# برنامه‌ریزی درجه دوم محدب تعمیم‌یافته برای حل دستگاه‌های خطی فازی

امید سلیمانی فرد[1]*، ناصر آخوندی**، محدثه رمضان زاده** و مرتضی گچ پزان*

*گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد

**گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه دامغان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۵/۱۱

**چکیده:** دستگاه معادلات خطی، یکی از مهم‌ترین ابزارهای مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی است؛ اما ازآنجایی‌که پدیده‌های دنیای واقعی همواره با عدم قطعیت همراه هستند، لذا حل دستگاه معادلات خطی فازی از اهمیت بسزایی برخوردار می‌شود. یکی از روش‌های متداول و پرکاربرد برای یافتن جواب‌های دقیق و تقریبی یک دستگاه معادلات خطی فازی، استفاده از روش کمترین مربعات است. در این روش، با انتخاب یک متر دلخواه و حل یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متناظر، جواب تقریبی (و گاه دقیق) برای دستگاه معادلات خطی فازی ارائه می‌شود. در این مقاله، ابتدا نشان می‌دهیم که مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متناظر با سه متر مختلف معروف و متداول، تحت شرایط مناسب مستقل از نوع تابع متر انتخاب شده، محدب است. سپس با در نظر گرفتن این سه متر متفاوت، با حل مثال‌های متعدد و مقایسه جواب‌های تقریبی به‌دست‌آمده از آن‌ها، به دنبال انتخاب بهترین متر خواهیم بود.

**واژه‌های کلیدی:** اعداد فازی، مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب، روش کمترین مربعات.

**رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** ۹۰C۲۰، ۱۵A۰۶.

## ۱– مقدمه

جمع‌آوری اطلاعات و داده‌های دقیق برای توصیف رفتار سیستم‌های دنیای واقعی برای علوم تجربی و مهندسی کاری بس مشکل و گاه ناممکن است. ازاین‌رو مدل‌سازی این نوع سیستم‌ها با

---

۱ - آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: soleimani@um.ac.ir

عدم قطعیت همراه می‌شود. شاید بتوان این‌گونه اذعان داشت که با افزایش پیچیدگی سیستم‌ها، دقت مدل‌های ریاضی کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل، روش‌های گوناگون و بسیاری مانند روش‌های احتمالی، آنالیز بازه‌ای، مجموعه‌های فازی و ... تاکنون پیشنهاد شده‌اند. نظریه مجموعه‌های فازی قادر است به بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌های نادقیق و مبهم، صورت‌بندی ریاضی بخشد و زمینه خوبی برای استدلال و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم آورد؛ بنابراین در دهه‌های اخیر تلفیق منطق و نظریه مجموعه‌های فازی با بسیاری از ابزارهای فرمول‌بندی مسائل دنیای واقعی (مانند بهینه‌سازی، معادلات دیفرانسیل، دستگاه معادلات خطی و ...) موردتوجه پژوهشگران و محققان قرار گرفته است [۱]. ازجمله، در سال‌های اخیر محققان بسیاری به مطالعه روش‌های حل دستگاه معادلات خطی فازی[1] پرداخته‌اند و روش‌های مستقیم و تکراری بسیاری برای حل آن ارائه داده‌اند [۲-۶]. در این مقالات حالت‌های مختلف دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x}=\tilde{b}$ در نظر گرفته‌شده است. ازجمله کارهای انجام شده در سال‌های اخیر در این زمینه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. الله ویرانلو و قنبری [۷]، براساس نظریه بازه‌ها و مفهوم جدید دستگاه خطی بازه شمول[2]، روشی مؤثر برای حل دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x}=\tilde{b}$ ارائه کردند. در سال ۲۰۱۷، نجاریان و همکاران نیز با در نظر گرفتن اعداد فازی نوع ۲، روشی برای حل این دستگاه موردبررسی قرار دادند. اخیراً در سال ۲۰۱۸ در [۳]، با استفاده از مفهوم معکوس تعمیم‌یافته، جواب دستگاه معادلات خطی فازی $n\times n$ با ماتریس ضرایب حقیقی مقدار منفرد یا نامنفرد محاسبه شده است. هم‌چنین قنبری در[۸] روشی را برای حل دستگاه خطی فازی $\tilde{A}x=\tilde{b}$ با پارامترهای فازی مثلثی ارائه کرد و شرایط لازم و کافی برای حل‌پذیری این نوع دستگاه را نیز بیان و ثابت کرد. باببر و همکاران در [۹] به‌منظور یافتن دستگاه معادلات خطی کاملاً فازی $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$، با در نظر گرفتن اعداد فازی مثلثی، روش‌های عددی جدیدی بیان نموده‌اند. اینرات در پایان‌نامه خود روش‌های عددی حل معادلات خطی فازی و کاملاً فازی را بیان نموده است و به‌طور جداگانه در [۱۰] به همراه همکارانش به مطالعه و بررسی همگرایی روش‌های عددی ژاکوبی، گوس-سایدل و SOR[3] در راستای حل دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x}=\tilde{b}$ پرداخته است.

