# ابرکارایی بر پایه مدل SBM در تحلیل پوششی داده‌های فازی تعمیم‌یافته

مژگان منصوری کلیبر، علی اشرفی[1]

گروه ریاضی، دانشگاه سمنان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۶/۱۵

**چکیده:** مدل ابرکارایی بر پایه SBM[2] برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای SBM ارائه‌شده است. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی[3]، برای ارزیابی واحدهای دارای ورودی و خروجی‌های غیرقطعی معرفی شده‌اند که در این روش‌ها اغلب از دستاورد $\alpha$- برش استفاده شده است. همچنین در این روش‌ها واحدهای تصمیم‌گیرنده نمونه فازی را نمی‌توان ارزیابی نمود. این مقاله مدل ابرکارایی بر پایه SBM تعمیم‌یافته با داده‌های فازی را معرفی می‌کند که هم دربرگیرنده مدل‌های فازی قدیمی است و هم واحدهای تصمیم‌گیرنده نمونه را ارزیابی می‌کند. همچنین مقاله حاضر یک روش ارزیابی فازی جدید بر پایه بردار پیشنهاد می‌کند. به‌عنوان‌مثال عددی، روش پیشنهادی برای رتبه‌بندی واحدهای کارای سیستم صنعتی به‌کاررفته است.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها[4] (DEA)، واحد تصمیم‌گیرنده نمونه (SDMU)، ابرکارایی، مدل SBM، تحلیل پوششی داده‌های فازی (FDEA).

**رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** ۹۰C۷۰، ۹۰C۹۰

## ۱- مقدمه

مدل‌های کلاسیک DEA واحدهای تصمیم‌گیرنده را به دو گروه کارا و ناکارا تقسیم می‌کنند. واحدهای ناکارا با کسب امتیاز کارایی قابل رتبه‌بندی هستند اما واحدهای کارا با استفاده از این

---

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: a_ashrafi@semnan.ac.ir

2- Slack-Based Measure
3- Fuzzy Data Envelopment Analysis
4- Data Envelopment Analysis

مدل‌ها قابل رتبه‌بندی نمی‌باشند. ازآنجاکه اغلب تصمیم‌گیرنده‌ها درصدد رتبه‌بندی کاملی از واحدها هستند تاکنون روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی واحدها پیشنهاد شده است که یکی از این روش‌ها روش ابرکارایی است. در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شعاعی، ابرکارایی با حذف واحد مورد ارزیابی به‌سادگی قابل دستیابی است [۱]. ولی این روش‌ها نمی‌توانند مستقیماً برای مدل‌های غیرشعاعی به‌کار روند. در مدل‌های غیر شعاعی ابتدا باید واحدهای کارا تعیین شوند سپس مدل DEA به دست آید.

تون در سال ۲۰۰۱ مدل SBM را برای ارزیابی کارایی معرفی کرد [۲]. مدل SBM نمره کارایی بین صفر و یک دارد. علاوه بر این در سال ۲۰۰۲ تون مدل ابرکارایی برای واحدهای کارا تحت مدل SBM را گسترش داد که در آن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا رتبه‌بندی می‌شوند [۳].

در این مطالعات فرض بر این است که ورودی‌ها و خروجی‌ها، داده‌های قطعی می‌باشند. در بعضی موارد، داده‌ها غیرقطعی هستند. برخی از محققان چند مدل فازی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با داده‌های فازی ارائه کردند. کائو و لیو مدل[۱] BCC فازی را معرفی نمودند [۴]. گائو و تاناکا مدل CCR[۲] فازی را با استفاده از تابع عضویت مثلثی متقارن ارزیابی کردند [۵]. لِرتوراسیریکول و همکارانش مدل CCR فازی را با استفاده از اعداد فازی ذوزنقه‌ای تحلیل کردند و ایده‌ی ارتباط قیود به‌عنوان آیتم‌های فازی را مطرح نمودند [۶]. این روش یک کارایی کامل را مطابق با اینکه مقدار کارایی DMU[۳] هدف برابر یا بزرگ‌تر از یک است، پیشنهاد داد. لئون و همکارانش مدل FDEA را با استفاده از عدد فازی LR به دست آوردند [۷]. جهانشاه لو و همکارانش نیز مدل DEA فازی را با استفاده از عدد فازی LR بررسی کردند [۸].

بااین‌وجود هنوز نکات بسیاری جهت توسعه و گسترش وجود دارد مانند نقطه خاص انتخاب‌شده، انواع اعداد فازی، روش $\alpha$-برش و نوع مدل فازی. بعلاوه واحدهای تصمیم‌گیرنده هدف این مدل‌ها به واحدهای درونی وابسته‌اند و DMU نمونه نمی‌تواند برای مدل FDEA ارزشیابی شود. اخیراً مورن روش تحلیل پوششی داده‌های فازی را براساس واحدهای تصمیم‌گیرنده نمونه (SDMU) پیشنهاد نمود [۹].

در این مقاله، موضوع ابرکارایی بر پایه SBM در محیط فازی موردبحث قرار گرفته است و مدل ابرکارایی بر پایه SBM فازی تعمیم‌یافته معرفی شده است. همچنین با روش پیشنهادی می‌توان واحدهای کارا را رتبه‌بندی نمود.

1- Banker, Charnes and Cooper
2- Charnes,Cooper and Rhodes
3- Decision making units

این مقاله شامل ۵ بخش است. در بخش دوم به تعاریف اولیه در مورد DEA، مفاهیم فازی و مدل DEA فازی پرداخته شده و در بخش سوم مدل ابرکارایی بر پایه SBM معرفی شده است. بخش چهارم مدل ابرکارایی بر پایه SBM فازی تعمیم‌یافته را موردبحث قرار داده است. در بخش پنجم مثالی برای نشان دادن روش پیشنهادی بیان می‌شود.

## ۲- مفاهیم و تعاریف مقدماتی:

**تعریف ۱:** تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، یک روش ارزیابی ریاضی است که کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) متجانس با چند ورودی و چند خروجی را محاسبه می‌نماید [۱۰].

فرض بر این است که $n$ واحد تصمیم‌گیرنده به‌صورت $DMU_j \ (j=1,\dots,n)$ داریم که با مصرف ورودی $x_j \in \mathbb{R}^m \underset{\neq}{\geq} 0 \ (j=1,\dots,n)$ بردار خروجی $y_j \in \mathbb{R}^m \underset{\neq}{\geq} 0 \ (j=1,\dots,n)$ را تولید می‌نمایند.

