درباره‌ی مدول‌های α-شبه کرول

مریم داودیان[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۵

چکیده: در این مقاله مفهوم مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی را معرفی و مطالعه می‌کنیم. با استفاده از این مفهوم برخی نتایج اصلی مدول‌های α-تقریباً آرتینی را به مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی تعمیم می‌دهیم. نشان می‌دهیم اگر یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی باشد، دارای بعد تام کوچک‌تر یا مساوی α است. هم‌چنین مفهوم مدول‌های α-شبه کرول، که در حقیقت دوگان مفهوم مدول‌های α-شبه کوتاه و هم‌زمان تعمیم مدول‌های α-کرول هستند، را معرفی و مطالعه می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم هر مدول α-تقریباً آرتینی (به‌طور مشابه، α-کرول) یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α-شبه کرول) است، اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. نشان می‌دهیم اگر M یک مدول α-شبه کرول باشد، آنگاه M بعد تام دارد و بعد تام M، α و یا $\alpha+1$ است.

واژه‌های کلیدی: بعد کرول، مدول‌های α-شبه کرول، مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی، مدول‌های α-کرول، مدول‌های α-شبه کوتاه.

رده‌بندی موضوعی(۲۰۱۰): ۱۶P۲۰، ۱۶P۴۰.

۱- مقدمه

مدول M را آرتینی می‌گوییم، هرگاه در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های خود صدق کند. بعد کرول که اندازه‌ی انحراف از آرتینی بودن را نشان می‌دهد برای اولین بار توسط جی-رنتسلر و گابریل [۱] برای اعداد طبیعی تعریف شده و [۲] توسط جی-کراس به اعداد طبیعی تعمیم داده شده است. بعد کرول R-مدول M با نماد $k-\dim M$ نشان داده می‌شود. دوگان این بعد که اندازه‌ی انحراف از نوتری بودن را نشان می‌دهد، نخستین بار توسط لمونیه [۳] معرفی

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.davoudian@scu.ac.ir

شد. سپس چمبلس [۴] به مطالعه‌ی دوگان بعد کرول پرداخت و آن را N –بعد نامید. کرمزاده در [۵] به مطالعه‌ی این بعد پرداخت و آن را بعد نوتری نامید. این بعد [۵—۱۸] بعد نوتری نامیده شده است. برخی نویسندگان این بعد را دوگان بعد کرول نامیده‌اند، [۱۹—۲۲]. بعد نوتری R-مدول M را با نماد $n-\dim M$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که R-مدول M تام است، هرگاه در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های متناهی مولد صدق کند. نویسنده در [۲۴ و ۲۳] به‌معرفی و بررسی بعد تام و دوگان بعد تام پرداخته است. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های متناهی مولد M را با نماد F(M) نشان می‌دهیم، این مجموعه با رابطه‌ی شمول یک مجموعه جزئا مرتب است. بعد تام (به‌طور مشابه، دوگان بعد تام) R –مدول M که با نماد $p-\dim M$ (به‌طور مشابه، $dp-\dim M$) نشان داده می‌شود، انحراف مجموعه‌ی جزئا مرتب F(M) از آرتینی بودن (به‌طور مشابه، از نوتری بودن)، تعریف می‌شود. اگر α یک عدد ترتیبی باشد، R-مدول M، α-بحرانی نامیده می‌شود، اگر $k-\dim M=\alpha$ و به‌ازای هر زیرمدول نا صفر N از M داشته باشیم، $k-\dim \frac{M}{N}<\alpha$. R-مدول M بحرانی نامیده می‌شود، اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α یک مدول α-بحرانی باشد. هین [۲۵] مدول‌های تقریباً آرتینی را بررسی کرد. هم‌چنین بیلهان و اسمیت [۲۶] مدول‌های تقریباً نوتری و مدول‌های کوتاه را مطالعه کردند. یادآوری می‌کنیم که مدول M کوتاه نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر زیرمدول N از M، داشته باشیم N یا $\frac{M}{N}$ نوتری باشد. هم‌چنین مدول M تقریباً نوتری نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمدول سره‌ی N از M، نوتری باشد. سپس داودیان و همکاران [۲۷] مدول‌های α-تقریباً نوتری و مدول‌های α-کوتاه را بررسی کردند. یادآوری می‌کنیم که مدول M یک مدول α-تقریباً نوتری نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر زیرمدول سره‌ی N از M داشته باشیم $n-\dim N<\alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. مدول M را α کوتاه می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر زیرمدول N از M داشته باشیم $n-\dim N\le\alpha$ و یا $n-\dim \frac{M}{N}\le\alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. هم‌چنین داودیان و همکاران [۲۸] مدول‌های α-تقریباً آرتینی و مدول‌های α-کرول، که درواقع به ترتیب دوگان مدول‌های α-تقریباً نوتری و مدول‌های α-کوتاه و تعمیم مدول‌های تقریباً آرتینی هستند، را مطالعه کردند. سپس داودیان [۲۹] مدول‌های α-تقریباً شبه نوتری و مدول‌های α-شبه کوتاه را معرفی و بررسی کرد. یادآوری می‌کنیم که مدول M یک مدول α-تقریباً شبه نوتری نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول سره‌ی متناهی مولد N از M داشته باشیم $dp-\dim N<\alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. مدول M را α-شبه کوتاه می‌نامیم، هرگاه به

ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داشته باشیم $dp-\dim N \leq \alpha$ یا $dp-\dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

در بخش دو این مقاله به بیان حقایق مفیدی درباره‌ی بعد تام می‌پردازیم. در بخش سه، مدول‌های α-شبه کرول و مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی، که به ترتیب دوگان مدول‌های α-شبه کوتاه و مدول‌های α-تقریباً شبه نوتری و هم‌زمان تعمیم مدول‌های α-کرول و مدول‌های α-تقریباً آرتینی هستند، [۲۸ و ۲۹]، را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که R-مدول M یک مدول α-تقریباً آرتینی نامیده می‌شود، اگر برای هر زیرمدول نا صفر N از M داشته باشیم $k-\dim \frac{M}{N} < \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد، [۲۸]. R-مدول M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی نامیده می‌شود، اگر برای هر زیرمدول نا صفر متناهی مولد N از M داشته باشیم $p-\dim \frac{M}{N} < \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. هم‌چنین یادآوری می‌کنیم که R-مدول M یک مدول α-کرول نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر زیرمدول N از M داشته باشیم $k-\dim N \leq \alpha$ و یا $k-\dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. R-مدول M یک مدول α-شبه کرول نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داشته باشیم $p-\dim N \leq \alpha$ و یا $p-\dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. برخی ویژگی‌های اصلی مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α-شبه کرول را بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم هر مدول α-تقریباً آرتینی (به‌طور مشابه، α-کرول) یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α-شبه کرول) است، اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. نشان می‌دهیم اگر M یک مدول α-شبه کرول (به‌طور مشابه، α-تقریباً شبه آرتینی باشد)، آنگاه M بعد تام دارد و $p-\dim M = \alpha$ و یا $p-\dim M = \alpha + ۱$ (به‌طور مشابه، $p-\dim M \leq \alpha$). سرانجام در بخش آخر برخی نتایج مدول‌های تقریباً α-شبه کرول و مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی را بررسی می‌کنیم.

