آشوب در دستگاه‌های دینامیکی قطعه‌ای هموار با یک نقطه‌ی ناپیوستگی

مهدی پوربرات*[۱]، ندا عباسی** و رؤیا مکرونی***

*گروه ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی تهران

**مرکز تحقیقات ریاضی ماهانی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

***گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۳/۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰

چکیده: در این مقاله روی دستگاه‌های دینامیکی قطعه‌ای هموار یک‌بعدی با یک نقطه‌ی ناپیوستگی، شرایطی را فراهم می‌کنیم که وجود آشوب دیوانی برای آن‌ها تضمین شود. در حقیقت نشان می‌دهیم که اگر f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی با دوشاخه با مشتق بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{۲}$ باشد آنگاه دستگاه دینامیکی مرتبط با آن آشوبناک از نوع دیوانی است. برقراری چنین شرایطی روی دستگاه‌های دینامیکی با بیش از یک نقطه‌ی ناپیوستگی لزوماً این حکم را نتیجه نمی‌دهد.

واژه‌های کلیدی: دستگاه‌های دینامیکی یک‌بعدی، دستگاه‌های دینامیکی قطعه‌ای هموار، ناپیوستگی، آشوب دیوانی، متعدی توپولوژیکی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۷B۹۹، ۳۷C۷۰.

۱-مقدمه

دستگاه‌های دینامیکی قطعه‌ای هموار در پهنه‌های وسیعی از علوم به‌ویژه در مهندسی [۱، ۴، ۱۰ و ۱۱]، زیست‌شناسی و اقتصاد [۲، ۱۲، ۱۳ و ۱۴] کاربردهای فراوانی داشته‌اند. این امر موجب شده است که در سالیان اخیر توجه بسیاری از محققان به مطالعه‌ی این خانواده از دستگاه‌های

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m-pourbarat@sbu.ac.ir

دینامیکی معطوف شود. در حقیقت به دلیل اینکه قوانین حاکم بر ناحیه‌های داخل فضای فازِ مرتبط با پدیده‌ی فیزیکی، متفاوت از ناحیه‌های دیگر بیان می‌شود توجه بسیاری را برانگیخته است. ازاین‌رو پیشگویی آینده و گذشته‌ی چنین دستگاه‌هایی ممکن است تحت تأثیر همه نگاشت‌ها قرار گیرد. دستگاه‌های دینامیکی آشوبناک که خانواده‌ی بزرگ و مهمی در تئوری دستگاه‌های دینامیکی می‌باشند مهر تأییدی بر این ادعاست.

در این مقاله به وجود آشوب در ساده‌ترین نوع از دستگاه‌های دینامیکی قطعه‌ای هموار یعنی با فضای فاز یک‌بعدی و یک نقطه‌ی ناپیوستگی پرداخته می‌شود و ملاحظه می‌گردد که حتی در چنین حالاتی نوعی متفاوت از پیچیدگی‌ها در بیان برهان قضایا در تقابل با دستگاه‌های دینامیکی هموار یک‌بعدی ظاهر می‌شود. دستگاه‌های دینامیکی یک‌بعدی گسسته در فضاهای فازی چون اعداد حقیقی و دایره‌ی یکه موردمطالعه قرار می‌گیرند. هر دستگاه دینامیکی یک‌بعدی روی دایره با حداقل یک ناپیوستگی می‌تواند به‌طور طبیعی مزدوج توپولوژیک یک نگاشت قطعه‌ای هموار روی بازه $[۰,۱]$ از اعداد حقیقی قرار گیرد. *نگاشت‌های شبه بیکر* خانواده‌ی مهمی از این قبیل دستگاه‌های دینامیکی را معرفی می‌کنند. در مقالات [۷-۸] رفتار دینامیکی چنین نگاشت‌هایی مطالعه شده است، همچنین ما در مقاله [۹] آشوب نگاشت شبه بیکر در حالت نامتناهی شاخه را بررسی کرده‌ایم. حال در این مطالعه به بررسی رفتار آشوبناک نگاشت شبه بیکر در حالت متناهی دوشاخه می‌پردازیم.

تعریف ۱: فرض کنید N یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ و نقاط $۰ = \xi_۰ < \xi_۱ ... < \xi_{N-۱} < \xi_N = ۱$ در نظر گرفته‌شده‌اند. نگاشت شبه بیکر $f:[۰,۱] \to [۰,۱]$ با $N-۱$ نقطه‌ی ناپیوستگی توسط ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} f_۱(x) & ۰ \le x < \xi_۱ \\ f_۲(x) & \xi_۱ \le x < \xi_۲ \\ \vdots & \vdots \\ f_N(x) & \xi_{N-۱} \le x \le ۱ \end{cases} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود که در آن توابع

$$f_i : [\xi_{i-۱} . \xi_i] \to [۰,۱]. \ ۱ \le i \le N \qquad (۲)$$

اکیداً صعودی هستند و برای هر $۱ \le i \le N-۱$ در شرایط $f_{i+۱}(\xi_i) = ۰$ و $f_i(\xi_i) = ۱$ صدق می‌کنند. بعلاوه اگر نگاشت‌های f_i از کلاس حداقل $C^۱$ باشند و ثابتی $۱ < \lambda$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $۱ \le i \le N$ و هر $x \in [۰,۱]$ عدد $f_i'(x)$ بزرگ‌تر از λ باشد، آنگاه نگاشت شبه بیکر f را توسیعی می‌نامیم [۷-۸-۹].