### ۲-۱ مجموعه امکان تولید

مجموعه امکان تولید (PPS) که یکی از تعاریف مهم در DEA است، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{PPS} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \mid \text{تولید می‌شود } \mathrm{x} \geq 0 \text{ توسط } \mathrm{y} \geq 0\}$$

هر تکنولوژی تولید، اصول موضوعه موردنیاز خود را دارد. با توجه به تعریف فوق تکنولوژی‌های تولید متفاوت PPSهای متفاوت تولید می‌کنند. اولین PPS که بر اساس تکنولوژی تولید بازده به مقیاس ثابت تولید می‌شود به مجموعه امکان تولید CCR معروف است [۱۱].

مجموعه امکان تولید CCR بر مبنای اصول موضوعه پنج‌گانه تعریف می‌گردد؛ که به شرح زیر می‌باشند:

۱. اصل شمول مشاهدات.
۲. اصل بی‌کرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت).
۳. اصل تحدب و بسته بودن.
۴. اصل امکان‌پذیری.
۵. اصل کمینه درون‌یابی: این اصل بیان می‌کند که PPS کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که در اصول فوق و اصول حاکم بر تکنولوژی پذیرفته شده صدق می‌کند.

در این صورت PPS، مجموعه منحصربه‌فردی به‌صورت زیر است:

$$PPS_{r_c} = \left\{ (x,y) \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le x, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge y, \quad \lambda_j \ge 0, \quad \forall j = 1,\dots,n \right\}$$

با حذف اصل بازده به مقیاس ثابت از تکنولوژی تولید، مدل BCC به دست می‌آید (PPS متناظر به $T_v$ معروف است):

$$PPS_{r_c} = \left\{ (x,y) \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \le x \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \ge y \quad , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \, , \, \lambda \ge 0 \right\}$$

مدل‌های فوق معروف به مدل‌های شعاعی هستند. دلیل این نام‌گذاری آن است که در مدل‌های با ماهیت ورودی، ورودی‌ها در جهت کارا شدن واحد تصمیم‌گیرنده مورد ارزیابی در امتداد شعاعی به یک نسبت کم می‌شوند و در مدل‌های با ماهیت خروجی، خروجی‌ها در امتداد شعاعی اضافه می‌شوند [۱۲].

## ۲-۲ مدل SBM

مدل‌های دیگری نیز در DEAمطرح شده‌اند که معروف به مدل‌های غیرشعاعی می‌باشند که از جمله این مدل‌ها، مدل SBM است که به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\rho^* = Min \; & \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{ip}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{rp}} \\
s.t \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip}, \; i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}, \; r = 1,\dots,s, \\
& \lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& s_i^- \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& s_r^+ \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s,.
\end{aligned} \tag{1}$$

در اینجا فرض بر این است که $x > 0$ و اگر $x_{ip} = 0$، جمله مربوط یعنی $s_i^- / x_{ip}$ حذف می‌گردد.
اگر $y_{rp} = 0$ آنگاه قرار می‌دهیم $y_{rp} = \varepsilon$. ثابت می‌شود $1 \le \rho^* < 0$که با افزودن قید $1 = \lambda.1$

مدل SBM با بازده به مقیاس متغیر حاصل می‌گردد. مدل (۱) با تبدیلات چارنز-کوپر قابل‌تبدیل به مدل خطی است که در زیر آمده است:

$$
\begin{aligned}
\tau^* = Min\ \ & t - \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^- / x_{ip} \\
s.t\ \ & \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j x_{ij} + s_i^- = t x_{ip},\ i = 1,\dots,m, \\
& \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j y_{rj} - s_r^+ = t y_{rp},\ \ r = 1,\dots,s, \\
& 1 = t + \tfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^+ / y_{rp}\ , \\
& \Lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,n, \\
& s_i^- \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m, \\
& s_r^+ \geq 0, \qquad r = 1,\dots,s\,, \\
& t > 0.
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

## ۲ -۳ مفاهیم فازی

نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه‌وتحلیل مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه توسعه و تعمیم نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌هاست. حال فرض کنید برای هر یک از خواص غیرقطعی که برای اعضای یک مجموعه مشخص می‌شود بتوانیم یک درجه عضویت بین ۰ و ۱ مشخص کنیم که این درجه بیانگر میزان دارا بودن آن عضو از خاصیت موردنظر باشد. در این حالت می‌توانیم اعضای این مجموعه را همراه با درجه عضویت برای هر عضو مشخص کنیم [۱۳]. به‌عنوان‌مثال: $\tilde{A} = \{(a,0/2),(b,0),(c,0/6),(f,1),(e,0/99)\}$.

در این صورت $b$ به‌طور یقین در $\tilde{A}$ نیست و $f$ به‌طور یقین در $\tilde{A}$ قرار دارد، درحالی‌که $a$، $c$ و $e$ به ترتیب به میزان ۰/۲ و ۰/۶ و ۰/۹۹ عضوی از $\tilde{A}$ هستند. در واقع $\tilde{A}$ نمایشی از یک مفهوم فازی در مورد عناصر $X$ است.

**تعریف ۲: مجموعه فازی:** فرض کنید $X$ مجموعه‌ای ناتهی باشد، هر زیرمجموعه فازی از $X$ توسط یک تابع $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ به نام تابع عضویت معین می‌شود. $\mu_A(x)$ نشان‌دهنده میزان تعلق داشتن $x$ به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است.

**تعریف ۳: $\alpha$ – برش:** برای زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از $X$ برش‌های $\alpha$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

الف) $\alpha$- برش ضعیف: برای $\alpha \in (0,1]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X \big| \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

ب) $\alpha$- برش قوی: برای $\alpha \in (0,1]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha = \{x \in X \big| \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

$$\tilde{x}_{ij}^{\alpha} = [a,b] = \left[\, \tilde{x}_{ij_\alpha}^{l}, \tilde{x}_{ij_\alpha}^{u} \,\right], \tilde{A}_\alpha = \{x \in X \big| \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

$\tilde{A}_\alpha$ همان $\alpha$ – برش است.