در بسیاری از موارد ممکن است دستگاه معادلات خطی فازی جواب دقیق نداشته باشد، در این صورت یافتن جواب تقریبی برای این دستگاه موردنیاز است. یکی از روش‌های یافتن جواب تقریبی دستگاه خطی فازی، روش کمترین مربعات[4] است [۱۱، ۱۲]. به عبارت دقیق‌تر، در [۱۱] با در

1- Fuzzy linear system
2- Interval inclusion linear system
3- Successive over-relaxation
4- Least squares

نظر گرفتن اعداد فازی مثلثی و استفاده از روش کمترین مربعات و تقریب متر مینگ، حل دستگاه معادلات خطی فازی به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی درجه دوم تبدیل می‌شود. در این مقاله، با تعمیم این روش برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای و در نظر گرفتن دو متر دیگر به مقایسه نتایج می‌پردازیم. در واقع، محققان بسیاری در مقالات متنوع ازجمله [۱۱، ۱۵ و ۱۶]، این موضوع را با انتخاب سه متر معروف مینگ، تقریب مینگ و پی موردبررسی قرار داده‌اند، به‌طوری‌که در هر حالت، یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متمایز به دست می‌آید؛ اما متأسفانه، مبحث بررسی محدب بودن این مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم در این مقالات مغفول مانده است. ازاین‌رو، اولین و مهم‌ترین هدف این مقاله، فراهم نمودن شرایطی است که نشان‌دهنده محدب بودن مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم حاصل از اعمال روش کمترین مربعات برای حل دستگاه معادلات خطی فازی (فارغ از نوع متر انتخابی) باشد.

ساختار این مقاله به شرح ذیل سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، مفاهیم اولیه مجموعه‌های فازی را بیان می‌کنیم. در بخش ۳، با در نظر گرفتن دستگاه معادلات خطی فازی $A\tilde{x}=\tilde{b}$، به بیان جزییات روش کمترین مربعات با در نظر گرفتن سه متر مینگ، تقریب مینگ و پی می‌پردازیم. علاوه بر این، نشان می‌دهیم که مسئله برنامه‌ریزی به‌دست‌آمده تحت چه شرایطی یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب است. در بخش ۴، ماتریس ضرایب $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ را به‌صورت یک ماتریس تصادفی مربعی و یا غیر مربعی، کامل یا غیر کامل با ابعاد متوسط و بزرگ در نظر می‌گیریم و نتایج محاسباتی حاصل در بخش ۳ را با حل این دستگاه‌های تصادفی، با در نظر گرفتن سه متر مذکور، مورد مقایسه قرار می‌دهیم. در اینجا متذکر می‌شویم که مقایسه نتایج حاصل، توسط تابع رتبه[1] بیان شده در [۱۳] و نرم بی‌نهایت صورت گرفته است.

## ۲- مفاهیم اولیه

برای اجتناب از آوردن مفاهیم تکراری فرض می‌کنیم که خواننده این مقاله با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی آشنایی اولیه دارد! لذا به‌طور خلاصه فقط برخی نمادها و مفاهیم لازم و ضروری را در این بخش مرور می‌کنیم.

تعریف ۱. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه‌ی مرجع $X$ را می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مانند

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\middle|x\in X\right\}$$

1- Rank function

تعریف کنیم که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت $x$ نامیده می‌شود. هرچه $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به یک نزدیک‌تر باشد، $x$ بیشتر به $\tilde{A}$ تعلق دارد.

تعریف ۲. مجموعه نقاطی از مجموعه‌ی مرجع $X$ که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ باشد را تکیه‌گاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم و با نماد $supp(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم، به‌عبارت‌دیگر

$$supp(\tilde{A}) = \left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\right\}.$$

تعریف ۳. مقدار $M = \sup_{x\in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$ را ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم. اگر ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی برابر یک باشد، آنگاه نرمال است در غیر این صورت زیر نرمال است.

تعریف ۴. زیرمجموعه‌ای از $X$ که درجه‌ی عضویت اعضای آن در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی $r$، $(0 < r \leq 1)$ باشد را $r-$برش $\tilde{A}$ می‌نامیم و با نماد $[\tilde{A}]_r$ نشان می‌دهیم؛ به‌عبارت‌دیگر،

$$[\tilde{A}]_r = \left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\right\},$$

و برای $r = 0$ داریم

$$[\tilde{A}]_0 = \overline{\left\{x \in X \middle| \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\right\}},$$

که در آن $\overline{A}$ نشان‌دهنده‌ی بستار مجموعه $A$ است.

تعریف ۵. مجموعه‌ی فازی را محدب می‌نامیم اگر هر $r-$برش $\overline{A}$ به ازای $0 \leq r \leq 1$ محدب باشند.

تعریف ۶. زیرمجموعه فازی $\tilde{u}$ روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ یعنی $\tilde{u} : \mathbb{R} \to [0,1]$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\tilde{u}$ عدد فازی است اگر در شرایط زیر صدق کند

- $\tilde{u}$ نرمال باشد،
- $\tilde{u}$ مجموعه‌ی فازی محدب باشد،
- $\tilde{u}$ از بالا نیم‌پیوسته باشد،
- $[\tilde{u}]_0$ در $\mathbb{R}$ فشرده باشد.

تعریف ۷. [۱۴] عدد فازی $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)$ با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{a-x}{\alpha} & a-\alpha\le x\le a \\ 1 & a\le x\le b \\ 1-\dfrac{x-b}{\beta} & b\le x\le b+\beta \\ 0 & else \end{cases}$$

را عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌نامیم.

## ۳- روش کمترین مربعات برای حل دستگاه خطی فازی

تعریف ۸. دستگاه

$$A\tilde{x}=\tilde{b} \tag{1}$$

را که در آن $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \tilde{b}\in F(\mathbb{R}^m),\ \ \tilde{x}\in F(\mathbb{R}^n)$ است، یک دستگاه خطی فازی می‌نامیم. در روش کمترین مربعات، می‌گوییم $\tilde{x}$ یک جواب تقریبی برای دستگاه (۱) است اگر $A\tilde{x}$ کمترین فاصله را تا $\tilde{b}$ داشته باشد که برای نشان دادن این فاصله می‌توان از مترهای مختلفی که بین دو عدد فازی تعریف شده است استفاده کنیم [۱۱، ۱۵ و ۱۶]. در اینجا به معرفی روش کمترین مربعات با استفاده از سه متر متفاوت می‌پردازیم و سپس نتایج عددی حاصل از مقایسه‌ی این سه متر را موردبررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید $D:F(\mathbb{R}^n)\times F(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty)$ یک متر دلخواه باشد، در این صورت با حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی

$$\begin{aligned} &\text{Min}\quad r(\tilde{x})=D^2(A\tilde{x},\tilde{b})\\ &\text{s.t.}\\ &\tilde{x}\in F(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{2}$$

می‌توان جوابی تقریبی برای دستگاه خطی فازی $A\tilde{x}=\tilde{b}$ به‌دست آورد. در مسئله‌ی (۲) گوییم $\tilde{x}$ یک جواب دقیق است اگر و تنها و اگر $r(\tilde{x})=0$، در غیر این صورت جواب به‌دست‌آمده را یک جواب تقریبی می‌نامیم. با در نظر گرفتن اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{x}=\left(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\right)$ و $\tilde{b}=\left(\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_m\right)$ که برای هر $i=1,\ldots,\mathrm{n}$ و $j=1,\ldots,m$ داریم $\tilde{x}_i=\left(x_i^l,x_i^r,x_i^\alpha,x_i^\beta\right)$ و $\tilde{b}_j=\left(b_j^l,b_j^r,b_j^\alpha,b_j^\beta\right)$، می‌توان نوشت

$$A\tilde{x} = \left(B^{+}x^{l} + B^{-}x^{r}, B^{+}x^{r} + B^{-}x^{l}, B^{+}x^{\alpha} - B^{-}x^{\beta}, B^{+}x^{\beta} - B^{-}x^{\alpha}\right), \quad (۳)$$

که در آن دو ماتریس

$$(B^{+})_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & a_{ij} \geq ۰ \\ ۰ & a_{ij} < ۰ \end{cases}, \qquad (B^{-})_{ij} = \begin{cases} ۰ & a_{ij} \geq ۰ \\ a_{ij} & a_{ij} < ۰. \end{cases} \quad (۴)$$

متناظر با ماتریس $A$ در دستگاه خطی (۱) تعریف می‌شوند. در ادامه نشان می‌دهیم که بنا به متر $D$ انتخاب شده، مسئله (۲) به مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم زیر

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad r(x) = \frac{۱}{۲} x^{T} Q x + f^{T} x + c \\ &\text{s.t.} \\ &x = (\mathrm{x}^{l}, \mathrm{x}^{r}, \mathrm{x}^{\alpha}, \mathrm{x}^{\beta})^{T}, \\ &\mathrm{x}^{l} \leq \mathrm{x}^{r}, \\ &\mathrm{x}^{\alpha} \geq ۰, \quad \mathrm{x}^{\beta} \geq ۰. \end{aligned} \quad (۵)$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$\begin{aligned} x^{l} &= (\mathrm{x}_{۱}^{l}, \dots, \mathrm{x}_{n}^{l})^{T}, \; x^{r} = (\mathrm{x}_{۱}^{r}, \dots, \mathrm{x}_{n}^{r})^{T}, \\ x^{\alpha} &= (\mathrm{x}_{۱}^{\alpha}, \dots, \mathrm{x}_{n}^{\alpha})^{T}, \; x^{\beta} = (\mathrm{x}_{۱}^{\beta}, \dots, \mathrm{x}_{n}^{\beta})^{T}, \end{aligned}$$

بردارهای حقیقی مقدار هستند. لازم به ذکر است که ماتریس‌های $Q$، $f$ و عدد اسکالر $c$ در مسئله‌ی (۵) براساس متر انتخاب شده متفاوت خواهند بود که در ادامه این ماتریس‌ها را برای سه متر متفاوت به‌دست می‌آوریم و درنهایت به مقایسه نتایج حاصل از این سه متر می‌پردازیم.

**۱) متر مینگ [۱۵]**: فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v} \in F(\mathbb{R})$ که $[\tilde{u}]_{r} = [\underline{\mathrm{u}}(\mathrm{r}), \overline{\mathrm{u}}(\mathrm{r})]$ و $[\tilde{\mathrm{v}}]_{r} = [\underline{\mathrm{v}}(\mathrm{r}), \overline{\mathrm{v}}(\mathrm{r})]$، در این صورت تابع $D_{M} : F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to [۰, \infty)$ با ضابطه‌ی

$$D_{M}^{۲}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{۰}^{۱} (\underline{\mathrm{u}}(\mathrm{r}) - \underline{\mathrm{v}}(\mathrm{r}))^{۲} dr + \int_{۰}^{۱} (\overline{\mathrm{u}}(\mathrm{r}) - \overline{\mathrm{v}}(\mathrm{r}))^{۲} dr, \quad (۶)$$

را متر مینگ[1] بین دو عدد فازی $\tilde{u}, \tilde{v}$ می‌نامند.