در ادامه یادآور می‌شویم که چنانچه A (به‌طور مشابه، A') مجموعه‌ی همه‌ی R-مدول‌هایی باشد که به‌ازای یک عدد ترتیبی α، یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α-تقریباً آرتینی) هستند، و B (به‌طور مشابه، B') مجموعه‌ی همه‌ی مدول‌هایی باشد که به‌ازای یک عدد ترتیبی α، یک مدول α-شبه کرول (به‌طور مشابه، α-کرول) هستند، ارتباط بین مفاهیم گفته شده را می‌توان به کمک نمودار زیر بیان کرد.

$$\begin{array}{ccc} A & \leftarrow & A' \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ B & \leftarrow & B' \end{array}$$

در سراسر این مقاله R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر و یکدار و M یک R-مدول راست یکانی است. نماد $N \subseteq M$ (به‌طور مشابه، $N \subset M$) به معنای N زیرمدول M است (به‌طور مشابه، Nزیرمدول سره‌ی M است) می‌باشد. در پایان تأکید می‌کنیم که نتایج بخش‌های سه و چهار جدید بوده و دوگان نتایج مرجع [۲۹] و هم‌چنین تعمیم نتایج مرجع [۲۸] می‌باشند. برای آشنایی با کلیه مفاهیم و نتایجی که در اینجا بیان نشده‌اند به [۲۳، ۳۰ و ۳۱] مراجعه شود.

۲- بعد تام

در این بخش برخی نتایج مفید درباره‌ی بعد تام را یادآوری می‌کنیم [۲۳].

تعریف ۱: فرض کنیم M یک R-مدول باشد. بعد تام M که با $p-\dim M$ نشان داده می‌شود، یک عدد ترتیبی است و به‌صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

گوییم $p-\dim M = -۱$ اگر $M = ۰$. برای عدد ترتیبی α داریم $p-\dim M = \alpha$ اگر $p-\dim M \not< \alpha$، و زنجیر نامتناهی $M_۰ \supset M_۱ \supset M_۲ \supset ... \supset M_n \supset M_{n+۱} \supset ...$ از زیرمدول‌های متناهی مولد M وجود نداشته باشد که برای هر $i \geq ۱$ داشته باشیم $p-\dim \frac{M_i}{M_{i+۱}} \not< \alpha$. به‌عبارت دیگر $p-\dim M = \alpha$ اگر $p-\dim M \not< \alpha$ و به‌ازای هر $M_۰ \supset M_۱ \supset M_۲ \supset ... \supset M_n \supset M_{n+۱} \supset ...$ از زیرمدول‌های متناهی مولد M عدد صحیح n وجود داشته باشد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $i \geq n$ داشته باشیم $p-\dim \frac{M_i}{M_{i+۱}} < \alpha$.

.اثبات نتایج زیر مشابه نتایج متناظرشان درباره‌ی بعد کرول است [۲۳].

لم ۱: فرض کنیم R-مدول M بعد تام داشته باشد. در این صورت هر زیرمدول A از M، بعد تام دارد و $p-\dim A \leq p-\dim M$.

لم ۲: فرض کنیم هر زیرمدول متناهی مولد سره‌ی A از M دارای بعد تام باشد. در این صورت M دارای بعد تام است و $p-\dim = \sup\{p-\dim A : A \subset M \ is\ f.g.\}$.

لم ۳: فرض کنیم به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد نا صفر A از M، M/A دارای بعد تام باشد. در این صورت M بعد تام دارد و $p-\dim M \leq \{p-\dim M/A : ۰ \neq A \subseteq M\} + ۱$.

لم ۴: فرض کنیم M یک R-مدول باشد. اگر به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد A از M، A و یا M/A بعد تام داشته باشند؛ آنگاه M بعد تام دارد.

اکنون نتیجه‌ی زیر را از[۲۳ لم ۴-۶،۱] بیان می‌کنیم.

لم ۵: اگر R-مدول M دارای بعد تام باشد، به‌ازای هر زیرمدول A در M، مدول M/A دارای بعد تام است و $p-\dim M/A \leq p-\dim M$.

در ادامه تعریف زیر را از مرجع[۲۳] بیان می‌کنیم.

تعریف ۲: R-مدول M، α- بحرانی تام نامیده می‌شود، اگر $p-\dim M = \alpha$ و به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد نا صفر A ازM داشته باشیم $p-\dim M/A < \alpha$. R مدول M بحرانی تام است اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی، α-بحرانی تام باشد.

گزاره ۱: فرض کنیم M یک R-مدول و $0 \neq A \subseteq M$ زیرمدولی در M باشد که دارای بعد کرول است. آنگاه $p-\dim M = \sup\left\{k-\dim A, p-\dim M/A\right\}$، اگر هر طرف تساوی وجود داشته باشد.

در پایان، نتیجه‌ی زیر را از [۲۳، قضیه‌ی ۴-۳-۵] بیان می‌کنیم.

قضیه ۱: فرض کنیم R-مدول M دارای بعد کرول باشد، آنگاه M دارای بعد تام است و $p-\dim M = k-\dim M$.

۳- مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α-شبه کرول

در این بخش مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α-شبه کرول را بررسی می‌کنیم. برخی از مفاهیم اصلی مدول‌های α-تقریباً آرتینی (به‌طور مشابه، مدول‌های α-کرول) را به مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α-شبه کرول) تعمیم می‌دهیم.