**تعریف ۴: اعداد فازی *LR*:** اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی به‌صورت زیر باشد:

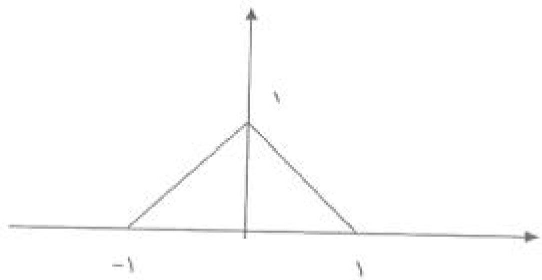
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\dfrac{m-x}{l}) & x \leq m \\ R(\dfrac{x-m}{u}) & x > m \end{cases} \quad (3)$$

که در آن $R$ و $L$ توابع غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ و $L(0) = R(0)$ آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی $LR$ نامیده و با نماد $\tilde{A} = (l,m,u)_{LR}$ نشان می‌دهند. $m$ را مقدار نمایی یا میانه و $l$ و $u$ را به ترتیب پهنای چپ و راست می‌نامند. $R$ و $L$ توابع مرجع نامیده می‌شوند.

**تعریف ۵: عدد فازی *L*:** اگر $\tilde{A} = (l,m,u)_{LR}$ و $L = R$ را یک عدد فازی $L$ نامیده و با نماد $\tilde{A} = (l,m,u)_L$ نشان می‌دهند.

**تعریف ۶: تابع عضویت:** فرض کنیم $X$ مجموعه‌ای ناتهی باشد، هر زیرمجموعه فازی از $X$ توسط یک تابع $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ به نام تابع عضویت معین می‌شود. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان‌دهنده میزان تعلق داشتن $x$ به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است.

**تعریف ۷: عدد فازی مثلثی:** در اعداد فازی $LR$ اگر $L$ و $R$ توابع خطی به‌صورت شکل (۱) باشند، آن را مثلثی می‌نامند و توسط سه‌تایی $\tilde{N} = (l,m,u)$ نمایش می‌دهند که در آن $m$ مقدار مرکزی یا ممکن‌ترین مقدار $(\mu_{\tilde{N}}(m) = 1)$ و $L$ و $U$ ترتیب گستره چپ و راست می‌باشند.



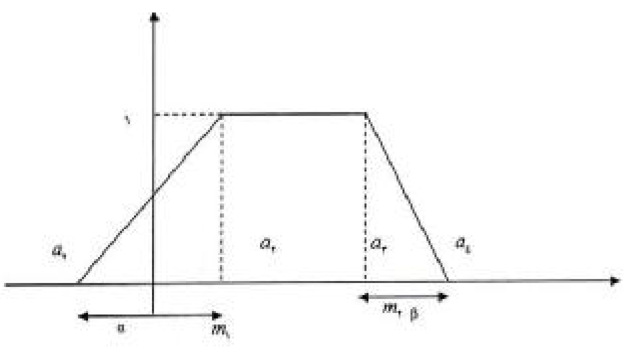

**شکل (۱)**: عدد فازی مثلثی $\tilde{N}=(l,m,u)$

عدد فازی مثلثی را به‌صورت $\tilde{N}=(x^l,x^m,x^u)$ نیز نشان می‌دهند که در آن $x^m$ مقدار مرکزی عدد $(\mu_{\tilde{N}}(x^m)=1)$، $x^l$ مقدار بدبینانه یا کمترین مقدار $(\mu_{\tilde{N}}(x^l)=0)$ و $x^u$ مقدار خوش‌بینانه یا بیشترین مقدار $(\mu_{\tilde{N}}(x^u)=0)$ است.

تابع عضویت برای عدد فازی مثلثی مانند $\tilde{A}$ به‌صورت ذیل است:

$$\mu_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{m-1} & 1\le x\le m\\ \dfrac{u-x}{u-m} & m\le x\le u\\ 0 & \text{سایرنقاط}\end{cases} \quad (4)$$

**تعریف ۸: عدد فازی ذوزنقه‌ای:** چهارتایی مرتب $\tilde{M}=(m_1,m_2,l,u)$ که در آن $m_1$ و $m_2$ ممکن‌ترین مقدار یعنی $\forall x\in[m_1,m_2];\mu_{\tilde{M}}(x)=1$.




**شکل (۲)**: عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{M}=(m_1,m_2,l,u)$

$l$ و $u$ به ترتیب گستره چپ و راست $\tilde{M}$ هستند. عدد فازی ذوزنقه‌ای را به‌صورت چهارتایی مرتب $\tilde{M}=(x^{m_1}, x^{m_2}, x^l, x^u)$ در شکل (۲) نیز نشان می‌دهند که در آن $x^{m_1}$ و $x^{m_2}$ ممکن‌ترین مقدار یعنی $\forall x\in[x^{m_1}, x^{m_2}]; \mu_{\tilde{M}}(x)=1$. $x^l$ مقدار بدبینانه یا کمترین مقدار $\mu_{\tilde{M}}(x^l)=0$ و $x^u$ مقدار خوش‌بینانه یا بیشترین مقدار $\mu_{\tilde{M}}(x^u)=0$ است.

تابع عضویت برای عدد فازی ذوزنقه‌ای مانند $\tilde{M}$ به‌صورت ذیل است.

$$\mu_i(x)=\begin{cases} 0 & x\le l \\ \dfrac{m_1-x}{m_1-l} & l\le x\le m_1 \\ 1 & m_1\le x\le m_2 \\ \dfrac{x-m_2}{u-m_2} & m_2\le x\le u \\ 0 & x\ge u \end{cases} \qquad (5)$$

## ۲-۴ مدل تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های فازی

چارنز، کوپر و رودز مدل تحلیل پوششی داده‌ها را برای سنجش کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های قطعی توسعه دادند [۱۱]. این بخش در پی مدلی است که مدل CCR را به یک چارچوب فازی گسترش دهد.