1-Ming distance

حال فرض کنید $\tilde{A}=(a^l,a^r,a^\alpha,a^\beta)$ و $\tilde{B}=(\mathrm{b}^l,\mathrm{b}^r,\mathrm{b}^\alpha,\mathrm{b}^\beta)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} D_M^2(\tilde{A},\tilde{B}) &= \int_0^1 (\underline{a}(r)-\underline{b}(r))^2 dr + \int_0^1 (\overline{a}(r)-\overline{b}(r))^2 dr \\ &= \int_0^1 ((a^l+(r-1)a^\alpha)-(b^l+(r-1)b^\alpha))^2 dr \\ &+\int_0^1 ((a^r+(1-r)a^\beta)-(b^r+(1-r)b^\beta))^2 dr \\ &= \left(a^l-b^l\right)^2+\left(a^r-b^r\right)^2+\frac{1}{3}\left(a^\alpha-b^\alpha\right)^2+\frac{1}{3}\left(a^\beta-b^\beta\right)^2 \\ &-\left(a^l-b^l\right)\left(a^\alpha-b^\alpha\right)+\left(a^r-b^r\right)\left(a^\beta-b^\beta\right). \end{aligned} \tag{7}$$

بنابراین اگر در دستگاه خطی فازی (۱)، اعداد فازی ذوزنقه‌ای

$$\begin{aligned} &\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n), \quad \tilde{x}_i=\left(x_i^l,x_i^r,x_i^\alpha,x_i^\beta\right), \quad \forall i=1,\dots,n, \\ &\tilde{b}=\left(\tilde{b}_1,\dots,\tilde{b}_m\right), \quad \tilde{b}_j=\left(b_j^l,b_j^r,b_j^\alpha,b_j^\beta\right), \quad \forall j=1,\dots,m, \end{aligned} \tag{8}$$

را در نظر بگیریم، با استفاده از رابطه‌ی (۷) و (۳) می‌توان تابع هدف مسئله‌ی (۲) را به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} r(\tilde{x}) &= 3D_M^2(A\tilde{x},\tilde{b}) \\ &= 3(B^+x^l+B^-x^r-b^l)^T(B^+x^l+B^-x^r-b^l) \\ &+3(B^+x^r+B^-x^l-b^r)^T(B^+x^r+B^-x^l-b^r) \\ &+(B^+x^\alpha-B^-x^\beta-b^\alpha)^T(B^+x^\alpha-B^-x^\beta-b^\alpha) \\ &+(B^+x^\beta-B^-x^\alpha-b^\beta)^T(B^+x^\beta-B^-x^\alpha-b^\beta) \\ &-3(B^+x^l+B^-x^r-b^l)^T(B^+x^\alpha-B^-x^\beta-b^\alpha) \\ &+3(B^+x^r+B^-x^l-b^r)^T(B^+x^\beta-B^-x^\alpha-b^\beta), \end{aligned} \tag{9}$$

که در آن

$$\begin{aligned} &x^l=(x_1^l,\dots,x_n^l)^T, x^r=(x_1^r,\dots,x_n^r)^T, x^\alpha=(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha)^T, x^\beta=(x_1^\beta,\dots,x_n^\beta)^T, \\ &b^l=(b_1^l,\dots,b_n^l)^T, b^r=(b_1^r,\dots,b_n^r)^T, b^\alpha=(b_1^\alpha,\dots,b_n^\alpha)^T, b^\beta=(b_1^\beta,\dots,b_n^\beta)^T. \end{aligned} \tag{10}$$

حال اگر قرار دهیم

$$S=B^{+T}B^+ + B^{-T}B^-, \qquad R=B^{+T}B^- + B^{-T}B^+. \tag{11}$$

ماتریس‌های $Q_M$، $f_M$ و عدد اسکالر $c_M$ متناظر با متر مینگ در مسئله‌ی (۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$Q_M = \begin{bmatrix} 6S & 6R & -3S & 3R \\ 6R & 6S & -3R & 3S \\ -3S & -3R & 2S & -2R \\ 3R & 3S & -2R & 2S \end{bmatrix},$$

$$f_M = \begin{bmatrix} -6B^{+T}b^l - 6B^{-T}b^r + 3B^{+T}b^\alpha - 3B^{-T}b^\beta \\ -6B^{-T}b^l - 6B^{+T}b^r + 3B^{-T}b^\alpha - 3B^{+T}b^\beta \\ -2B^{+T}b^\alpha + 2B^{-T}b^\beta + 3B^{+T}b^l + 3B^{-T}b^r \\ 2B^{-T}b^\alpha - 2B^{+T}b^\beta - 3B^{-T}b^l - 3B^{+T}b^r \end{bmatrix}, \tag{۱۲}$$

$$c_M = 3b^{l^T}b^l + 3b^{r^T}b^r + b^{\alpha^T}b^\alpha + b^{\beta^T}b^\beta - 3b^{l^T}b^\alpha + 3b^{r^T}b^\beta$$

**۲) تقریب متر مینگ** [۱۱]: قنبری و مهدوی امیری در [۱۱] نشان داده‌اند که اگر در ضابطه‌ی (۶) برای محاسبه‌ی هر انتگرال از فرمول انتگرال ذوزنقه‌ای[1]

$$\int_0^1 f(r)dr \simeq \frac{1}{2}(f(0) + f(1)),$$

استفاده کنیم، در این صورت فرمول تقریبی

$$D_{Am}^2(\tilde{u},\tilde{v}) = \frac{1}{2}\left(\left(\underline{u}(0) - \underline{v}(0)\right)^2 + \left(\underline{u}(1) - \underline{v}(1)\right)^2 + \left(\overline{u}(0) - \overline{v}(0)\right)^2 + \left(\overline{u}(1) - \overline{v}(1)\right)^2\right) \tag{۱۳}$$

برای متر مینگ دو عدد فازی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ حاصل می‌شود.