ابتدا تعریف مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی را بیان می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم، مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی تعمیمی از مدول‌های α-تقریباً آرتینی هستند، [۲۸].

تعریف ۳: R-مدول M، α-تقریباً شبه آرتینی نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر زیرمدول نا صفر و متناهی مولد مانند N از M، داشته باشیم $p-\dim M/A < \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

مفهوم بالا در حقیقت دوگان مدول‌های α-تقریباً شبه نوتری [۲۹، تعریف ۲-۱] است. به‌روشنی دیده می‌شود که هر مدول ۰-تقریباً شبه آرتینی، ساده است و درنتیجه ۰-بحرانی است. اگر $\alpha =$ ۱، آنگاه M تام و یا ۱-بحرانی تام است. یادآوری می‌کنیم که مفهوم α-تقریباً شبه آرتینی تعمیمی از مفهوم α-تقریباً آرتینی است.

نتیجه ۱: اگر M یک مدول α-تقریباً آرتینی باشد؛ آنگاه M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \le \alpha$، یک مدول β-تقریباً شبه آرتینی است.

بنا بر نتیجه‌ی قبل و قضیه‌ی ۱، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۲: گیریم M یک مدول α-تقریباً آرتینی باشد. آنگاه M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی است.

اثبات: بنابر نتیجه‌ی قبل به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \le \alpha$، M یک مدول β-تقریباً شبه آرتینی است. گیریم N زیرمدول نا صفری از M باشد، بنابراین N زیرمدول نا صفر متناهی مولدی مانند N' دارد. از آنجا که M یک مدول β-تقریباً شبه آرتینی است، داریم $p-\dim \frac{M}{N'} \le \beta$. از طرفی بنابر [۲۸، لم ۲-۳]، M دارای بعد کرول است. بنابراین $\frac{M}{N'}$ دارای بعد کرول است [۱]. بنابر قضیه‌ی ۱، داریم $k-\dim \frac{M}{N'} = p-\dim \frac{M}{N'} \le \beta$. درنتیجه $k-\dim \frac{M/N'}{N/N'} \le \beta$. پس به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \le \beta$، M یک مدول γ-تقریباً آرتینی است. این نشان می‌دهد که $\alpha \le \beta$. بنابراین $\alpha = \beta$ و حکم برقرار است.

ملاحظه ۱: اگر M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی باشد. آنگاه هر زیرمدول و هر تصویر هم‌ریخت M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \le \alpha$، یک مدول β-تقریباً شبه آرتینی است.

در ادامه نتایج مفید زیر را که درواقع دوگان نتایج مشابه در [۲۹، لم‌های۲-۲، ۲-۳ و ۲-۴] هستند، بیان می‌کنیم.

لم ۶: اگر M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه M بعد تام دارد و $p-\dim M \le \alpha$؛ به‌ویژه $p-\dim M = \alpha$ اگر و تنها اگر M، α-بحرانی تام باشد.

اثبات. به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داریم $p-\dim \frac{M}{N} < \alpha$. بنا بر [۲۳، لم ۴-۱-۸]، داریم $p-\dim M \le \alpha$. اکنون قسمت آخر حکم بدیهی است.

لم ۷: فرض کنیم M یک R-مدول است و $p-\dim M=\alpha$. اگر M، α-بحرانی تام باشد، آنگاه α-تقریباً شبه آرتینی است. در غیر این صورت M یک مدول $\alpha+۱$-تقریباً شبه آرتینی است.

اثبات: فرض کنیم M یک مدول α بحرانی تام باشد، در این صورت به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داریم $p-\dim \frac{M}{N}<\alpha$. لذا به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta\le\alpha$، M یک مدول β-تقریباً شبه آرتینی است. اگر $\beta<\alpha$، آنگاه بنابر لم قبل داریم $p-\dim M\le\beta$ و این در تناقض با فرض $p-\dim M=\alpha$ است. اگر M بحرانی تام نباشد، زیرمدول متناهی مولدی مانند N از M وجود دارد، به‌طوری که $p-\dim \frac{M}{N}=\alpha$. لذا M به‌ازای $\gamma\ge\alpha+۱$، یک مدول γ-تقریباً شبه آرتینی است. از طرفی بنابر [۲۳، لم ۴-۱-۶] به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داریم $p-\dim \frac{M}{N}\le\alpha<\alpha+۱$. لذا M یک مدول $\alpha+۱$-تقریباً شبه آرتینی است.

عدد ترتیبی α را تالی می‌نامیم هرگاه $\alpha=\beta+۱$، که β یک عدد ترتیبی است. عدد ترتیبی α حدی است اگر عدد ترتیبی تالی نباشد.

لم ۸: اگر M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه M یا α-بحرانی تام است و یا $p-\dim M+۱=\alpha$. به‌ویژه اگر α یک عدد ترتیبی حدی و M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه M یک مدول α-بحرانی تام است.

اثبات: بنابر لم ۶، M بعد تام دارد و $p-\dim M\le\alpha$. اگر $p-\dim M=\alpha$، آنگاه بنابر لم ۶ داریم M بحرانی تام است. فرض کنیم $p-\dim M<\alpha$، آنگاه بنا بر لم ۷ داریم $\alpha=\beta+۱$ و حکم برقرار است.

اکنون نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲: فرض کنیم M یک مدول $\beta+۱$-تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه $p-\dim M=\beta$ یا $p-\dim M=\beta+۱$.

گزاره ۲: R-مدول M بعد تام دارد اگر و تنها اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α، یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس قضیه‌ی ۲، در حالت کلی درست نیست.

مثال ۱: فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی از R-مدول‌هایی باشد که آرتینی و یا نوتری هستند. آنگاه مجموع مستقیم خارجی $M=\oplus_{i\in I}M_i$ بعد تام دارد، [۲۴، یادآوری ۲-

۴]. بنابراین به‌ازای یک عدد ترتیبی α، M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی است، اما به‌ازای هیچ عدد ترتیبی γ، مدول γ-تقریباً آرتینی نیست، به گزاره‌ی ۲ و [۲۸، لم ۲-۳] مراجعه شود. به‌ویژه اگر $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح و I یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}$ دارای بعد کرول است و $k-\dim \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty}=1$. بنابراین $\oplus_{i\in I}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{p^\infty})$ به‌ازای یک عدد ترتیبی α، یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی است؛ اما به‌ازای هیچ عدد ترتیبی γ، مدول γ-تقریباً شبه آرتینی نیست.