جهت سهولت کار نماد I را برای بازه‌ی بسته $[0,1]$ بکار می‌بریم. بدون از دست دادن کلیت می‌توان $\partial := f_1(0)$ را عددی مثبت و کوچک‌تر از یک و $\beta := f_N(1)$ را عددی بزرگ‌تر از صفر در نظر گرفت. نام‌گذاری نگاشت f به نگاشت شبه بیکر به این دلیل است که اگر $\partial = 0$ و $\beta = 0$ باشد نگاشت (۱) به یک نگاشت بیکر روی $[0,1]$ با تعداد N شاخه تبدیل می‌شود که همواره‌ی $[0,1]$ آشوبناک است [۳]. لازم به ذکر است که هر نگاشت قطعه‌ای پیوسته با چنین ویژگی‌هایی می‌تواند همانند یک نگاشت پیوسته در نظر گرفته شود. در یک *نگاشت* شبه بیکر هر چه N عدد بزرگ‌تری باشد دستگاه دینامیکی مرتبط با آن از شانس بالاتری به جهت آشوبناک بودن روی بازه $[0,1]$ برخوردار است.

یکی از رایج‌ترین تعاریف آشوب منتسب به دیوانی است که در این مقاله به وجود این نوع آشوب در نگاشت شبه بیکر توسیعی با $\lambda < \sqrt{2}$ که شاخه‌های اول و آخر آن الزاماً پوشا نیستند، پرداخته‌شده است. لازم به ذکر است که چنین نگاشتی اغلب به‌عنوان نگاشت اولین بازگشت مناسبی برای نگاشت‌های لورنز غیر توسیعی به کار می‌رود و ازاین‌رو مطالعه‌ی آن‌ها خالی از لطف نیست. ترتیب ارائه‌ی مطالب در این مقاله به این صورت است که در بخش دوم به اثبات برقراری شرط متعدی توپولوژیکی برای نگاشت شبه بیکر می‌پردازیم. بخش سوم به اثبات وجود آشوب دیوانی اختصاص دارد. در این میان نشان می‌دهیم که نگاشت شبه بیکر دوشاخه‌ای در شرایط چگال بودن نقاط متناوب و حساسیت نسبت به شرایط اولیه صدق می‌کند. در بخش چهارم مثالی از نگاشت‌های شبه بیکر توسیعی در علوم مهندسی ارائه می‌شود.

۲- متعدی توپولوژیکی

این قسمت را با بیان تعریف متعدی توپولوژیکی آغاز می‌کنیم که نقش کلیدی در مفهوم آشوب ایفا می‌کند.

تعریف ۲: فرض کنیم که X یک فضای توپولوژی باشد. دستگاه دینامیکی $\varphi : X \to X$ را متعدی توپولوژیکی می‌نامند هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی باز ناتهی U و V در X عدد طبیعی مانند n موجود باشد به‌طوری‌که $\varphi^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

نتیجه‌ی اصلی این بخش به‌صورت زیر است.

قضیه ۱: فرض کنیم f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی با دوشاخه و $\lambda \geq \sqrt{2}$ باشد. در این صورت نگاشت f موضعاً پوشا و درنتیجه متعدی توپولوژیکی روی I است.

برهان: برهان این حکم از طریق چهار لم بعدی اثبات می‌شود.

لم ۱: فرض کنیم $\varphi : X \to X$ یک دستگاه دینامیکی باشد. در این صورت احکام

$$(i) \Leftarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$

همیشه برقرار است جایی که در آن

i) X را نتوان به‌صورت $A\cup B$ نوشت که در آن زیرمجموعه‌های B و A درون ناتهی و φ-پایا هستند؛

ii) X را نتوان به‌صورت $A\cup B$ نوشت که در آن زیرمجموعه‌ی A تحت نگاشت φ پایا و زیرمجموعه‌های A B درون ناتهی دارند؛

iii) برای هر دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی U و V در X عدد $n\geq ۰$ وجود دارد که $\varphi^n(U)\cap V\neq\varnothing$؛

iv) برای هر زیرمجموعه‌ی باز ناتهی U در X، مجموعه‌ی $\cup_{n=۰}^{\infty}\varphi^n\left(U\right)$ در X چگال است؛

v) برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی U در X، مجموعه‌ی $\cup_{n=۰}^{\infty}\varphi^{-n}\left(U\right)$ در X چگال است.