درنتیجه، برای دو عدد ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a^l, a^r, a^a, a^b)$ و $\tilde{B} = (b^l, b^r, b^\alpha, b^\beta)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} D_{Am}^2(\tilde{A},\tilde{B}) = {} & \left(a^l - b^l\right)^2 + \left(a^r - b^r\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a^\alpha - b^\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a^\beta - b^\beta\right)^2 \\ & -\left(a^l - b^l\right)\left(a^\alpha - b^\alpha\right) + \left(a^r - b^r\right)\left(a^\beta - b^\beta\right). \end{aligned} \tag{۱۴}$$

---

1- Trapezoidal integration rule

بنابراین با در نظر گرفتن اعداد فازی ذوزنقه‌ای (۸) و تقریب متر مینگ و روابط (۱۰) و (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} r(\tilde{x}) &= 2D^2_{Am}(A\tilde{x},\tilde{b}) \\ &= 2(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^l + B^-x^r - b^l) \\ &\quad +2(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^r + B^-x^l - b^r) \\ &\quad +(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ &\quad +(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta) \\ &\quad -2(B^+x^l + B^-x^r - b^l)^T(B^+x^\alpha - B^-x^\beta - b^\alpha) \\ &\quad +2(B^+x^r + B^-x^l - b^r)^T(B^+x^\beta - B^-x^\alpha - b^\beta). \end{aligned} \tag{15}$$

و در نتیجه ماتریس‌های $Q_{Am}$ و $f_{Am}$ و عدد اسکالر $c_{Am}$ در مسئله‌ی (۵) به‌صورت

$$Q_{Am} = \begin{bmatrix} 4S & 4R & -2S & 2R \\ 4R & 4S & -2R & 2S \\ -2S & -2R & 2S & -2R \\ 2R & 2S & -2R & 2S \end{bmatrix}, f_{Am} = \begin{bmatrix} -4B^{+T}b^l - 4B^{-T}b^r + 2B^{+T}b^\alpha - 2B^{-T}b^\beta \\ -4B^{-T}b^l - 4B^{+T}b^r + 2B^{-T}b^\alpha - 2B^{+T}b^\beta \\ -2B^{+T}b^\alpha + 2B^{-T}b^\beta + 2B^{+T}b^l + 2B^{-T}b^r \\ 2B^{-T}b^\alpha - 2B^{+T}b^\beta - 2B^{-T}b^l - 2B^{+T}b^r \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$c_{Am} = 2b^{l^T}b^l + 2b^{r^T}b^r + b^{\alpha^T}b^\alpha + b^{\beta^T}b^\beta - 2b^{l^T}b^\alpha + 2b^{r^T}b^\beta$$

خواهد بود که در آن ماتریس‌های $S$ و $R$ مطابق با رابطه‌ی (۱۱) محاسبه می‌شود.

**۳) متر پی** [۱۶]: براساس متر تعریف شده در [۱۷]، می‌توان متر زیر را برای دو عدد فازی در نظر گرفت.

تعریف ۹. فرض کنید $\tilde{u},\tilde{v} \in F(\mathbb{R})$ که $[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ و $[\tilde{v}]_r = [\underline{v}(r), \overline{v}(r)]$ باشند، در این صورت فاصله‌ی $D_{p,f}$ بین $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ به‌صورت

$$D_{p,f}(\tilde{u},\tilde{v}) = \left( \int_0^1 f(\lambda)\left( \left|\underline{u}(\lambda) - \underline{v}(\lambda)\right|^p + \left|\overline{u}(\lambda) - \overline{v}(\lambda)\right|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود که در آن تابع $f$ تابعی صعودی روی بازه $[0,1]$ با خاصیت

$$f(0) = 0, \quad \int_0^1 f(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2},$$

است. با فرض $p=۲$ و $\lambda$ و $f(\lambda)=\lambda$، $D_{p,f}$ با نماد $D_p$ نشان داده می‌شود [۱۶] و خواهیم داشت

$$D_p(\tilde{u},\tilde{v})=\left(\int_{۰}^{۱}\lambda\left(\left|\,\underline{u}(\lambda)-\underline{\mathrm{v}}(\lambda)\right|^{۲}+\left|\,\overline{u}(\lambda)-\overline{\mathrm{v}}(\lambda)\right|^{۲}\right)\right)^{\frac{۱}{۲}}. \qquad (۱۷)$$

با در نظر گرفتن دو عدد ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a^l,a^r,a^\alpha,a^\beta)$ و $\tilde{B}=(b^l,b^r,b^\alpha,b^\beta)$ و محاسبه‌ی انتگرال معین رابطه‌ی (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned}D_p^{۲}(\tilde{A},\tilde{B})&=\int_{۰}^{۱}r\left((a^l+(r-۱)a^\alpha)-(b^l+(r-۱)b^\alpha)\right)^{۲}dr\\&+\int_{۰}^{۱}r\left((a^r+(۱-r)a^\beta)-(b^r+(۱-r)b^\beta)\right)^{۲}dr\\&=\frac{۱}{۲}\left(a^l-b^l\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(a^r-b^r\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\left(a^\alpha-b^\alpha\right)^{۲}+\frac{۱}{۱۲}\left(a^\beta-b^\beta\right)^{۲}\\&-\frac{۱}{۳}\left(a^l-b^l\right)\left(a^\alpha-b^\alpha\right)+\frac{۱}{۳}\left(a^r-b^r\right)\left(a^\beta-b^\beta\right).\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

بنابراین مشابه دو حالت قبل، برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ در دستگاه خطی فازی (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}r(\tilde{x})&=۱۲D_p^{۲}(A\tilde{x},\tilde{b})\\&=۶(B^+x^l+B^-x^r-b^l)^T(B^+x^l+B^-x^r-b^l)\\&+۶(B^+x^r+B^-x^l-b^r)^T(B^+x^r+B^-x^l-b^r)\\&+(B^+x^\alpha-B^-x^\beta-b^\alpha)^T(B^+x^\alpha-B^-x^\beta-b^\alpha)\\&+(B^+x^\beta-B^-x^\alpha-b^\beta)^T(B^+x^\beta-B^-x^\alpha-b^\beta)\\&-۴(B^+x^l+B^-x^r-b^l)^T(B^+x^\alpha-B^-x^\beta-b^\alpha)\\&+۴(B^+x^r+B^-x^l-b^r)^T(B^+x^\beta-B^-x^\alpha-b^\beta).\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