زیرمدول L از مدول M را اساسی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر زیرمدول نا صفر N از M داشته باشیم $N\cap L\neq 0$.

گزاره‌ی ۳: گیریم M یک R-مدول باشد. اگر M زیرمدول بحرانی مانند N داشته باشد به‌طوری که N در M اساسی باشد و $p-\dim \frac{M}{N}<k-\dim N$، آنگاه M بحرانی تام است.

اثبات: اگر $M=N$ روشن است که M بحرانی تام است،[۲۳، نتیجه‌ی ۲-۲۱]. فرض کنیم $M\neq N$. آنگاه $p-\dim M=\sup\left\{k-\dim N\,,\,p-\dim\frac{M}{N}\right\}=k-\dim N$، به گزاره‌ی ۱ مراجعه شود. فرض کنیم زیرمدول نا صفر و متناهی مولد L از M وجود داشته باشد به‌طوری که $p-\dim\frac{M}{L}=p-\dim M$ و به تناقض می‌رسیم. می‌دانیم

$$p-\dim\frac{M}{L}=p-\dim\frac{M/N\cap L}{L/N\cap L}\,.$$

بنابراین $p-\dim\frac{M}{L\cap N}\geq p-\dim\frac{M}{L}=p-\dim M$ به لم ۵ مراجعه شود. این نشان می‌دهد $p-\dim M=k-\dim N=p-\dim\frac{M}{L\cap N}$ به لم ۵ مراجعه شود (یادآوری، N زیرمدول اساسی M است و بنابراین $0\neq N\cap L\subseteq L$). بنابراین $p-\dim\frac{M}{L\cap N}=k-\dim N>p-\dim\frac{M}{N}$. چون N بحرانی است، داریم $p-\dim\frac{M}{L\cap N}=k-\dim N>k-\dim\frac{N}{N\cap L}$. بنابر گزاره‌ی ۱، داریم $p-\dim\frac{M}{L\cap N}=\sup\left\{p-\dim\frac{M}{N},k-\dim\frac{N}{N\cap L}\right\}=p-\dim\frac{M}{N}$ و این تناقض است.

این بخش را با تعریف زیر که در حقیقت دوگان مدول‌های α-شبه کوتاه است ادامه می‌دهیم، [۲۹]. تلاش می‌کنیم که نتایج مرتبط با آنچه در مرجع [۲۹] آمده است را بیان کنیم.

تعریف ۴: R-مدول M را α-شبه کرول گوییم، اگر برای هر زیرمدول متناهی مولد N از M، داشته باشیم $p-\dim N \leq \alpha$ یا $p-\dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و α کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

ملاحظه ۲: فرض کنیم M یک مدول α-کرول باشد. آن‌گاه به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β-شبه کرول است.

از ملاحظه‌ی قبل و قضیه‌ی ۱ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳: گیریم M یک مدول α-کرول باشد. آنگاه M یک مدول α-شبه کرول است.

اثبات: بنابر ملاحظه‌ی قبل، به‌وضوح M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β-شبه کرول است. حال فرض کنیم N زیرمدول نا صفری از M باشد. بنابراین N دارای زیرمدول متناهی مولد نا صفری مانند N' است. چون M، β-شبه کرول است، داریم $p-\dim N' \leq \alpha$ یا $p-\dim \frac{M}{N'} \leq \alpha$. بنابر قضیه‌ی ۱ و[۲۳] داریم $k-\dim N' \leq \alpha$ یا $k-\dim \frac{M}{N'} \leq \alpha$. اگر زیرمدول متناهی مولدی از M مانند N' وجود داشته باشد به‌طوری که $k-\dim \frac{M}{N'} \leq \beta$، آنگاه $k-\dim \frac{M}{N} \leq \beta$، [۲۳]. در غیر این صورت به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد مانند N' از N داریم $p-\dim N' \leq \beta$ و بنابر لم ۲ داریم $p-\dim N \leq \beta$. پس $k-\dim N \leq \beta$، به قضیه‌ی ۱ و [۲۳] مراجعه شود. بنابراین M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \beta$ یک مدول γ-کرول است. بنابراین $\alpha \leq \beta$ و در نتیجه $\alpha = \beta$ و حکم برقرار است.

مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیه‌ی ۳ در حالت کلی درست نیست.

مثال ۲: فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی نامتناهی از R-مدول‌های آرتینی باشد. آنگاه $M = \sum_{i\in I} M_i$ یک مدول ۰-شبه کرول است ولی به‌ازای هیچ عدد ترتیبی α، مدول α-کرول نیست. به‌ویژه اگر $\mathbb{Z}$ حلقه‌ی اعداد صحیح و I یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ آرتینی است. بنابراین $\sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول ۰-شبه کرول است، ولی به‌ازای هیچ عدد ترتیبی α، مدول α-کرول نیست.

ملاحظه ۳: اگر $p-\dim M = \alpha$، آنگاه M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β-تقریباً شبه کرول است.

نتیجه ۳: گیریم M یک مدول α-شبه کرول باشد. آنگاه M دارای بعد تام است و $p-\dim M \geq \alpha$.

از ملاحظه‌ی ۳ و نتیجه‌ی ۳، گزاره‌ی زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۴: R-مدول M بعد تام دارد اگر و تنها اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α، یک مدول α شبه کرول باشد.

گزاره ۵: اگر M یک مدول α-شبه کرول باشد، آنگاه $p-\dim M = \alpha$ یا $p-\dim M = \alpha+1$.

اثبات: بنابر نتیجه‌ی ۳ داریم $p-\dim M \geq \alpha$. اگر $p-\dim M \neq \alpha$، آنگاه $p-\dim M \geq \alpha+1$. حال فرض کنیم $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های متناهی مولد M باشد. اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد به‌طوری که $p-\dim M_k \leq \alpha$، آنگاه به‌ازای هر $i \geq k$ داریم $p-\dim \frac{M_i}{M_{i+1}} \leq p-\dim M_i \leq p-\dim M_k \leq \alpha$ لم‌های ۱ و ۵ را ببینید. در غیر این صورت، به‌ازای هر i داریم $p-\dim \frac{M}{M_{i+1}} \leq \alpha$ (یادآوری M یک مدول α-شبه کرول است) و درنتیجه به‌ازای هر i داریم $p-\dim \frac{M_i}{M_{i+1}} \leq \alpha$. بنابراین در هر حالت عدد صحیح k وجود دارد، به‌طوری که $p-\dim \frac{M_i}{M_{i+1}} \leq \alpha$ به‌ازای هر $i \geq k$. این نشان می‌دهد $p-\dim M \leq \alpha+1$ و لذا $p-\dim M = \alpha+1$.