برهان: به صفحات ۷ و ۸ [۵] مراجعه شود. ■

هرگاه شرط (iv) لم (۱) برای نگاشت φ برقرار باشد آنگاه این نگاشت موضعاً پوشا در X نیز نامیده می‌شود [۵]. در این مقاله ثابت می‌کنیم در نگاشت‌های شبه بیکر تحت شرایط معینی می‌توان همواره عدد صحیحی مانند k چنان پیدا کرد که $\cup_{n=۰}^{k}\varphi^n\left(U\right)=X$ در لم بعدی ثابت می‌شود که هر زیرمجموعه‌ی باز ناتهی I دارای یک تصویر از مرتبه‌ی متناهی است که شامل حداقل یک نقطه‌ی ناپیوستگی است. در اینجا منظور از نماد $|\ |$ همان قدرمطلق برای یک نقطه یا طول (اندازه) برای یک بازه است.

لم ۲: فرض کنیم f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی باشد، در این صورت برای هر زیرمجموعه‌ی باز ناتهی $J\subset I$ کوچک‌ترین عدد صحیح $n\geq ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که $f^n(J)$ یک بازه‌ی باز شامل حداقل یک نقطه‌ی ناپیوستگی است.

برهان: اثبات از طریق برهان خلف صورت می‌پذیرد. فرض کنیم بازه‌ای چون $J=(a.b)\subset I$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $k\geq ۰$

$$f^k(J)\cap\{\xi_i\,|\,۱\leq i\leq N-۱\}=\varphi. \qquad (۳)$$

با گرفتن $k=۰$ درمی‌یابیم که $۱\leq i_۰<N$ وجود دارد به‌طوری‌که $J\subset\left(\xi_{i_۰-۱}.\xi_{i_۰}\right)$. به دلیل

پیوستگی $f_{i_۰}$ روی J مجموعه $f_{i_۰}(J)$ یک بازه است. به دلیل مشتق‌پذیری $f_{i_۰}$ روی J و به‌کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین $c_۱ \in J$ وجود دارد که $f'_{i_۰}(c_۱) =: \mu_۱ > ۱$ و

$$l(f_{i_۰}(J)) = (f_{i_۰}(b) - f_{i_۰}(a)) = \mu_۱(b-a) = \mu_۱ l(J). \qquad (۴)$$

توجه نمایید که گاهی اوقات از نماد l به‌جای نماد $|\ |$ به معنای طول بازه استفاده می‌شود. با گرفتن $k=۱$ درمی‌یابیم که $۱ \le i_۱ < N$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_{i_۰}(J) \subset \left(\xi_{i_۱-۱}.\xi_{i_۱}\right)$. به دلیل پیوستگی $f_{i_۱}$ روی مجموعه $f_{i_۰}(J)$ مشاهده می‌کنیم که $f_{i_۱} \circ f_{i_۰}(J)$ نیز یک بازه است و به دلیل مشتق‌پذیری $f_{i_۱}$ روی $f_{i_۰}(J)$ و به‌کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین $c_۲ \in f_{i_۰}(J)$ وجود دارد که $f'_{i_۱}(c_۲) =: \mu_۲$ و

$$l(f_{i_۱} \circ f_{i_۰}(J)) = \mu_۲ l(f_{i_۰}(J)) = \mu_۱\mu_۲ l(J). \qquad (۵)$$

با روند استقرائی برای هر عدد طبیعی n، یک عدد طبیعی $۱ \le i_n < N$ موجود است که

$f_{i_{n-۱}} \circ f_{i_{n-۲}} \circ \ldots \circ f_{i_۰}(J) \subset \left(\xi_{i_{n-۱}}.\xi_{i_n}\right)$ و $f_{i_n} \circ f_{i_{n-۱}} \circ \ldots \circ f_{i_۰}(J)$ یک بازه است. به‌طور مشابه $c_n \in f_{i_{n-۱}} \circ f_{i_{n-۲}} \circ \ldots \circ f_{i_۰}(J)$ وجود دارد که در شرط

$$l(f_{i_n} \circ f_{i_{n-۱}} \circ \ldots \circ f_{i_۰}(J)) = \mu_n l(f_{i_{n-۱}} \circ f_{i_{n-۲}} \circ \ldots \circ f_{i_۰}(J)) = \mu_۱\mu_۲\ldots\mu_n l(J) \qquad (۶)$$

صدق می‌کند که در آن $f'_{i_{n-۱}}(c_n) = \mu_n > ۱$. ازآنجاکه $\mu_i \ge \sqrt{۲}$ به دست می‌آوریم

$$\lim_{n\to+\infty} l(f_{i_n} \circ f_{i_{n-۱}} \circ \ldots_{i_۰}(J)) = +\infty, \qquad (۷)$$

