, 617-625.

[10] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (1999). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypothesis testing, *Metrika,* **49**, 3-17.

[11] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (2001). A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing, *Fuzzy Sets and Systems,* **123**, 39-48.

[12] Arefi, M. and Taheri, S.M. (2011). Testing fuzzy hypotheses using fuzzy data based on fuzzy test statistic, *Journal of Uncertain Systems,* **5**(1), 45-61.

[13] Arefi, M. and Taheri, S.M. (2013). A new approach for testing fuzzy hypotheses based on fuzzy data, *International Journal of Computational Intelligence Systems,* **6**(2), 318-327.

[14] Grzegorzewski, P. (2002). Testing fuzzy hypotheses with vague data, In: *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data,* C. Bertoluzza et al. (Eds.), Springer, Heidelberg, pp. 213-225.

[15] Taheri, S.M. and Behboodian, J. (2006). On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,* 19, 139-154.

[16] Torabi, H., Behboodian. J., and Taheri, S.M. (2006). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data, *Metrika,* **64**, 289-304.

[17] Filzmoser, P. and Viertl, R. (2004). Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy p-value, *Metrika,* **59**, 21-29.

[18] Parchami, A., Taheri, S.M., and Mashinchi, M. (2010). Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Statistical Papers,* **51**, 209-226.

[19] Parchami, A., Taheri, S.M., and Mashinchi, M. (2012). Testing fuzzy hypotheses based on vague observations: a p-value approach, *Statistical Papers,* **53**(2), 469-484.

[20] Akbari, M.Gh. and Rezaei, A. (2010). Bootstrap testing fuzzy hypotheses and observations on fuzzy statistic, *Expert Systems with Applications,* **37**, 5782-5787.

[21] Taheri, S.M. and Hesamian, G. (2013). A generalization of the Wilcoxon signed-rank test and its applications, *Statistical Papers,* **54**(2), 457-470.

[22] Taheri, S.M. and Hesamian, G. (2011). Goodman-Kruskal measure of association for fuzzy-categorized variables, *Kybernetika,* **47**(1), 110-122.

[23] Arefi, M. and Taheri, S.M. (2011). A fuzzy-based approach to testing statistical hypotheses, *International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics,* **4**(1), 109-132.

[24] Buckley, J.J. (2005). Fuzzy statistics: hypothesis testing, *Soft Computing,* **9**, 512-518.

[25] Chachi, J., Taheri, S.M., and Viertl, R. (2012). Testing statistical hypotheses based on fuzzy confidence intervals, *Austrian Journal of Statistics*, **41**(4), 267-286.

[26] Saeidi, A.R., Akbari, M.Gh., and Doostparast, M. (2014). Hypotheses testing with the two-parameter pareto distribution on the basis of records in fuzzy environment, *Kybernetika,* **50**(5), 744-757.

[27] Torabi, H. (2012). A generalized version of Neyman-Pearson Lemma for testing fuzzy hypotheses based on r-level sets, *Communications in Statistics: Theory and Methods,* **41**(24), 4379-4390.

[28] Yosefi, Sh., Arefi, M., and Akbari, M.Gh. (2016). A new approach for testing fuzzy hypotheses based on likelihood ratio statistic, *Statistical Papers,* **57**, 665-688.

[29] Viertl, R. (2011). *Statistical Methods for Fuzzy Data.* J. Wiley, Chichester.

[30] Taheri, S.M. (2003). Trends in fuzzy statistics, *Austrian Journal of Statistics,* **32**, 239-257.

[31] Klir, G.J. and Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications,* Prentic-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[32] Kruse, R. and Meyer, K.D. (1987). *Statistics with Vague Data,* D. Reidel Publishing Company, Dortrecht, Boston.

[33] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control,* 8, 338-353.

[34] Casella, G. and Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference* (Second Edition), Duxbury, Thomson Learning, Pacific Grove, CA.

[35] Torabi, H. and Behboodian, J. (2007). Likelihood ratio tests for fuzzy hypotheses testing, *Statistical Papers,* **48**, 509-522.

[۳۶] عارفی، محسن (۱۳۹۲). آزمون فرضیه‌های آماری بر اساس یک متر علامت‌دار جدید و تحت داده‌های فازی. *گزارش سیزدهمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران*، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، ص. ۱-۵.

[۳۷] عارفی، محسن (۱۳۹۰). روشی جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی. *سری سیستم‌های فازی محاسبات نرم*، جلد ۲ (مباحثی در آمار و احتمال فازی)، ص. ۱۵۳-۱۶۹.

[۳۸] عارفی، محسن؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۶). آزمون فرض فازی بر پایه آماره آزمون فازی. *گزارش هفتمین کنفرانس سیستمهای فازی و هوشمند*، دانشگاه فردوسی مشهد، ص. ۵۷۵-۵۷۹.

[۳۹] عارفی، محسن؛ طاهری، سید محمود (۱۳۸۹). آماره آزمون فازی بر پایه فرضیه‌ها و داده‌های فازی. *گزارش دهمین کنفرانس آمار ایران*، دانشگاه تبریز، ص. ۲۶۴-۲۷۵.

[۴۰] پرچمی، عباس؛ ماشین‌چی، ماشاالله (۱۳۹۰). آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایه p-مقدار. *سری سیستم‌های فازی محاسبات نرم*، جلد ۲ (مباحثی در آمار و احتمال فازی)، ص. ۱۱-۱۸.

[۴۱] زینلی، زهرا؛ اکبری، محمد قاسم؛ عارفی، محسن (۱۳۹۱). آزمون فرضیه بر اساس داده‌های فازی شهودی و به روش بوت‌استرپ. *گزارش یازدهمین کنفرانس آمار ایران*، دانشگاه علم و صنعت، ص. ۲۵۶-۲۶۶.

[۴۲] زینلی، زهرا؛ اکبری، محمد قاسم؛ عارفی، محسن (۱۳۹۱). آزمون فرضیه میانگین فازی شهودی بر ا ساس متر L_p و با ا ستفاده از روش بوت‌ا سترپ. *گزارش دوازدهمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران*، دانشگاه مازندران، ص. ۱-۸.

[۴۳] طاهری، سید محمود (۱۳۷۵). *آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی*. انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.

[۴۴] طاهری، سید محمود؛ ماشین‌چی، ماشاالله (۱۳۸۷). *مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی*. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

A New Approach for Testing Fuzzy Hypotheses Based on *p*-value

Mohsen Arefi

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran

Abstract

In this paper, a new approach is presented for testing fuzzy hypotheses based on p-value method. In this method, we first formulate the hypotheses of interest by fuzzy sets, and then, the p-value is defined to integrate under the δ-cuts of null fuzzy hypothesis. To compare the proposed p-value with the test significance level, we decide to accept or reject the null fuzzy hypothesis. Finally, the proposed method is employed by some numerical examples.

***Keywords*:** Testing statistical hypothesis, Test statistic, Fuzzy hypothesis, p-value

Mathematics Subject Classification (2010): 03E72, 62F03.