متناظر با متر پی، ماتریس‌های موجود در مسئله‌ی (۵) به‌صورت زیر خواهد بود

$$Q_p=\begin{bmatrix}۱۲S & ۱۲R & -۴S & ۴R\\ ۱۲R & ۱۲S & -۴R & ۴S\\ -۴S & -۴R & ۲S & -۲R\\ ۴R & ۴S & -۲R & ۲S\end{bmatrix},f_p=\begin{bmatrix}-۱۲B^{+T}b^l-۱۲B^{-T}b^r+۴B^{+T}b^\alpha-۴B^{-T}b^\beta\\ -۱۲B^{-T}b^l-۱۲B^{+T}b^r+۴B^{-T}b^\alpha-۴B^{+T}b^\beta\\ -۲B^{+T}b^\alpha+۲B^{-T}b^\beta+۴B^{+T}b^l+۴B^{-T}b^r\\ ۲B^{-T}b^\alpha-۲B^{+T}b^\beta-۴B^{-T}b^l-۴B^{+T}b^r\end{bmatrix}, \qquad (۲۰)$$

$$c_p=۶b^{l^T}b^l+۶b^{r^T}b^r+b^{\alpha^T}b^\alpha+b^{\beta^T}b^\beta-۴b^{l^T}b^\alpha+۴b^{r^T}b^\beta.$$

در قضیه ۱. نشان می‌دهیم که با انتخاب هر یک از مترهای معرفی شده، ماتریس $Q$ در مسئله‌ی (۵) در صورت وارون‌پذیری، معین مثبت است و در نتیجه مسئله‌ی (۲) به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم محدب تبدیل می‌شود.

ماتریس‌های $Q \in \left\{Q_M, Q_{Am}, Q_P\right\}$ شکل کلی زیر را دارند

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha Q_{11} & \beta Q_{21}^T \\ \beta Q_{21} & \gamma Q_{22} \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

که در آن ماتریس‌های $Q_{11}$، $Q_{21}$ و $Q_{22}$ به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} S & R \\ R & S \end{bmatrix}, Q_{21} = \begin{bmatrix} -S & -R \\ R & S \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} S & -R \\ -R & S \end{bmatrix}. \tag{۲۲}$$

لم ۱. ماتریس‌های $Q_{11}$ و $Q_{22}$ نیمه معین مثبت هستند.

اثبات: با توجه به تعریف ماتریس‌های $S = B^{+T}B^{+} + B^{-T}B^{-}$ و $R = B^{+T}B^{-} + B^{-T}B^{+}$ ماتریس‌های $Q_{11}$ و $Q_{22}$ می‌توانند به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-} & B^{+} \end{bmatrix}, \\ Q_{22} &= \begin{bmatrix} B^{+T} \\ -B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & -B^{-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ -B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-} & -B^{+} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، هر دو ماتریس $Q_{11}$ و $Q_{22}$ مجموع دو ماتریس نیمه معین مثبت هستند، بنابراین نیمه معین مثبت خواهند بود.

لم ۲. اگر ماتریس $\Sigma$ را به‌صورت $\Sigma = Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{21}^T$ تعریف کنیم، آنگاه $\Sigma = Q_{22}$.

اثبات: از تعریف ماتریس $\Sigma$ داریم

$$\begin{aligned} \Sigma = Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{21}^T &= (Q_{11} + \begin{bmatrix} -2S & -2R \\ 0 & 0 \end{bmatrix})Q_{11}^{-1}(Q_{11} + \begin{bmatrix} -2S & 0 \\ -2R & 0 \end{bmatrix}) \\ &= Q_{11} + \begin{bmatrix} -2S & 0 \\ -2R & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2S & -2R \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_{22}. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

قضیه ۱. ماتریس $Q$ تعریف شده در (۲۱) نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر $\gamma \geq \frac{\beta^2}{\alpha}$ و $\alpha \geq 0$.

اثبات: با توجه به تجزیه بلوکی $LDL^T$ ماتریس $Q$داریم

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} Q_{21} Q_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha Q_{11} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \frac{\beta}{\alpha} Q_{11}^{-1} Q_{21}^T \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad (۲۵)$$

که در آن ماتریس $T$ مکمل شور است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T = \gamma Q_{22} - \frac{\beta^2}{\alpha} Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{21}^T \qquad (۲۶)$$

ماتریس $Q$ نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر عناصر بلوکی $\alpha Q_{11}$ و $T$ در تجزیه $LDL^T$ نیمه معین مثبت باشند. با توجه به لم ۲. داریم $T = (\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}) Q_{22}$؛ بنابراین از لم ۱. ماتریس $\alpha Q_{11}$ نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر $\alpha \geq 0$ و همچنین $T$ نیمه معین مثبت است اگر و فقط اگر $\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \geq 0$.

نتیجه ۱. اگر ماتریس‌های $Q_{11}$ و $Q_{22}$ معکوس‌پذیر باشند و همچنین $\gamma > \frac{\beta^2}{\alpha}$ و $\alpha > 0$آنگاه ماتریس $Q$معین مثبت است.

نتیجه ۲. ماتریس‌های $Q_M$، $Q_{Am}$ و $Q_P$ در شرایط قضیه ۱٫۳. صدق می‌کنند بنابراین نیمه معین مثبت هستند.

بنابراین در هر حالت با حل یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم (محدب)، جواب تقریبی یا دقیق دستگاه خطی فازی به‌دست می‌آوریم. در نتیجه به‌طور خلاصه می‌توان الگوریتم روش کمترین مربعات را به‌صورت زیر بیان کرد.