ملاحظه ۴: اگر M یک مدول α-شبه کرول باشد، آنگاه هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β-شبه کرول است.

با توجه به گزاره‌ی ۵، نتیجه‌ی زیر بدیهی است.

ملاحظه ۵: اگر M یک R-مدول شبه کرول باشد، آنگاه α-تقریباً شبه آرتینی است، به‌طوری که $\beta \leq \alpha \leq \beta+1$. ادعا می‌کنیم همه‌ی حالت‌ها در این نامساوی رخ می‌دهند. برای نشان دادن این مطلب، یادآوری می‌کنیم که هر مدول (۱-)-بحرانی تام، ۰-شبه کرول است، در حالی که (۱-)-تقریباً شبه آرتینی می‌باشد و هر مدول α-بحرانی تام، چنانچه α عدد ترتیبی حدی باشد، یک مدول α-شبه کرول و هم‌چنین مدول α-تقریباً شبه آرتینی است. در پایان یادآور می‌شویم که مدول ۲-تقریباً شبه آرتینی وجود دارد که ۰-شبه کرول است، مثال ۴ را ببینید.

ملاحظه ۶: R–مدول M، (۱-)-شبه کرول است اگر و تنها اگر ساده باشد. بنابراین هر مدول (۱-)-شبه کرول، یک مدول ۰-اتمی و ۰-بحرانی است (یادآوری؛ R مدول M را α-اتمی می‌نامیم، اگر $n-\dim M=\alpha$ و به‌ازای هر زیرمدول سره‌ی N از M داشته باشیم $n-\dim N<\alpha$).

گزاره ۶: فرض کنیم M یک R-مدول باشد و $p-\dim M=\alpha$، که α یک عدد ترتیبی حدی است. آنگاه M یک مدول α-شبه کرول است.

اثبات. می‌دانیم M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta\le\alpha$ یک مدول β-شبه کرول است. اگر $\beta<\alpha$، بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p-\dim M\le\beta+1<\alpha$ و این تناقض است. پس M یک مدول α-شبه کرول است.

گزاره ۷: گیریم M یک R-مدول باشد و $p-\dim M=\alpha=\beta+1$. آنگاه M یک مدول β-شبه کرول و یا α-شبه کرول است.

اثبات: می‌دانیم به‌ازای عدد ترتیبی $\gamma\le\alpha$، M یک مدول γ-شبه کرول است. اگر $\gamma<\beta$، آنگاه بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p-\dim M\le\gamma+1<\beta+1$ و این تناقض است.

درباره‌ی مدول‌های بحرانی تام حکم زیر برقرار است.

گزاره ۸: فرض کنیم M یک R-مدول α-بحرانی تام باشد، که $\alpha=\beta+1$. آنگاه M یک مدول β-شبه کرول است.

اثبات: گیریم $N\subset M$ یک زیرمدول متناهی مولد M باشد. در این حالت داریم $p-\dim\frac{M}{N}<\alpha$. در نتیجه $p-\dim\frac{M}{N}\le\beta$. این نشان می‌دهد که به‌ازای عدد ترتیبی $\beta'\le\beta$، M یک مدول β'-شبه کرول است. اگر $\beta'<\beta$، آنگاه $\beta'+1\le\beta<\alpha$. اما در این صورت بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p-\dim M\le\beta'+1<\alpha$ و این تناقض است. بنابراین $\beta'=\beta$ و حکم برقرار است.

حقیقت زیر که نتیجه‌ی بدیهی حکم قبل است، نشان می‌دهد که عکس گزاره‌ی ۶ در حالت کلی درست نیست.

ملاحظه ۷: گیریم M یک R-مدول $\alpha+1$-بحرانی تام باشد، که α عدد ترتیبی حدی است. آنگاه M یک مدول α-شبه کرول است.

گزاره ۹: فرض کنیم M یک R-مدول باشد، به‌طوری که $p-\dim M = \alpha + 1$. آنگاه M یک R-مدول α-شبه کرول است، یا M دارای زیرمدول متناهی مولد مانند N است به‌طوری که $p-\dim \frac{M}{N} = p-\dim N = \alpha + 1$.

اثبات: بنابر گزاره‌ی ۷، M یک R-مدول α-شبه کرول و یا $\alpha+1$-شبه کرول است. فرض کنیم M، α-شبه کرول نباشد، در نتیجه M دارای زیرمدول متناهی مولدی مانند N است، به‌طوری که $p-\dim N \geq \alpha + 1$ و $p-\dim \frac{M}{N} \geq \alpha + 1$. این نشان می‌دهد که $p-\dim N = \alpha + 1$ و $p-\dim \frac{M}{N} = \alpha + 1$ و حکم برقرار است.

گزاره ۱۰: گیریم R-مدول نا صفر M، α-شبه کرول باشد. در این صورت یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha + 1$ وجود دارد که M، β-تقریباً شبه آرتینی است؛ و یا M دارای زیرمدول متناهی مولدی مانند N است به‌طوری که $p-\dim N \leq \alpha$.

اثبات: فرض کنیم M به‌ازای هیچ $\beta \leq \alpha + 1$، β-تقریباً شبه آرتینی نباشد. بنابراین M دارای زیرمدول متناهی مولد مانند N است به‌طوری که $p-\dim \frac{M}{N} \not\leq \alpha$. چون M یک مدول α-شبه کرول است داریم $p-\dim N \leq \alpha$ و حکم برقرار است.