فرض کنید مجموعه‌ای با $n$ واحد تصمیم‌گیرنده دارای $m$ ورودی فازی $\tilde{X}_{ij}$ که در آن $i=1,\dots,m$ و $s$ خروجی فازی $\tilde{Y}_{rk}$ که در آن $r=1,\dots,s$ باشد؛ به‌عبارت‌دیگر ورودی‌ها و خروجی‌ها نسبتاً شناخته شده هستند و به‌دقت اندازه‌گیری نشده‌اند. می‌توان ورودی‌ها و خروجی‌های فازی را به‌وسیله مجموعه‌های فازی محدب با توابع عضویت $\mu_{\tilde{X}_{ij}}$ و $\mu_{\tilde{Y}_{rk}}$ به ترتیب ارائه کرد. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها توسط مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی ارائه می‌شوند. نمره کارایی ارزیابی‌شده از مدل باید فازی باشد زیرا این مدل‌ها شامل پارامترهای فازی هستند. با استفاده از $\alpha$–برش‌ها می‌توان ورودی‌ها و خروجی‌ها را با سطح متفاوتی از بازه اطمینان ارائه کرد. مدل DEA فازی به خانواده‌ای از مدل‌های DEA قطعی با $\alpha$- برش‌های متفاوت تبدیل می‌شود [۱۴].

## ۳- ارزیابی کارایی با استفاده از مدل ابرکارایی بر پایه SBM

مدل SBM یک مدل ارزیابی کارایی غیر شعاعی است. تفاوت مدل SBM با دیگر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها این است که این مدل مبتنی بر متغیرهای کمکی است. اساس کار مدل

ابرکارایی، حذف واحد کارای مورد ارزیابی و اجرای مدل برای واحدهای دیگر است؛ بنابراین، برای واحدهای کارا، مرز ابر کارا (و نقطه مرجع) متفاوت از مرز کارای اصلی است و هر واحد، مرز ابرکارایی منحصربه‌فرد دارد. مدل ابرکارایی SBM، فقط می‌تواند برای محاسبه نمرات ابرکارایی SBM به‌کار رود. فرض کنید $n$ واحد تصمیم‌گیرنده به‌صورت $DMU_j \ \ (j=1,\dots,n)$ داریم که با مصرف ورودی $x_{ij} \ \ (j=1,\dots,n)$ خروجی $y_{rj} \ \ (j=1,\dots,n)$ را تولید می‌نمایند. با فرض این‌که DMUo یک واحد کاراست، ابرکارایی SBM این واحد به‌صورت مدل زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$
\begin{aligned}
&\delta_o^* = \min \delta_o = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io}/x_{io}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro}/y_{ro}} \\
&s.t.\ \bar{x}_{io} \geq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij}, \ i=1,\dots,m, \\
&\quad \bar{y}_{ro} \leq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj}, \ r=1,\dots,s, \\
&\quad \bar{x}_{io} \geq x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\
&\quad \bar{y}_{ro} \leq y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s, \\
&\quad \lambda_j,\ \bar{y}_{ro} \geq 0, \ \ j=1,\dots,n, \ j\neq o, r=1,\dots,s.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر مدل (۶) به مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\tau_o^* = \min \tau_o = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{io}/x_{io} \\
&s.t.\ \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{m} \hat{y}_{ro}/y_{ro} = 1, \\
&\quad \hat{x}_{io} \geq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \Lambda_j x_{ij}, \ i=1,\dots,m, \\
&\quad \hat{y}_{ro} \leq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \Lambda_j y_{rj}, \ r=1,\dots,s, \\
&\quad \hat{x}_{io} \geq t x_{io}, \qquad i=1,\dots,m, \\
&\quad \hat{y}_{ro} \leq t y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s, \\
&\quad \lambda_j,\ \bar{y}_{ro} \geq 0, \ \ j=1,\dots,n, \ j\neq o, r=1,\dots,s, t>0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$(\tau^*, \hat{x}^*, \hat{y}^*, \Lambda^*, t^*)$ جواب بهینه مدل فوق است. پس جواب بهینه مدل ابرکارایی SBM، از طریق $\tau^* = \delta^*, \ \ \frac{\hat{x}^*}{t^*} = \bar{x}^*, \ \ \frac{\hat{y}^*}{t^*} = \bar{y}^*, \ \ \frac{\Lambda^*}{t^*} = \lambda^*.$ به دست می‌آید.

مدل معرفی شده تحت بازده به مقیاس ثابت است. با اضافه کردن محدودیت $\sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j = 1$ به مدل (۷) می‌توان مدل را به حالت بازده به مقیاس متغیر توسیع داد. در مجموع، این مدل با اصلاح محدودیت‌های ورودی و خروجی به‌صورت ورودی محور و خروجی محور قابل تعریف است.

مدل ابرکارایی بر پایه SBM، ورودی محور:

$$
\begin{aligned}
\delta_I^* = \min \delta_o &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io} / x_{io} \\
s.t.\ \bar{x}_{io} &\geq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij}, \ i = 1,\dots,m, \\
\bar{y}_{ro} &\leq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj}, \ r = 1,\dots,s, \\
\bar{x}_{io} &\geq x_{io}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
\bar{y}_{ro} &= y_{ro}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
\lambda_j &\geq 0, \qquad j = 1,\dots,n, \ j \neq o.
\end{aligned} \tag{8}
$$

مدل ابرکارایی بر پایه SBM، خروجی محور:

$$
\begin{aligned}
\delta_O^* = \min \delta_o &= \frac{1}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro} / y_{ro}} \\
s.t.\ \bar{x}_{io} &\geq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij}, \ i = 1,\dots,m, \\
\bar{y}_{ro} &\leq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj}, \ r = 1,\dots,s, \\
\bar{x}_{io} &= x_{io}, \qquad i = 1,\dots,m, \\
0 \leq \bar{y}_{ro} &\leq y_{ro}, \qquad r = 1,\dots,s, \\
\lambda_j &\geq 0, \qquad j = 1,\dots,n, \ j \neq o.
\end{aligned} \tag{9}
$$

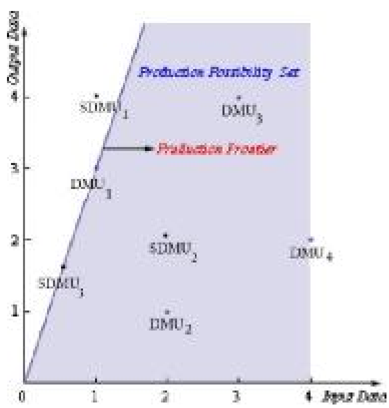
## ۴- ارزیابی کارایی با استفاده از مدل ابرکارایی بر پایه SBM تعمیم‌یافته با داده‌های فازی

در این بخش هدف توسعه مدل ابرکارایی SBM با استفاده از DEA فازی تعمیم‌یافته است.