که یک تناقض است با این مطلب که این بازه طول متناهی دارد از اینکه یک زیرمجموعه I است. ■

فرض کنیم $J := (a.b) \subset I$ و این بازه شامل تنها یک نقطه‌ی ناپیوستگی $\xi_۱ =: \xi$ باشد. برای راحتی کار $J_L := \left(a.\xi\right)$ و $J_R := \left(\xi.b\right)$ بگیرید که به ترتیب بازه‌های سمت چپ و راست ξ می‌باشند و تحت f به بازه‌هایی نگاشته می‌شوند که نقطه‌ی ناپیوستگی ندارند. بازه‌ی J_M را بازه‌ای می‌گیریم که بیشترین طول رابین J_R و J_L داراست و در صورت تساوی یکی از بازه‌ها را در نظر می‌گیریم. نتیجه زیر برای هر *نگاشت* شبه بیکر توسیعی برقرار است.

لم ۳: فرض کنیم f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی باشد. در این صورت روابط زیر برقرار است:

۱) عدد $\varepsilon_R > ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $|f^۲(J_R)| > \lambda^۲\varepsilon_R |J_R|$،

۲) عدد $\varepsilon_L > ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $|f^۳(J_L)| > \lambda^۲ \varepsilon_L |J_L|$،

۳) اگر $\lambda = \sqrt{۲}$ آنگاه عدد $\varepsilon_M > ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $|f^۳(J_M)| > \varepsilon_M |J|$. بعلاوه اگر $\lambda = ۲$ آنگاه عدد $\varepsilon_M > ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $|f^۳(J_M)| > ۲\varepsilon_M |J|$.

برهان: بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین $p \in (a.\xi)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f(J_R)| = f'(p)|J_R|. \qquad (۸)$$

ازآنجایی‌که $f'(p) > \lambda$ ، بنابراین عدد $\varepsilon_۱ > ۱$ موجود است به‌طوری‌که $f'(p) > \lambda\varepsilon_۱$. درنتیجه رابطه‌ی $|f(J_R)| > \lambda\varepsilon_۱ |J_R|$ همواره برقرار است. از طرف دیگر بازه‌ی $f(J_R)$ دارای نقطه‌ی ناپیوستگی ξ نیست لذا $f^۲(J_R)$ یک بازه است. به‌طور مشابه $\varepsilon_۲ > ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که نامساوی‌های

$$|f^۲(J_R)| > \lambda\varepsilon_۲ |f(J_R)| > \lambda^۲\varepsilon_۱\varepsilon_۲ |J_R| \qquad (۹)$$

برقرار است؛ بنابراین حکم اول به دست می‌آید.

اثبات (۲) مشابه (۱) است.

برای اثبات (۳) ابتدا فرض کنید $\lambda = \sqrt{۲}$. در این صورت $\lambda^۲ = ۲$ و بنابراین $|J| \geq ۲|J_M|$. در آخر اگر $\lambda = ۲$ آنگاه $\lambda^۲ = ۴$ و $|J| \geq ۲|J_M|۴$ است. بنابر قسمت اول، حکم نتیجه می‌شود. ■

لم ۴: فرض کنیم f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی با دوشاخه باشد. در این صورت $\alpha < \beta$.

برهان: می‌دانیم که ξ یک نقطه‌ی ناپیوستگی نگاشت f داخل $(۰,۱)$ است. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین برای نگاشت $f_۱$ روی بازه‌ی $[۰,\xi]$، نقطه‌ی $a \in (۰,\xi)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f_۱'(a) = \frac{۱-\alpha}{\xi} > \lambda > ۱. \qquad (۱۰)$$

درنتیجه α عددی کوچک‌تر از $۱-\xi$ است. به‌طور مشابه با در نظر گرفتن نگاشت $f_۲$ نقطه‌ی $b \in (\xi,۱)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f_۲'(b) = \frac{\beta}{۱-\xi} > ۱ \qquad (۱۱)$$

که نشان می‌دهد عدد β بزرگ‌تر از $۱-\xi$ است بنابراین $\alpha < \beta$. ■

از لم (۴) ممکن است هر یک از حالات $\xi < \alpha < \beta$، $\alpha \leq \xi \leq \beta$ یا $\alpha < \beta < \xi$ اتفاق بیافتد.