**الگوریتم ۱: کمترین مربعات برای محاسبه جواب تقریبی یا دقیق.**

۱) ماتریس $A$ و بردار $\tilde{b}$ را بگیر

۲) متناظر با متر انتخاب شده ماتریس‌های $Q$ و $f$ را محاسبه کن

۳) مسئله برنامه‌ریزی (۵) را حل کن (به کمک دستور quadprog در محیط متلب و پیشنهادی نقطه درونی محدب[1] و ناحیه اعتماد[2])

۴) با استفاده از جواب بهینه $x^* = (x^{l*}, x^{r*}, x^{\alpha*}, x^{\beta*})$ جواب بهینه فازی $\tilde{x}^*$ را محاسبه کن.

۵) اگر $r(\tilde{x}^*) = 0$، در این صورت $\tilde{x}^*$ یک جواب دقیق برای دستگاه خطی فازی (۱) است در غیر این صورت $\tilde{x}^*$ یک جواب تقریبی است

به‌منظور مقایسه نتایج حاصل از سه متر معرفی شده، نیازمند استفاده از یک تابع رتبه هستیم. روش‌های بسیاری برای رتبه‌بندی اعداد فازی بیان شده است. ونگ و کری در [۱۸، ۱۹] روش‌های مرتب‌سازی اعداد فازی را به سه دسته تقسیم‌بندی نموده‌اند و آن‌ها را براساس ۷ خاصیت ارزش‌گذاری کرده‌اند. به‌منظور رتبه‌بندی کردن اعداد فازی، عزتی و همکاران در [۱۳] برای عدد فازی دلخواه $\tilde{A}$ با $r-$برش $[\tilde{A}]_r = [\underline{a}_r, \overline{a}_r]$، تابع رتبه $R: F(\mathbb{R}) \times \{0,1\} \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کرده‌اند

$$R(\tilde{A}, \gamma) = \mathrm{Mag}(\tilde{A}) + \gamma \mathrm{Momag}(\tilde{A}), \tag{۲۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathrm{Mag}(\tilde{A}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{a}_r + \overline{a}_r + \underline{a}_1 + \overline{a}_1) r\, dr, \\ \mathrm{Momag}(\tilde{A}) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{a}_r - \overline{a}_r + \underline{a}_1 - \overline{a}_1) r\, dr. \end{aligned} \tag{۲۸}$$

در این صورت برای مقایسه دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ داریم

- $\tilde{A} \succ \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{A}, \gamma) > R(\tilde{B}, \gamma)$،
- $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{A}, \gamma) < R(\tilde{B}, \gamma)$،
- $\tilde{A} \approx \tilde{B}$ اگر و تنها اگر $R(\tilde{A}, \gamma) = R(\tilde{B}, \gamma)$،

به‌طوری‌که

1- Interior-point-convex
2- Trust-region-reflective

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \mathrm{Mag}(\tilde{A}) \neq \mathrm{Mag}(\tilde{B}), \\ 1, & \mathrm{Mag}(\tilde{A}) = \mathrm{Mag}(\tilde{B}) \ , \ z_0 \geq 0, \\ -1, & \mathrm{Mag}(\tilde{A}) = \mathrm{Mag}(\tilde{B}) \ , z_0 < 0, \end{cases} \tag{29}$$

که در آن $z_0 = \dfrac{\underline{a}_1 + \overline{a}_1}{2}$ یا $z_0 = \dfrac{\underline{b}_1 + \overline{b}_1}{2}$ است. به‌منظور مقایسه این سه متر از معیار سنجش زیر برای مقایسه نتایج حاصل از مترهای ۱-۳ استفاده می‌کنیم

$$\boldsymbol{r} = \left\| R(A\tilde{x}) - R(\tilde{b}) \right\|_\infty , \tag{30}$$

که در آن $\|\cdot\|_\infty$ نرم بینهایت و $R$ یک تابع رتبه دلخواه است که در این مقاله، ما از تابع رتبه بیان شده در رابطه (۲۷) استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 - 10\tilde{x}_3 + 8\tilde{x}_4 + 7\tilde{x}_5 = (-6, -5, 10, 4) \\ -1\tilde{x}_1 + 7\tilde{x}_2 - 1\tilde{x}_3 - 5\tilde{x}_4 + 2\tilde{x}_5 = (4, 5, 2, 0) \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 9\tilde{x}_3 - 8\tilde{x}_4 + 8\tilde{x}_5 = (-4, -2, 10, 3) \\ -\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3 + 3\tilde{x}_4 + 4\tilde{x}_5 = (4, 5, 4, 4) \\ 3\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3 - 7\tilde{x}_4 + 3\tilde{x}_5 = (-6, -6, 1, 5) \end{cases} \tag{31}$$

برای این دستگاه داریم

$$B^- = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -10 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

و

$$\begin{aligned} &b^l = (-6, 4, -4, 4, -6)^T, \ \ b^r = (-5, 5, -2, 5, -6)^T, \\ &b^\alpha = (10, 2, 10, 4, 1)^T, \ \ b^\beta = (4, 0, 3, 4, 5)^T. \end{aligned} \tag{33}$$