**تعریف ۹:** فرض کنید DMU یک واحد تصمیم‌گیری در مسئله تصمیم‌گیری است. همه داده‌هایی که داده‌های ورودی و خروجی مشابهی با DMU دارند، بر اساس این مسئله تصمیم‌گیری، واحد تصمیم‌گیری نمونه SDMU نامیده می‌شوند [۱۵].

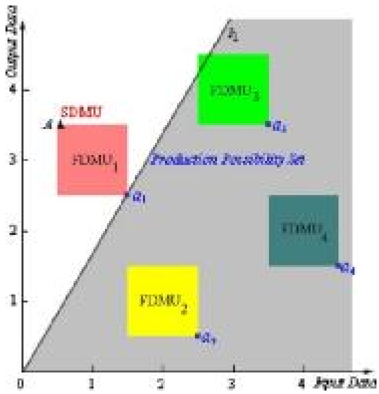
تمایز و برتری میان SDMU و DMU به‌صورت زیر ارائه‌شده است:

- DMU باید در مجموعه امکان تولید باشد درحالی‌که ممکن است SDMU بیرون از مجموعه امکان تولید باشد.
- مقدار کارایی DMU باید با ۱ برابر یا زیر ۱ باشد. درحالی‌که مقدار کارایی SDMU می‌تواند برابر، کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از ۱ باشد.
- DMU باید در محدودیت‌ها ظاهر شود درحالی‌که SDMU می‌تواند در محدودیت‌ها ظاهر و یا در میان محدودیت‌ها نباشد.
- مجموعه‌های مرجع در مدل FDEA، FDMU های کارا هستند درحالی‌که در روش تعمیم‌یافته می‌توانند FDMUهای کارا، FDMU های نرمال، FDMUهای ناکارا، FDMUهای خاص و دیگر FDMUها باشند. این ۵ نوع DMU، DMUهای نمونه فازی (FSDMU) نامیده می‌شوند.




**شکل (۳)**: SDMU در مجموعه امکان تولید CCR

شکل (۳)، SDMU در مجموعه امکان تولید CCR را نشان می‌دهد. برای مدل‌های تحلیل پوشش داده‌ها، تعدادی از مطالعات پی بردند مقدار کارایی بیشتر از ۱ است. این وضعیت ناشی از این حقیقت است که همه محدودیت‌ها شامل DMU هدف، DMU بدتر را انتخاب می‌کنند، درحالی‌که DMU هدف DMUهای بهتر را برای ارزیابی انتخاب می‌کند؛ بنابراین، DMU ارزیابی‌شده یک SDMU است و نه یک DMU.




**شکل (۴)**: تفاوت SDMU و DMU

شکل (۴)، مدل CCR فازی را با چهار DMU نشان می‌دهد. اگر فرض کنیم DMU هدف، $FDMU_1$ باشد. طبق روش رتبه‌بندی ساعتی و همکاران [۱۶]، همه‌ی واحدهای فازی محدودیت‌ها، بدترین نقاط مربعی را انتخاب خواهند کرد و $FDMU_1$ هدف، از بهترین نقطه‌ی A برای ارزیابی استفاده می‌کند. پس نقطه‌ی A یک SDMU است و نه یک DMU.

بعد از جانشینی FDMUo با FSDMU*o*، مدل ابر کارایی SBM به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\delta_o^* = \min \delta_o = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{io} / x_{So}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro} / y_{So}}$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \bar{x}_{io} \geq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij},\ \ i = 1,\dots, m, \\ & \bar{y}_{ro} \leq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj},\ \ r = 1,\dots, s, \\ & \bar{x}_{io} \geq x_{io}, \qquad i = 1,\dots, m, \\ & \bar{y}_{ro} \leq y_{ro}, \qquad r = 1,\dots, s, \\ & \lambda_j,\ \bar{y}_{ro} \geq 0,\ \ j = 1,\dots, n,\ \ j \neq o, r = 1,\dots, s. \end{aligned} \tag{10}$$

مدل فوق را می‌توان به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی مطرح کرد.

$$
\begin{aligned}
&\tau_{go}^{*}=\min \tau_{o}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\widehat{x}_{io}\Big/x_{So}\\
&s.t.\ \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{m}\widehat{y}_{ro}\Big/y_{So}=1,\\
&\quad \widehat{x}_{io}\geq \sum_{j=1,\, j\neq o}^{n}\Lambda_{j}x_{ij},\ i=1,\dots,m,\\
&\quad \widehat{y}_{ro}\leq \sum_{j=1,\, j\neq o}^{n}\Lambda_{j}y_{rj},\ r=1,\dots,s,\\
&\quad \widehat{x}_{io}\geq tx_{io}, \qquad i=1,\dots,m,\\
&\quad \widehat{y}_{ro}\leq ty_{ro}, \qquad r=1,\dots,s,\\
&\quad \lambda_{j},\ \overline{y}_{ro}\geq 0,\ \ j=1,\dots,n,\ j\neq o, r=1,\dots,s, t>0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

به‌طور مشابه، مدل ابرکارایی SBM ورودی محور و خروجی محور نیز به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

مدل ابرکارایی بر پایه SBM فازی تعمیم‌یافته (ورودی محور):

$$
\begin{aligned}
&\delta_{gI}^{*}=\min \delta_{o}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{x}_{io}\Big/x_{So}\\
&s.t.\ \overline{x}_{io}\geq \sum_{j=1,\, j\neq o}^{n}\lambda_{j}x_{ij},\ i=1,\dots,m,\\
&\quad \overline{y}_{ro}\leq \sum_{j=1,\, j\neq o}^{n}\lambda_{j}y_{rj},\ r=1,\dots,s,\\
&\quad \overline{x}_{io}\geq x_{io}, \qquad i=1,\dots,m,\\
&\quad \overline{y}_{ro}=y_{ro}, \qquad r=1,\dots,s,\\
&\quad \lambda_{j}\geq 0, \qquad j=1,\dots,n,\ j\neq o.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