با داشتن این نتیجه به اثبات قضیه (۱) می‌پردازیم

برهان: برای اثبات موضعاً پوشا بودن نگاشت f صحت شرط (iv) لم (۱) بررسی می‌شود. درواقع نشان می‌دهیم که برای هر بازه‌ی باز $J \subset I$، عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری‌که $(\circ.۱) \subset \cup_{i=\circ}^{k} f^{i}(J)$. ازاین‌رو سه حالت برای بازه J امکان‌پذیر است:

حالت اول. اگر $(\circ,\beta) \subseteq J$،

برای اثبات این قسمت نیز سه حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

* اگر حالات $\beta > \alpha > \xi$ یا $\alpha \le \xi \le \beta$ برقرار باشد. در این صورت داریم $(\circ,\xi) \subseteq (\circ,\beta)$ که این بیان می‌کند بازه‌ی $f((\circ,\beta))$ شامل $(\alpha.۱)$ است. ازآنجاکه بنا بر لم (۴)، $(\alpha,۱) \cap (\circ,\beta)$ ناتهی است، نتیجه می‌گیریم $(\circ.۱) \subset J \cup f(J)$.

* اگر حالت $\alpha < \beta < \xi$ اتفاق بیافتد. در این صورت داریم $J \cap f(J) \neq \varphi$، درنتیجه $J \cup f(J)$ یک بازه است. بنابر لم (۲) کوچک‌ترین عدد صحیح مانند m وجود دارد که $\xi \in f^{m}(J)$. این نتیجه می‌دهد که $(\circ.۱) \subset \cup_{i=\circ}^{m+۱} f^{i}(J)$.

حالت دوم. اگر $(\alpha,۱) \subseteq J$،

برای اثبات این حالت سه حالت ممکن را در نظر می‌گیریم:

* اگر حالات $\xi > \beta > \alpha$ یا $\alpha \le \xi \le \beta$ برقرار باشد. در این صورت داریم $(\xi,۱) \subseteq (\alpha,۱)$ که این بیان می‌کند بازه‌ی $f\left((\xi,۱)\right)$ برابر $(\circ,\beta)$ و یک زیرمجموعه $f(J)$ است. ازآنجاکه بنا بر لم (۴)، $(\alpha,۱) \cap (\circ,\beta)$ ناتهی است، نتیجه می‌گیریم $(\circ,۱) \subset J \cup f(J)$.

* اگر حالت $\xi < \alpha < \beta$ اتفاق بیافتد. در این صورت داریم $J \cap f(J) \neq \varphi$، درنتیجه $J \cup f(J)$ یک بازه است. بنا بر لم (۲) وجود دارد کوچک‌ترین عدد صحیحی مانند m که. $\xi \in f^{m}(J)$این می‌گوید که $(\circ.۱) \subset \cup_{i=\circ}^{m+۱} f^{i}(J)$.

حالت سوم. هیچ‌کدام از بازه‌های $(\circ,\beta)$ و $(\alpha,۱)$ در J نباشند،

برای اثبات این حالت، از لم (۲) کوچک‌ترین عدد صحیح $n \ge \circ$ را چنان انتخاب می‌کنیم که. $\xi \in f^{n}(J)$ بنابراین $f^{n}(J)$ یک بازه است و داریم

$$f^{n}(J) = (a,b) \supset (a,\xi) \cup (\xi,b). \qquad (۱۲)$$

حال فرض کنیم $J^{-} = (a,\xi)$ و $J^{+} = (\xi,b)$. در این صورت نیز سه حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

* اگر $\xi \in f(J^-)$ آنگاه $f(J^-) = (f(a),1)$ و بنابراین $(\xi,1) \subset f(J^-)$ و بنابراین $f(\xi,1) = (0,\beta) \subset f^2(J^-)$. بنابر قسمت یک حکم اثبات می‌شود.

* اگر $\xi \in f(J^+)$ آنگاه $f(J^+) = (0,f(b))$، بنابراین $(0,\xi) \subset f(J^+)$، بنابراین $f(0,\xi) = (\alpha,1) \subset f^2(J^+)$. بنابر قسمت دو حکم اثبات می‌شود.

* اگر $f(J^-)$ و $f(J^+)$ شامل نقطه‌ی ناپیوستگی نباشند آنگاه بازه‌ای را در نظر می‌گیریم که دارای طول بیشتری بین J^- و J^+ است و آن را با J_1 نشان می‌دهیم. بنابر لم (۳) عدد $\varepsilon_1 > 1$ وجود دارد به‌طوری‌که $|f^3(J_1)| > \varepsilon_1 |J|$ و $f^3(J_1)$ یک بازه است. فرض کنیم $k_1 \geq 0$ کوچک‌ترین عدد صحیحی باشد که $\xi \in f^{k_1}(f^3(J_1))$ برقرار است و در آن

$$f^{k_1}(f^2(J_1)) = (a_1,b_1) \supset (a_1,\xi) \cup (\xi,b_1) = J_1^- \cup J_1^+. \qquad (13)$$