سرانجام این بخش را با ذکر مثال‌هایی از مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، مدول‌های α-شبه کرول) به پایان می‌بریم. ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر R-مدول نوتری M دارای بعد کرول α باشد، آنگاه به‌ازای هر $\beta \leq \alpha$ مدول M دارای زیرمدول‌های β-بحرانی است، به نکته‌ی بعد از [۱۱، گزاره ۱-۱۱] مراجعه شود. از طرفی می‌دانیم هر مدول β-بحرانی، یک مدول β-بحرانی تام است، [۱۸، نتیجه‌ی ۲-۶]. در نتیجه M را یک مدول نوتری در نظر می‌گیریم، به‌طوری که $k-\dim M = \alpha$ و به‌ازای هر $\beta \leq \alpha$، N را زیرمدول β-بحرانی تام M در نظر می‌گیریم. آنگاه بنابر لم ۷، N یک زیرمدول β-تقریباً شبه آرتینی است. در اینجا یادآوری می‌کنیم که اگر α عدد ترتیبی حدی باشد، تنها زیرمدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی همان مدول‌های α-بحرانی تام هستند، ازاین‌رو برای دیدن مثالی از یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی که α-بحرانی تام نباشد، عدد ترتیبی α باید غیر حدی باشد. بنابراین فرض کنیم M یک مدول باشد که بحرانی تام نیست و $k-\dim M = \beta$ به‌طوری که $\alpha = \beta + 1$، [۸، مثال ۱-۱]. اکنون بدیهی است که M یک مدول α-تقریباً شبه آرتینی است و بحرانی تام نیست. برای دیدن مثال‌هایی از مدول‌های α-شبه کرول، به‌طور مشابه می‌توانیم از این حقیقت که مدول نوتری M با بعد کرول α وجود دارد و به‌ازای هر $\beta \leq \alpha$، M دارای زیرمدول β بحرانی

تام است، استفاده کنیم و به کمک گزاره‌های ۶، ۷، ۸ مثال‌های مختلفی از مدول‌های α-شبه کرول بسازیم.

۴- خواص مدول‌های α-شبه کرول و α-تقریباً شبه آرتینی

در این بخش برخی خواص مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α-شبه کرول روی حلقه‌ی دلخواه R را بررسی می‌کنیم.

لم ۹: فرض کنیم R یک حلقه و M یک مدول باشد. اگر M دارای زیرمدولی مانند K باشد به‌گونه‌ای که $\frac{M}{K}$، α-شبه کرول و $k-\dim K \le \alpha$ باشد، آنگاه M یک مدول α-شبه کرول است.

اثبات: گیریم N یک زیرمدول متناهی مولد M باشد، آنگاه $k-\dim N \cap K \le \alpha$ ، مرجع [۲۳] را ببینید. اگر $p-\dim \frac{N}{N \cap K} \le \alpha$ ، آنگاه بنابر گزاره‌ی ۱، داریم $p-\dim N \le \alpha$. حال فرض کنیم $p-\dim \frac{N}{N \cap K} > \alpha$. چون $\frac{N+K}{K}$ یک زیرمدول متناهی مولد از مدول α-شبه کرول $\frac{M}{K}$ است و $p-\dim \frac{N}{N \cap K} = p-\dim \frac{N+K}{K} > \alpha$. بنابراین داریم

$$p-\dim \frac{M/K}{N+K/K} = p-\dim \frac{M}{N+K} \le \alpha .$$

اما $k-\dim \frac{N+K}{N} = k-\dim \frac{K}{N \cap K} \le k-\dim K \le \alpha$، مرجع [۲۳] را ببینید. درنتیجه $p-\dim \frac{M}{N} = \sup\left\{k-\dim \frac{N+K}{N}, p-\dim \frac{M}{N+K}\right\} \le \alpha$. این نشان می‌دهد که M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \le \alpha$، یک مدول β-شبه کرول است. از طرفی $\frac{M}{K}$ یک مدول α-شبه کرول است، لذا از ملاحظه‌ی ۴ نتیجه می‌شود $\alpha \le \beta$ و حکم برقرار است.

نتیجه ۴: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. اگر $M = M_1 \oplus M_2$ به‌گونه‌ای که M_1 یک مدول α شبه کرول و $k-\dim M_2 \le \alpha$؛ آنگاه M، یک مدول α-شبه کرول است.

مثال ۳: می‌دانیم $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول آرتینی و $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$ یک مدول ۰-شبه کرول است. بنابر نتیجه‌ی قبل $\mathbb{Z}_{p^\infty}\oplus\mathbb{Z}$ یک مدول ۰-شبه کرول است. روشن است که $\mathbb{Z}_{p^\infty}\oplus\mathbb{Z}$ آرتینی نیست.

در ادامه نتایج مفید زیر به‌دست می‌آیند.

گزاره ۱۱: گیریم R یک حلقه و M یک مدول نا صفر و α-شبه کرول است که بحرانی تام نیست. آنگاه M شامل زیرمدول متناهی مولد نا صفری مانند L است، به‌طوری که $p-\dim L \le \alpha$.

اثبات: چون M بحرانی تام نیست، یک زیرمدول متناهی مولد $L \subset M$ وجود دارد به‌طوری که $p-\dim \frac{M}{L} = p-\dim M$. بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p-\dim M = \alpha$ یا $p-\dim M = \alpha+1$. اگر $p-\dim M = \alpha$ واضح است که $p-\dim L \le \alpha$. بنابراین فرض کنیم $p-\dim \frac{M}{L} = p-\dim M = \alpha+1$ درنتیجه $p-\dim L \le \alpha$ و حکم برقرار است.

گزاره ۱۲: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. اگر M زیرمدول نا صفری مانند N داشته باشد، به‌طوری که N یک مدول α-کرول، $\frac{M}{N}$ یک مدول β-شبه کرول و $\mu=\{\alpha,\beta\}$ باشد؛ آنگاه M یک مدول γ-شبه کرول است به‌گونه‌ای که $\mu \le \gamma \le \mu+1$.

اثبات. چون N یک مدول α-کرول است، داریم $k-\dim N = \alpha$ یا $k-\dim N = \alpha+1$ ، [۲۸، گزاره‌ی ۳-۸] را ببینید. به‌طور مشابه چون $\frac{M}{N}$ یک مدول β-شبه کرول است، بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p-\dim \frac{M}{N} = \beta$ یا $p-\dim \frac{M}{N} = \beta+1$. بنابر لم ۵، M بعد تام دارد و $p-\dim M = \sup\left\{k-\dim N\,,\, p-\dim \frac{M}{N}\right\}$. درنتیجه $\mu \le p-\dim M \le \mu+1$. اما بنا بر ملاحظه‌ی ۳ عدد ترتیبی γ وجود دارد به‌طوری که M یک مدول γ-شبه کرول است. با توجه به‌گزاره‌ی ۵ داریم $\gamma \le p-\dim M \le \gamma+1$. این نشان می‌دهد که $\gamma=\mu$ و یا $\gamma=\mu+1$ (توجه؛ همواره داریم $\mu \le \gamma$) و حکم برقرار است.