مدل ابرکارایی بر پایه SBM فازی تعمیم‌یافته (خروجی محور):

$$\delta_{gO}^{*} = \min \delta_o = \frac{1}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ro} \big/ y_{So}}$$
$$s.t.\ \bar{x}_{io} \geq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j x_{ij},\ i = 1,\dots,m,$$
$$\bar{y}_{ro} \leq \sum_{j=1, j\neq o}^{n} \lambda_j y_{rj},\ r = 1,\dots,s, \qquad (13)$$
$$\bar{x}_{io} = x_{io}, \qquad i = 1,\dots,m,$$
$$0 \leq \bar{y}_{ro} \leq y_{ro}, \qquad r = 1,\dots,s,$$
$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,n,\ j \neq o.$$

FSDMU با یکی از SDMUها و FDMUi با یکی از DMUiها جانشین می‌شوند. زمانی که مدل به یک مدل قطعی تبدیل می‌شود، می‌تواند با استفاده از نرم‌افزار مناسب حل شود. SDMU یا DMUi انتخاب‌شده می‌توانند هر نقطه‌ای از محدوده باشند. میان این نقاط، ۷ نقطه خاص زیر موجود است: بهترین DMU، بدترین DMU، بیشترینDMU ، کمترین DMU، DMU مرکز، DMU ۱-برش و DMU رأسی [۱۵]. هنگام محاسبه FDMU هدف در مدل FDEA، بهترین یا بدترین واحد انتخاب می‌شوند و ۵ واحد باقی‌مانده هرگز انتخاب نمی‌شوند. در روش پیشنهادی، ۷ واحد ویژه و یا خاص هر DMU که تصمیم‌گیرنده ترجیح می‌دهد، می‌توانند انتخاب شوند.

**تعریف ۱۰:** در مدل فازی تعمیم‌یافته، مجموعه‌ای که شامل واحدهای FSDMUها هستند و مقادیر کارایی مشابه دارند، سطح شبه کارایی نامیده می‌شوند.

بعد از ارزیابی با این روش، همه مقادیر ممکن کارایی مدل را می‌توان به‌آسانی اثبات کرد که با مقدار کارایی خط پیوند بهترین و بدترین DMUهای FSDMU برابر هستند؛ بنابراین هنگامی‌که واحدهای نمونه مدل تعمیم‌یافته ارزیابی می‌شود، همه واحدهای FSDMU را می‌توان به‌وسیله خط پیوند بهترین و بدترین واحدهای FSDMU و همه FDMUهای خط پیوند بهترین و بدترین واحدهای FDMU جایگزین شوند؛ بنابراین، روش ارزیابی فازی تعمیم‌یافته را می‌توان به روش ارزیابی با DMUهای برداری تغییر داد. طول بردار فاصله بهترین واحد تا بدترین واحد است و جهت از بدترین به بهترین واحد است.

**تعریف ۱۱:** اگر مقدار کارایی SDMU ۱ باشد، هنگامی‌که همه مقادیر FDMUi $(i = 1,\dots,n)$ به‌وسیله نقطه انتهایی DMUهای بردار $\vec{v}_{w_i} + k(\vec{v}_{w_i} - \vec{v}_{B_i})$ جایگزین می‌شوند، SDMU مدل، کارای سطح $k$ $(0 \leq k \leq 1)$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۱۲:** در مدل تعمیم‌یافته، مقدار کارایی سطح $\lambda$، SDMU به‌عنوان مقدار کارایی آن معین می‌شود. هنگامی‌که همه مقادیر FDMUi $(i = 1, \ldots, n)$ با DMUهای نقطه انتهایی بردار $\vec{v}_{w_i} + \lambda(\vec{v}_{w_i} - \vec{v}_{B_i})$ جایگزین می‌شوند. طبق تعریف اگر SDMU، کارای سطح $k$ باشد، سپس برای $1 \geq \lambda > k$ اختیاری، کارایی سطح $\lambda$ SDMU کوچک‌تر از ۱ است. برای $0 \leq \lambda < k$ اختیاری، مقدار کارایی سطح $\lambda$ SDMU بزرگ‌تر از ۱ است [۹].

**مثال ۱**: کارایی داده‌های جدول (۱) با استفاده از نقطه برداری در جدول (۲) نشان داده‌شده است.

**جدول (۱)**: داده‌های (ورودی و خروجی) مثال ۱

| DMU | ورودی | خروجی |
|---|---|---|
| $A$ | (۲, ۰/۵) | (۱, ۰/۳) |
| $B$ | (۳, ۰/۵) | (۳, ۰/۷) |
| $C$ | (۳, ۰/۶) | (۳, ۰/۴) |
| $D$ | (۵, ۱) | (۴, ۱) |
| $E$ | (۵, ۰/۵) | (۲, ۰/۲) |

**جدول (۲)**: رتبه‌بندی واحدهای مثال ۱

| DMU | ابر کارایی | رتبه |
|---|---|---|
| $A$ | ناکارا | |
| $B$ | ۱/۵ | ۱ |
| $C$ | ناکارا | |
| $D$ | ناکارا | |
| $E$ | ۱/۲ | ۲ |

## ۵- مثال عددی

در این بخش مثال عددی برای توضیح روش پیشنهادی ارائه‌شده است.

**مثال ۲**: کارایی سیستم صنعتی متغیر [۱۷] با روش پیشنهادی مقاله ارزیابی‌شده است. ورودی‌ها و خروجی‌های ۱۲ واحد تصمیم‌گیری در جدول (۳) نشان داده‌شده است. برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها، اعداد فازی مثلثی هستند. جدول (۴) نتایج حاصل را ارائه کرده است.