مراحل قبلی را تکرار می‌کنیم و اگر $\xi \in f(J_1^-)$ یا $\xi \in f(J_1^+)$ آنگاه حکم تمام است. در غیر این صورت، بازه‌ای را در نظر می‌گیریم که طول بیشتری بین J_1^- و J_1^+ داراست و آن را با J_2 نشان می‌دهیم. بنابر لم (۳) عدد $\varepsilon_2 > 1$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$|f^3(J_2)| > \varepsilon_2 |f^{k_1}(f^3(J_1))| > \varepsilon_2\varepsilon_1 |J|.$$

این عملیات را ادامه می‌دهیم و در هر حالت بازه‌ای را در نظر می‌گیریم که بیشترین طول را بین J_i^- و J_i^+ داراست و آن را با J_{i+1} نمایش می‌دهیم. درنتیجه

$$|f^3(J_{i+1})| > \varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_1 |J| > \varepsilon^{i+1} |J| \qquad (14)$$

که در آن $\varepsilon > 1$ کوچک‌ترین ثابت در مجموعه $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i+1}\}$ است. در این صورت i مناسب وجود دارد به‌طوری‌که $f(J_{i+1}^-)$ یا $f(J_{i+1}^+)$ شامل نقطه‌ی ناپیوستگی ξ شود.

حالات (۱-۳) ایجاب می‌کنند که همواره می‌توان یک عدد طبیعی k یافت به‌گونه‌ای که $(0,1) \subset \cup_{i=0}^{k} f^i(J)$. بنابر لم (۱) نگاشت f متعدی توپولوژیکی است. ■

لازم به ذکر است که قضیه فوق برای بازه‌های بسته نیز برقرار است. در حقیقت برای هر بازه‌ی بسته‌ی $J \subset I$، همواره یک عدد طبیعی k می‌توان یافت به‌گونه‌ای که $(0.1) \subset \cup_{i=0}^{k} f^i(J)$. توجه به این نکته الزامی است که هرگاه بازه‌ی $[a.b]$ شامل نقطه‌ی ناپیوستگی باشد آن را به‌صورت $[a,b] = [a,\xi] \cup [\xi,b]$ در نظر می‌گیریم. لذا

$$f([a,b]) = f_1([a,\xi]) \cup f_2([\xi,b]). \qquad (15)$$

این مطلب در بخش بعدی مورداستفاده قرار می‌گیرد.

۳-آشوب دیوانی

یادآوری می‌شود که یک اتفاق‌نظر در بیان تعریف واژه‌ی آشوب در تئوری دستگاه‌های دینامیکی وجود ندارد. همچنان که قبلاً نیز به آن اشاره گردید یکی از رایج‌ترین تعاریفِ آشوب، منسوب به دیوانی است و در این مقاله شرایط برای نگاشت موردبحث به‌گونه‌ای مهیا می‌شود که وجود این نوع از آشوب تضمین گردد.

تعریف ۳: فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک بدون نقطه‌ی تنها باشد. در این صورت دستگاه دینامیکی $\phi: X\to X$ آشوبناک از دیدگاه دیوانی است هرگاه

۱) نگاشت ϕ در X متعدی توپولوژیکی باشد،

۲) مجموعه‌ی تمام نقاط متناوب ϕ در X چگال باشند،

۳) نگاشت ϕ نسبت به شرایط اولیه حساس باشد.

خاطرنشان می‌سازیم که حساس بودن نگاشت ϕ نسبت به شرایط اولیه بدین معنی است که عدد $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in X$ و هر همسایگی x مثل U نقطه‌ی چون $y\in U$ و عدد $n\geq ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که $d(\varphi^n(x),\varphi^n(y))\geq \delta$.

قضیه ۲: فرض کنیم f یک نگاشت شبه بیکر با دوشاخه و $\lambda \geq \sqrt{۲}$ باشد. در این صورت نقاط متناوب f در I چگال هستند.

برهان: حکم را با نشان دادن اینکه هر بازه‌ی بسته‌ی $J=[a,b]$ در I که $a\neq b$ دارای یک نقطه‌ی متناوب f است، اثبات می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنیم J دارای هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی نیست (در غیر این صورت زیرمجموعه‌ای از آن را انتخاب می‌کنیم). بنابر لم (۲) عدد صحیح نا منفی k وجود دارد به‌طوری‌که $[۰,۱]=J\subset \cup_{i=۰}^{k} f^i(J)$.

فرض کنیم m ($m\leq k$) اولین عدد صحیحی باشد که رابطه $J\subset \cup_{i=۰}^{m} f^i(J)$ برقرار است. در این صورت با انتخاب دنباله‌ای مناسب از تصویرهای معکوس از J تحت ترکیب‌های $f_۱^{-۱}$ و $f_۲^{-۱}$ (که انقباضی هستند) بازه‌ای چون $[x,y]$ از J وجود دارد به‌طوری‌که

$$f^m([x,y])\supset [x,y]. \quad (۱۶)$$

از آنجائی که f^m در $[x,y]$ پیوسته است پس دارای یک نقطه‌ی ثابت در $[x,y]$ است که یک نقطه‌ی متناوب نگاشت f است. این حکم را تمام می‌کند. ■

بنابراین اگر f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی با دوشاخه و مشتق بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{۲}$ باشد آنگاه دستگاه دینامیکی متناظر به آن آشوبناک از نوع دیوانی است هرگاه به شرایط اولیه حساس

باشد.