با استفاده از لم ۸، نتیجه‌ی زیر که مشابه گزاره‌ی قبل در مورد مدول‌ها α-تقریباً شبه آرتینی است، حاصل می‌شود.

گزاره ۱۳: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. اگر N زیرمدولی از M باشد، به‌طوری که N یک مدول α-تقریباً آرتینی و $\frac{M}{N}$ یک مدول β-تقریباً شبه آرتینی و $\mu = \sup\{\alpha, \beta\}$ باشد؛ آنگاه M یک مدول γ-تقریباً شبه آرتینی است به‌طوری که $\mu \leq \gamma \leq \mu + ۱$.

نتیجه ۵: فرض کنیم R یک حلقه است. اگر $M_۱$ یک R-مدول $\alpha_۱$-شبه کرول (به‌طور مشابه، $\alpha_۱$-تقریباً شبه آرتینی) و $M_۲$ یک R-مدول $\alpha_۲$-کرول (به‌طور مشابه، $\alpha_۲$-تقریباً آرتینی) و $\mu = \sup\{\alpha_۱, \alpha_۲\}$ باشد؛ آنگاه $M = M_۱ \oplus M_۲$ به‌ازای یک عدد ترتیبی $\alpha \leq \mu \leq \alpha + ۱$، یک مدول μ-شبه کرول (μ-تقریباً شبه آرتینی) است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در نتیجه‌ی قبل همه‌ی حالت‌ها برای μ ممکن است رخ دهد.

مثال ۴: اگر $M_۱ = M_۲ = \mathbb{Z}_{p^\infty}$، آنگاه $M_۱$ و $M_۲$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول ۰-شبه کرول و هم‌چنین ۰-کرول (به‌طور مشابه، ۱-تقریباً آرتینی و هم‌چنین ۱-تقریباً شبه آرتینی) هستند و $M_۱ \oplus M_۲$ نیز یک مدول ۰-شبه کرول (به‌طور مشابه، ۱-تقریباً شبه آرتینی) است. گیریم $M_۱ = M_۲ = \mathbb{Z}$ در این حالت $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z}$ یک مدول ۰-شبه کرول و هم‌چنین ۰-کرول (به‌طور مشابه، ۱-تقریباً شبه آرتینی و هم‌چنین ۱-تقریباً آرتینی) است ولی $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یک مدول ۱-شبه کرول (به‌طور مشابه، ۲-تقریباً آرتینی است). سرانجام $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول ۰-شبه کرول است در حالی که ۲-تقریباً شبه آرتینی می‌باشد.

قضیه ۴: فرض کنیم M یک R-مدول نا صفر و α یک عدد ترتیبی باشد. گیریم برای هر مدول خارج قسمتی $\frac{M}{N}$ که N زیرمدول متناهی مولدی از M است، عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\frac{M}{N}$ یک مدول γ-شبه کرول است. آنگاه عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha + ۱$ وجود دارد، به‌طوری که M یک مدول μ-شبه کرول است.

اثبات: گیریم $۰ \neq N \subset M$ زیرمدول متناهی مولدی از M است. ازآنجاکه $\frac{M}{N}$ به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$، یک مدول γ-شبه کرول است، داریم $p-\dim \frac{M}{N} \leq \gamma + ۱ \leq \alpha + ۱$، گزاره‌ی ۵ را ببینید. درنتیجه داریم $p-\dim M \leq \alpha + ۲$ و لذا M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha + ۱$ یک مدول μ-شبه کرول است، لم ۳ را ببینید.

قضیه‌ی زیر دوگان قضیه ۴ است.

قضیه ۵: گیریم α یک عدد ترتیبی و M یک R-مدول باشد، به‌طوری که هر زیرمدول سره‌ی متناهی مولد N از M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \le \alpha$ یک مدول γ-شبه کرول است. اگر $\alpha = -۱$، آنگاه M به‌ازای $\gamma \le ۰$ یک مدول γ-شبه کرول است. در غیر این صورت M به‌ازای $\gamma \le \alpha$، یک مدول γ-شبه کرول است. به‌علاوه $p-\dim M \le \alpha+۱$.

اثبات: اگر $\alpha = -۱$، آنگاه هر زیرمدول نا صفر از M، ماکسیمال و ساده است، درنتیجه M به‌ازای $\gamma \le ۰$ یک مدول γ-شبه کرول است و $p-\dim M = ۰$. حال فرض کنیم $\alpha \ge ۰$؛ اگر $N \subset M$ یک زیرمدول نا صفر متناهی مولد M باشد، بنابر فرض N به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \le \alpha$ یک مدول γ-شبه کرول است. بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p-\dim N \le \gamma+1 \le \alpha+1$. اما بنابر لم ۲ داریم $p-\dim M = \sup\{p-\dim N : N \subset M , N \ is\ f.g.\}$. این نشان می‌دهد که $p-\dim M \le \alpha+۱$. اگر $p-\dim M \le \alpha$، آنگاه روشن است که M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\mu \le \alpha$ یک مدول μ-شبه کرول است. حال فرض کنیم $p-\dim M = \alpha+۱$؛ اگر $۰ \ne N \subset M$ یک زیرمدول متناهی مولد M باشد، نشان می‌دهیم $p-\dim N \le \alpha$ یا $p-\dim \frac{M}{N} \le \alpha$. برای این منظور فرض کنیم $p-\dim N = \alpha+۱$ و نشان می‌دهیم $p-\dim \frac{M}{N} \le \alpha$. حال گیریم $۰ \ne N \subset N' \subset M$، که N' زیرمدول متناهی مولد M باشد. از آنجایی که N' به‌ازای یک $\gamma \le \alpha$ یک مدول γ-شبه کرول است و $p-\dim N = \alpha+۱$، داریم $p-\dim \frac{N'}{N} \le \alpha$. اما بنا بر لم ۲، داریم $p-\dim \frac{M}{N} = \sup\left\{p-\dim \frac{N'}{N} : \frac{N'}{N} \subset \frac{M}{N}, \frac{N'}{N} is\ f.g.\right\} \le \alpha$ و حکم برقرار است.

نتیجه ۶: گیریم M یک R-مدول باشد. اگر هر زیرمدول سره‌ی M یک مدول ۰-شبه کرول باشد، آنگاه M نیز چنین است.