**جدول (۳)**: اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌های ۱۲ واحد تصمیم‌گیری

| واحدهای تصمیم‌گیرنده | ورودی‌ها | | خروجی‌ها | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | سرمایه و هزینه عملیاتی | فضای موردنیاز | کیفیت | کار در فرآیند | تعداد تأخیر | محصول |
| ۱ | (۱۶/۱۷,۱۷ /۰۲, ۱۷/۸۷) | ۵ | ۴۲ | (۴۳/۰,۴۵/۳, ۴۷/۶) | (۱۳/۵, ۱۴/۲, ۱۴/۹) | (۲۸/۶,۳/۰۱, ۳۱/۶) |
| ۲ | (۱۵/۶۴, ۱۶/۴۶, ۱۷/۲۸) | ۴/۵ | ۳۹ | (۳۸/۱,۴۰/۱, ۴۲/۱) | (۱۲/۴, ۱۳/۰, ۱۳/۷) | (۲۸/۳, ۲۹/۸, ۳۱/۳) |
| ۳ | (۱۱/۱۷, ۱۱/۷۶, ۱۲/۳۵) | ۶ | ۲۶ | (۳۷/۶, ۳۹/۶, ۴۱/۶) | (۱۳/۱, ۱۳/۸, ۱۴/۵) | (۲۳/۳, ۲۴/۵, ۲۵/۷) |
| ۴ | (۹/۹۹,۱۰/۵۲, ۱۱/۰۵) | ۴ | ۲۲ | (۳۴/۲, ۳۶/۰, ۳۷/۸) | (۱۰/۷, ۱۱/۳, ۱۱/۹) | (۲۳/۸, ۲۵/۰,۳/۲۶ ) |
| ۵ | (۹/۰۳, ۹/۵۰, ۹/۹۸) | ۳/۸ | ۲۱ | (۳۲/۵, ۳۴/۲, ۳۵/۹) | (۱۱/۴, ۱۲/۰, ۱۲/۶) | (۱۹/۴, ۲۰/۴, ۲۱/۴) |
| ۶ | (۴/۵۵, ۴/۷۹, ۵/۰۳) | ۵/۴ | ۱۰ | (۱۹/۱, ۲۰/۱, ۲۱/۱) | (۴/۸,۵/۰, ۳) | (۱۵/۷, ۱۶/۵, ۱۷/۳) |
| ۷ | (۵/۹۰, ۶/۲۱, ۶/۵۲) | ۶/۲ | ۱۴ | (۲۵/۲, ۲۶/۵, ۲۷/۸) | (۶/۷, ۷/۰, ۷/۴) | (۱۸/۷, ۱۹/۷, ۲۰/7) |
| ۸ | (۱۰/۵۶ ۱۱/۱۲, ۱۱/۶۸) | ۶ | ۲۵ | (۳۴/۱, ۳۵/۹, ۳۷/۷) | (۸/۶, ۹/۰, ۹/۵) | (۲۳/۵, ۲۴/۷, ۲۵/۹) |
| ۹ | (۳/۴۹, ۳/۶۷, ۳/۸۵) | ۸ | ۴ | (۱۶/۵, ۱۷/۴, ۱۸/۳) | (۰/۱,۰/۱,۰/۱) | (۱۷/۲, ۱۸/۱, ۱۹/۰) |
| ۱۰ | (۸/۴۸, ۸/۹۳, ۹/۳۸) | ۷ | ۱۶ | (۳۲/۶, ۳۴/۳, ۳۶/۰) | (۶/۲, ۶/۵, ۶/۸) | (۱۹/۶, ۲۰/۶, ۲۱/۶) |
| ۱۱ | (۱۶/۸۵, ۱۷/۷۴, ۱۸/۶۳) | ۷/۱ | ۴۳ | (۴۳/۳, ۴۵/۶, ۴۷/۹) | (۱۳/۳, ۱۴/۰, ۱۴/۷) | (۲۹/۵, ۳۱/۱, ۳۲/۷) |
| ۱۲ | (۱۴/۱۱, ۱۴/۸۵, ۱۵/۵۹) | ۶/۲ | ۲۷ | (۳۶/۸, ۳۸/۷, ۴۰/۶) | (۱۳/۱, ۱۳/۸, ۱۴/۵) | (۲۴/۱, ۲۵/۴, ۲۶/۷) |

**جدول (۴)**: نتایج مثال ۲ با استفاده از مدل پیشنهادی

*DMU*

| واحدهای تصمیم‌گیرنده | بدترین | بهترین | مرکزی | بیشترین | کمترین | برش ۱- | رتبه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱/۰۱۶۱۳۲ | ۱/۰۱۶۶۶۳ | ۱/۰۱۶۳۸۵ | ۱/۰۱۶۶۰۹ | ۱/۰۱۶۱۸۶ | ۱/۰۱۶۳۸۵ | ۶ |
| ۲ | ۱/۰۳۱۵۸۳ | ۱/۰۳۱۸۴۵ | ۱/۰۳۱۶۵۸ | ۱/۰۳۱۸۴۵ | ۱/۰۳۱۵۸۳ | ۱/۰۳۱۶۵۸ | ۳ |
| ۳ | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | |
| ۴ | ۱/۰۳۱۰۵۳ | ۱/۰۳۱۱۶۲۹ | ۱/۰۳۰۸۳۱ | ۱/۰۳۱۵۲۹ | ۱/۰۳۱۱۵۲ | ۱/۰۳۰۸۳۱ | ۴ |
| ۵ | ۱/۰۵۵۸۶۱ | ۱/۰۵۳۷۹۴ | ۱/۰۵۵۰۶۱ | ۱/۰۵۴۳۹۸ | ۱/۰۵۵۴۲۰ | ۱/۰۵۵۰۶۱ | ۲ |
| ۶ | ۱/۰۱۱۰۱۹ | ۱/۰۱۰۱۳۰ | ۱/۰۱۰۱۹۱ | ۱/۰۰۹۴۶ | ۱/۰۱۱۲۰۳ | ۱/۰۱۰۱۹۱ | ۷ |
| ۷ | ۱/۰۲۸۸۸۱ | ۱/۰۲۸۳۶۶ | ۱/۰۲۸۵۷۰ | ۱/۰۲۸۵۳۰ | ۱/۰۲۸۷۱۷ | ۱/۰۲۸۵۷۰ | ۵ |
| ۸ | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | |
| ۹ | ۱/۱۱۵۸۶۲ | ۱/۱۱۶۴۴۶ | ۱/۱۱۶۲۲۱ | ۱/۱۱۷۴۹۲ | ۱/۱۱۴۸۱۵ | ۱/۱۱۶۲۲۱ | ۱ |
| ۱۰ | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | |
| ۱۱ | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | |
| ۱۲ | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | ناکارا | |

نتایج حاصل با به‌کارگیری نرم‌افزار لینگو در جدول ۴ نشان می‌دهد که با جایگزینی DMU های مناسب به‌سادگی می‌توان ابرکارایی واحدهای فازی را ارزیابی نمود. نتایج حاصل بیان‌گر این است که DMU نهم بهترین رتبه را نسبت به دیگر واحدها در تمامی حالات داراست. DMU های سوم، هشتم، دهم، یازدهم و دوازدهم نیز ناکارا می‌باشند. همچنین رتبه واحدهای تولیدی کارا به ترتیب به‌صورت زیر است:

$$DMU_{۹} \succ DMU_{۵} \succ DMU_{۲} \succ DMU_{۴} \succ DMU_{۷} \succ DMU_{۱} \succ DMU_{۶} \,.$$