قضیه ۳: فرض کنیم f یک نگاشت شبه بیکر توسیعی با دوشاخه باشد. در این صورت f روی I حساس به شرایط اولیه است.

برهان: با توجه به اینکه مقدار f دریک همسایگی مناسب چپ ξ، به مقدار کافی به یک می‌تواند نزدیک شود و از طرفی مقدار f دریک همسایگی راست ξ نیز می‌تواند به‌اندازه کافی به صفر نزدیک شود بنابراین می‌توان δ را چنان انتخاب کنیم که همسایگی $U := (\xi-\delta, \xi+\delta)$ در شرایط $f(\xi-\delta) > \xi + \frac{\delta}{۲}$ و $f(\xi+\delta) < \xi - \frac{\delta}{۲}$ صدق کند. برای هر دو نقطه‌ی x و y داخل I بازه J را بازه (x, y) اختیار می‌کنیم. بنابر لم (۲) عدد صحیح نا منفی k وجود دارد به‌طوری‌که $f^k(J)$ شامل یک نقطه‌ی ناپیوستگی است و بنابراین

$$f^k(J) = (f^k(x), \xi] \cup (\xi, f^k(y)). \qquad (۱۷)$$

در این صورت یا $f^k(y) - f^k(x) > \delta$ و یا هر دو نقطه به فاصله‌ی کوچک‌تر مساوی δ از ξ هستند. درنتیجه

$$(۱۸) \quad f^{k+۱}(x) > \xi + \frac{\delta}{۲}\ ،\ f^{k+۱}(y) < \xi - \frac{\delta}{۲} \text{ و } f^{k+۱}(x) - f^{k+۱}(y) > \xi + \frac{\delta}{۲} - \xi + \frac{\delta}{۲} = \delta$$

و حکم ثابت می‌شود. ■

با توجه به قضایای اثبات‌شده‌ی فوق این نتیجه حاصل می‌شود که نگاشت شبه بیکر توسیعی با یک نقطه ناپیوستگی یا دوشاخه با فرض مشتق بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{۲}$ دارای تعدی توپولوژیکی، نقاط متناوب چگال و حساسیت نسبت به شرایط اولیه است بنابراین در شرایط آشوب دیوانی صدق می‌کند.

۴- مثالی از کاربرد در علوم مهندسی

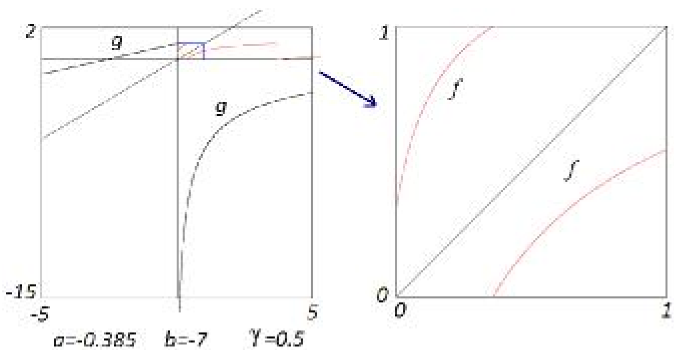
در بیشتر مواقع مطالعه‌ی دینامیک نگاشت‌های قطعه‌ای هموار با بهره‌مندی از تقریب خطی در یک همسایگی از مرز بین نواحی هموار صورت می‌پذیرد که به نگاشت‌های قطعه‌ای خطی منجر می‌شود؛ اما این روش تنها در دستگاه‌هایی که جمله‌ی مرتبه‌ی پیشرو تیلور آن‌ها در همسایگی مرز خطی باشد قابل‌استفاده است. علاوه بر نگاشت‌های بیکر خطی و لورنز بسیاری از مدل‌های کاربردی دارای عبارت‌های غیرخطی خاصی هستند که برای تشریح دینامیک آن‌ها ضروری است. در حالت خاص، در مطالعه‌ی نوسانگرهای برخوردی که توسط نوردمارک صورت گرفته نشان داده می‌شود که در این موارد جمله‌ی مرتبه‌ی پیشرو تیلور دارای توانی از یک عدد حقیقی مثبت

است. در این مورد فرم نرمال نگاشت در همسایگی نقطه‌ی مرزی، در یک سمت خطی و در سمت دیگر دارای عبارت غیرخطی است [۱۰-۱۱].