ملاحظه ۸: اگر هر زیرمدول نا صفر سره‌ی R-مدول M یک مدول (-۱)-شبه کرول باشد؛ آنگاه هر زیرمدول نا صفر M، ماکسیمال و مینیمال است، و عکس این مطلب نیز درست است.

مثال ۵: گیریم $M = A \oplus B$؛ که A و B، R-مدول‌های ساده هستند. به‌وضوح M یک مدول ۰-شبه کرول است. می‌دانیم هر زیرمدول سره‌ی نا صفر از M ساده و لذا مدول (-۱)-شبه کرول است.

نتیجه‌ی زیر مشابه قضیه‌های ۴ و ۵ درباره‌ی مدول‌های α-تقریباً شبه آرتینی است.

گزاره ۱۴: گیریم M یک R-مدول و α یک عدد ترتیبی است. اگر هر زیرمدول سرهی متناهی مولد N از M (بهطور مشابه، هر مدول خارج قسمتی $\frac{M}{N}$، که N زیرمدول نا صفر متناهی مولدی از M است) یک مدول γ-تقریباً شبه آرتینی باشد، که $\gamma \leq \alpha$؛ آنگاه M یک مدول μ-تقریباً شبه آرتینی است، بهطوری که $\mu \leq \alpha + ۱$ و همچنین داریم $p - \dim M \leq \alpha$ (بهطور مشابه، بهطوری که $\mu \leq \alpha + ۱$ و همچنین داریم $p - \dim M \leq \alpha + ۱$).

منابع

[1] Gordon, R. and Robson, J.C. (1973). *Krull dimension*, Mem. Amer. Math. Soc., 133.

[2] Krause, G. (1972). On fully left bounded left Noetherian rings, *J. Algebra*, **23**, 88-99.

[3] Lemonnier, B. (1972). Deviation des ensembless etgroupes totalement ordonnes, *Bull. Sci. Math*., **96**, 289-303.

[4] Chambless, L. (1980). N-Dimension and N-critical modules, Application to Artinian modules, *Comm. Algebra,* **8**, 1561-1592.

[5] Karamzadeh, O.A.S. (1974). Noetherian-dimension, Ph.D. thesis, Exeter University, England, UK.

[6] Karamzadeh, O.A.S. and Motamedi, M. (1994). On α -DICC modules, *Comm. Algebra,* **22**, 1933-1944.

[7] Karamzadeh, O.A.S. and Sajedinejad, A.R. (2001). Atomic modules, *Comm. Algebra,* **29**, 2757-2773.

[8] Karamzadeh, O.A.S. and Sajedinejad, A.R. (2002). On the Loewy length and the Noetherian dimension of Artinian modules, *Comm. Algebra*, **30**, 1077-1084.

[9]. Kirby, D. (1990). Dimension and length for Artinian modules, *Quart. J. Math. Oxford,* **41**, 419-429.

[10] Hashemi, J., Karamzadeh, O.A.S. and Shirali, N. (2009). Rings over which the Krull dimension and the Noetherian dimension of all modules coincide, *Comm. Algebra,* **37**, 650-662.

[11] Karamzadeh, O.A.S. and Shirali, N. (2004). On the countability of Noetherian dimension of Modules, *Comm. Algebra*, **32**, 4073-4083.

[12] Davoudian, M. (2018). Modules with chain condition on non-finitely generated submodules, *Mediterr. J. Math*., **15**, 1-12.

[13] Davoudian, M. (2016). Dimension of non-finitely generated submodules, *Vietnam J. Math*., **44**, 817-827.

[14] Davoudian, M. (2017). Modules satisfying double chain condition on non-finitely generated submodules have Krull dimension, *Turk. J. Math*., **41**, 1570-1578.

[15] Davoudian, M. and Ghayour, O. (2017). The length of Artinian modules with countable Noetherian dimension, *Bull. Iranian Math. Soc*., **43**, 1621-1628.

[16] Davoudian, M. (2017). On α -quasi short modules, *Int. Electron. J. Algebra,* **21**, 91-102.

[17] Davoudian, M. and Shirali, N. (2016). On α -tall modules, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* **41**, 1739-1747.

[18] Davoudian, M. (2015). *Perfect dimension*, The 46th Annual Iranian Mathematics Conference, Yazd University, Yazd, Iran.

[19] Albu, T. and Vamos, P. (1998). Global Krull dimension and Global dual Krull dimension of valuation Rings, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **201**, 37-54.

[20] Albu, T. and Smith, P.F. (1999). Dual Krull dimension and duality, *Rocky Mountain J. Math.*, **29**, 1153-1164.

[21] Albu, T. and Smith, P.F. (1996). Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (I), *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc*., **120**, 87-101.

[22] Albu, T. and Smith, P.F. (1997). Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (II), *Comm. Algebra*, **25**, 1111-1128.

[23] Davoudian, M. (2012). On perfect dimension of modules, Ph. D. thesis, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

[24] Davoudian, M. and Karamzadeh, O.A.S. (2016). Artinian serial modules over commutative (or left Noetherian) rings are at most one step away from being Noetherian, *Comm. Algebra,* **44**, 3907-3917.

[25] Hein, J. (1979). Almost Artinian modules, *Math. Scand*., **45**, 198-204.

[26] Bilhan, G. and Smith P.F. (2006). Short modules and almost Noetherian modules, *Math. Scand*., **98**, 12-18.

[27] Davoudian, M., Karamzadeh O.A.S. and Shirali N. (2014). On α -short modules, *Math. Scand.*, **114 (1)**, 26-37.

[28] Davoudian, M., Halali, A. and Shirali, N. (2016). On α -almost Artinian modules, *Open Math*. **14**, 404-413.

[29] Davoudian, M. On α -semi short modules, *Journal of Algebric system*, to appear.

[30] Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992). *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag.

[31] McConell, J.C. and Robson, J.C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York.

On α-semi Krull Modules

Maryam Davoudian

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this article we introduce and study the concept of α-almost semi Artinian modules. Using this concept we extend some of the basic results of α-almost Artinian modules to α-almost semi Artinian modules. Moreover we introduce and study the concept of α-semi Krull modules. We show that if M is an α-semi Krull module, then the perfect dimension of M is either α or $\alpha+1$.

***Keywords*:** Krull dimension, α-semi Krull module, α-almost Noetherian module, Noetherian dimension, α-short module.

Mathematics Subject Classification (2010): 16P20, 16P40.