## نتیجه‌گیری

در دنیای واقعی مسائلی وجود دارد که دارای پارامترهای فازی هستند. در این مقاله یکی از مدل‌های DEA (ابرکارایی SBM) برای تعیین کارایی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های فازی ارائه‌شده است. مدل ابرکارایی SBM فازی تعمیم‌یافته، توسیع مدل SSBM فازی است که نه‌تنها می‌تواند DMU های درونی را ارزیابی کند، بلکه می‌تواند DMU های نمونه را نیز ارزیابی کند. بسط و استفاده از اعداد فازی متفاوت در یک مدل فازی با استفاده از اجرای تنها یک مدل باعث کلی شدن روش تعمیم‌یافته شده است. روش تعمیم‌یافته را می‌توان جهت ارزیابی واحدهای با داده‌های بازه‌ای نیز به کار برد. روش ارزیابی براساس بردار یک روش ارزیابی مؤثر است که نه‌تنها روش‌های ارزیابی قدیمی فازی را بهبود می‌بخشد، بلکه همچنین می‌توان از آن‌ها برای ارزیابی مدل‌ها با داده‌های بازه‌ای و مدل‌ها با داده‌های تصادفی استفاده کرد. در انتها مثال عددی برای ارزیابی کارایی با استفاده از مدل پیشنهادی و رتبه‌بندی واحدها ارائه‌شده است.

## منابع


[1] Andersen, P. and Petersen, N.C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science*, **39**, 1261–1264.

[2] Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, **130**, 498–509.

[3] Tone, K. (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, **143**, 32–41.

[4] Kao, C. and Liu, S.T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, **113**, 427–437.

[5] Guo, P. and Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: A Perceptual evaluation method, *Fuzzy sets and systems*, **119**, 149-160.

[6] Lertworasirikul, S. Shu-Cherng, F. and Joines, A.J. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): a possibility approach, *Fuzzy Sets and Systems*, **139**, 379–394.

[7] Leon, T. Liern, V. and Ruiz, J.L. (2003). A fuzzy mathematical programming approach to the assessment of efficiency with DEA models, *Fuzzy Sets and Systems*, **139**, 407–419.

[8] Jahanshahloo, G. R. Junior, H. V. Hosseinzadeh Lotfi, F. and Akbarian, D. (2007). A new DEA ranking system based on changing the reference set, *European Journal of Operational Research*, **181**, 331–337.

[9] Muren, Z. and Cui, W. (2014). Generalized fuzzy data envelopment analysis methods, *Applied Soft Computing*, **19**, 215-225.

[10] Cooper, W.W. Seiford, L.M. and Tone, K. (2000). *Data envelopment analysis, a comprehensive text with models application references and DEA- solver software*, Boston: Klawer Academic Publishers.

[11] Charnes, A. Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, **2**, 429–444.

[12] Banker, R. D. Charnes, A. and Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, *Management Science*, **30**, 1078–1092.

[13] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28.

[14] Kao, C. and Liu, S.T. (2004). Predicting bank performance with financial forecasts: A case of Taiwan commercial banks, *Journal of Banking & Finance*, **28**, 2353–2368.

[15] Wei, Q.L. and Yan, H. (2010). A data envelopment analysis (DEA) evaluation method based on sample decision making units, *International Journal of Information Technology & Decision Making*, **9**, 601–624.

[16] Saati, S.M. Memariani, A. and Jahanshahloo, G.R. (2002). Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **1**, 255–267.

[17] Liu, S.T. (2008). A fuzzy DEA/AR approach to the selection of Flexible manufacturing systems, *Computers and Industrial Engineering*, **54**, 66-76.

[18] Charnes, A. and Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functional, *Naval Research Logistics Quarterly*, **15**, 333–334.

[19] Chen, C. (2013). Super efficiency or super inefficiencies? Insights from a joint computation model for slacks-based measure in DEA, *European Journal of Operational Research*, **226**, 258-267.

[20] Azizi, H. Kordrostami, S. and Amirteimoori, A. (2015). Slacks-based measures of efficiency in imprecise data envelopment analysis: An approach based on data envelopment analysis with double frontiers, *Computers & Industrial Engineering*, **79**, 42-51.

[21] Du, J. Liang, L. and Zhu, J. (2010). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis: A comment, *European Journal of Operational Research*, **204**, 694-697.

[22] Zhu, J. (2001). Super- efficiency and DEA sensitivity analysis, *European Journal of Operational Research*, **129**, 443-455.

[23] Zhu, J. (2003). Imprecise data envelopment analysis (IDEA): A review and improvement with an application, *European Journal of Operational Research*, **144**, 513–529.

[24] Ashrafi, A. and Mansouri Kaleibar, M. (2017). Cost, revenue and profit efficiency models in generalized fuzzy data envelopment analysis, *Fuzzy Informaion and Engineerig*, **9**, 237-246.

[25] Ashrafi, A. and Mansouri Kaleibar, M. (2018). Generalized fuzzy inverse data envelopment analysis models, *International Journal of Industrial Mathematics*, In press.

[26] Emrouznejad, A. and Tavana, M. (2014). *Performance measurement with fuzzy data envelopment analysis*, Springer, Poland.

# A Generalized SBM Super-Efficiency in Fuzzy Data Envelopment Analysis

Mozhgan Mansouri Kaleibar, Ali Ashrafi

Department of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran

**Abstract**

The slacks-based measure super-efficiency model is presented for ranking SBM's efficient decision making units. Fuzzy data envelopment analysis models have been introduced to evaluate uncertain inputs and outputs for decision making units (DMUs). In this methods, mostly used $\alpha$-cut procedure. Also, sample fuzzy decision making units in these methods cannot be assessed. This paper proposes generalized fuzzy super-efficiency model which includes, old fuzzy DEA models, and evaluates the sample decision making units. This scheme embraces evaluation method based on vector. As an empirical example, the proposed method is applied to the flexible manufacturing system data to rank efficient units.

***Keywords***: Data envelopment analysis, Fuzzy data envelopment analysis, Sample DMU, Slacks-based measure, Ssuper– efficiency.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 90C70, 90C90.