مثال: خانواده‌ی نگاشت‌های قطعه‌ای هموار نوردمارک در حالت خاص به‌صورت

$$g(x)=\begin{cases} ax+1\,, & x<0 \\ \dfrac{b}{(x+\tau)^{\gamma}}+1\,, & x\geq 0 \end{cases} \tag{۱۹}$$

است همان‌طور که در مقدمه به آن اشاره شد یکی از کاربردهای نگاشت شبیه بیکر به‌عنوان نگاشت اولین بازگشت برای نگاشت‌های لورنز غیرتوسیعی مانند نگاشت فوق است [۶-۷-۸-۹]. با استفاده از نگاشت اولین بازگشت می‌توان مشاهده نمود که مقادیر پارامتری برای $\tau = ۰/۵$ یک سیستم آشوبناک است. شکل (۱) یکی از نگاشت‌های فوق را به همراه نگاشت اولین بازگشت[۵] به ازای بازه‌ی واحد نشان می‌دهد. در نواحی پارامتری که مشتق شاخه‌های نگاشت اولین بازگشت بزرگ‌تر یا مساوی ریشه‌ی دوم دو باشد آنگاه نگاشت موردبحث آشوبناک است.



شکل (۱): نگاشت‌های به همراه نگاشت اولین بازگشت

سپاس‌گزاری

نویسنده دوم از صندوق حمایت از پژوهشگران (INSF) بابت پشتیبانی مالی طرح شماره ۹۶۰۱۰۹۷۶ کمال قدردانی و تشکر را دارد.

منابع

[1] Banerjee, S. and Verghese, G.C. (2001). *Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Attractors, Bifurcations, Chaos, and Nonlinear*

Control, IEEE Press, New York.
[2] Bischi, G.L. and Chiarella, .C and Kopel, M. and Szidarovszky, F. (2009). *Nonlinear oligopolies: Stability and bifurcations*, Heidelberg, Springer.
[3] Devaney, R. (1986). *An introduction to chaotic dynamical systems*. The Benjamin, Cummings Publishing Corporation, Menlo Park, California.
[4] Bernardo, M.D and Budd, C.J. and Champneys, A.R. and Kowalczyk, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Applied Mathematical Sciences.
[5] Grosse-Erdmann, K. G. and Manguillot, A. P. (2011). *Linear Chaos*, Springer Verlag, London.
[6] Makrooni, R. and Gardini, L. and Sushko, I. (2015). Bifurcation structures in a family of 1D discontinuos linear-hyperbolic invertible maps, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **25**, 1530039
[7] Makrooni, R. and Khellat, F. and L. Gardini, L. (2015). Border collision and fold bifurcations in a family of one-dimensional discontinuous piecewise smooth maps: Unbounded chaotic sets, *Journal of Difference Equations and Applications*, **21**, 660-695.
[8] Makrooni, R. and Khellat, F. and Gardini, L. (2015). Border collision and fold bifurcations in a family of piecesiwe smooth maps: *Divergence and Bounded Dynamics*, **21**, 791-824.
[9] Makrooni, R. and Abbasi, N. and Pourbarat, M. and Gardini, L. (2015). Robust unbounded chaotic attractors in 1D discontinuous maps, *Chaos Solitons & Fractals*, **77**, 310-318.
[10] Nordmark, A.B. (1991). Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, **145**, 279-297.
[11] Nordmark, A.B. (1997). Universal limit mapping in grazing bifurcations, *Physical Review E*, **55**, 266-270.
[12] Puu, T. and Sushko, I. (2002). *Oligopoly Dynamics, Models and Tools*, Springer Verlag, New York.
[13] Puu, T. Sushko,I. (2006) *Business Cycle Dynamics*, Models and Tools, Springer Verlag, New York.
[14] Tramontana, F. and Gardini, L. and Ferri, P. (2010). The dynamics of the NAIRU model with two switching regimes, *J. Econ. Dyn. Control*, **34**, 681-695.
[15] Tramontana, F. and Westerhoff, F. and Gardini, L. (2010). On the complicated price dynamics of a simple one-dimensional discontinuous financial market model with heterogeneous interacting traders, *J. Econ. Behav. Organ.* **74**, 187-205.

Chaos in Smooth Piecewise Dynamical Systems With One Discontinuous Point

Mehdi Pourbarat*, Neda Abbasi**, Roya Makrooni***

*Department of Mathematics, Shhid Beheshti University, Tehran, Iran

**Mahani Mathematical Research Center, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

***Department of Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

Abstract

In this paper, we provide conditions on the smooth piecewise dynamical systems that guarantee the existence of Devaney chaos. In fact, we show that if f is a generalized semi-baker map with two branches and its derivative greater than or equal to $\sqrt{2}$, then the dynamical system related to that is chaotic in the sense of Devaney. Such conditions on the dynamical systems with more than one discontinues point essentially does not satisfy this result.

***Keywords*:** Dynamical System, Devaney chaos, discontinues point.

Mathematics Subject Classification (2010): 37B99, 37C70.

.