**جدول (۱):** جواب‌های تقریبی دستگاه (۳۱) با استفاده از مترهای متفاوت

| | $\tilde{x}$ | $r(\tilde{x})$ | R |
|---|---|---|---|
| متر مینگ | $\tilde{x}_۱ = (-۱/۳۳, -۱/۳۳, ۴/۹۳\times ۱۰^{-۱۵}, ۰/۵۳۱)$<br>$\tilde{x}_۲ = (۲/۱۱, ۲/۱۱, ۲/۸۹\times ۱۰^{-۱۵}, ۳/۱۵\times ۱۰^{-۱۵})$<br>$\tilde{x}_۳ = (۱/۴۱, ۱/۴۱, ۰/۲۲, ۰/۲۸۵)$<br>$\tilde{x}_۴ = (۱/۹۷, ۱/۹۷, ۴/۷۵\times ۱۰^{-۱۵}, ۱/۴\times ۱۰^{-۱۴})$<br>$\tilde{x}_۵ = (-۲/۸۷, -۰/۰۸۲۶, ۰/۸۲۹, ۰/۱۸۸)$ | ۴/۸۷۳ | ۰/۶۹۹۴ |
| تقریب مینگ | $\tilde{x}_۱ = (-۱/۳۸, -۱/۳۸, ۴/۰۵\times ۱۰^{-۱۳}, ۰/۷۵۳)$<br>$\tilde{x}_۲ = (۲/۱۱, ۲/۱۱, ۲/۰۴\times ۱۰^{-۱۳}, ۱/۹\times ۱۰^{-۱۳})$<br>$\tilde{x}_۳ = (۱/۴۲, ۱/۴۲, ۰/۲۶۲, ۰/۳۱۵)$<br>$\tilde{x}_۴ = (۱/۹۷, ۱/۹۷, ۲/۶\times ۱۰^{-۱۳}, ۰/۰۲۵۵)$<br>$\tilde{x}_۵ = (-۰/۲۹, -۰/۰۸۵۸, ۰/۷۳۳, ۰/۱۰۵)$ | ۸/۸۹۲ | ۰/۶۱۵۹ |
| متر پی | $\tilde{x}_۱ = (-۱/۳۳, -۱/۳۳, ۴/۹۳\times ۱۰^{-۱۵}, ۰/۵۳۱)$<br>$\tilde{x}_۲ = (۲/۱۱, ۲/۱۱, ۲/۸۹\times ۱۰^{-۱۵}, ۳/۱۵\times ۱۰^{-۱۵})$<br>$\tilde{x}_۳ = (۱/۴۱, ۱/۴۱, ۰/۲۲, ۰/۲۸۵)$<br>$\tilde{x}_۴ = (۱/۹۷, ۱/۹۷, ۴/۷۵\times ۱۰^{-۱۵}, ۱/۴\times ۱۰^{-۱۴})$<br>$\tilde{x}_۵ = (-۲/۸۷, -۰/۰۸۲۶, ۰/۸۲۹, ۰/۱۸۸)$ | ۷/۱۸۶ | ۰/۳۵۵۵ |

با تعریف ماتریس‌های $S$ و $R$ به‌صورت زیر

$$S = \begin{bmatrix} ۱۶ & ۳۰ & ۳۶ & ۵ & ۱۷ \\ ۳۰ & ۱۲۷ & ۵۹ & ۰ & ۳۷ \\ ۳۶ & ۵۹ & ۲۵ & ۲۹ & ۱۱۰ \\ ۵ & ۰ & ۲۹ & ۲۱۱ & ۶۸ \\ ۱۷ & ۳۷ & ۱۱۰ & ۶۸ & ۱۴۲ \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} ۰ & -۷ & -۸ & -۴۸ & -۲۰ \\ -۷ & ۰ & -۵۵ & -۱۲۸ & -۵۲ \\ -۹ & -۵۵ & ۰ & -۱۶۶ & -۷۲ \\ -۴۸ & -۱۲۸ & -۱۶۶ & ۰ & -۹۵ \\ -۲۰ & -۵۲ & -۷۲ & -۹۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad (۳۴)$$

به‌دست می‌آید و در نتیجه ماتریس‌های متناظر با مترهای مینگ، تقریب مینگ و پی به ترتیب از روابط (۱۲)، (۱۶) و (۲۰) محاسبه می‌شود. با حل مسئله‌ی (۵) توسط نرم‌افزار متلب، دستور quadprog و الگوریتم نقطه درونی محدب، جواب‌های تقریبی دستگاه (۳۱) به‌دست می‌آید. نتایج حاصل از مقایسه سه متر در جدول ۱ بیان شده است.

توجه شود که ماتریس ضرایب دستگاه فوق ماتریسی مربعی با رتبه کامل است و همان‌طور که از جدول ۱ ملاحظه می‌شود متر پی مقدار کمتری برای معیار ارزش $\mathrm{r}$ به‌دست می‌دهد.

مثال ۲. دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -6\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 - 10\tilde{x}_3 - 6\tilde{x}_4 = (9, 10, 5, 7) \\ 8\tilde{x}_1 - 6\tilde{x}_2 - 5\tilde{x}_3 - 6\tilde{x}_4 = (9, 11, 5, 4) \\ -2\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2 - 10\tilde{x}_3 + 8\tilde{x}_4 = (8, 10, 6, 5) \\ -5\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 - 5\tilde{x}_4 = (0, 0, 3, 7) \\ -4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 14\tilde{x}_4 = (2, 3, 9, 8) \end{cases} \tag{۳۵}$$

ماتریس ضرایب آن یک ماتریس $5 \times 5$ با رتبه ۴ است که متناظر با آن داریم

$$B^- = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -10 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -6 & 0 \\ -2 & -5 & -10 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -14 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{۳۶}$$

و

$$\begin{aligned} b^l &= (9, 9, 8, 0, 2)^T, \ \ b^r = (10, 11, 10, 0, 3)^T, \\ b^\alpha &= (5, 5, 6, 3, 9)^T, \ \ b^\beta = (7, 4, 5, 7, 8)^T. \end{aligned} \tag{۳۷}$$

در نتیجه ماتریس‌های $S$ و $R$ متناظر با دستگاه (۳۵) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$S = \begin{bmatrix} 145 & 53 & 80 & 117 & 0 \\ 53 & 99 & 110 & 79 & 0 \\ 80 & 110 & 234 & 90 & 0 \\ 117 & 79 & 90 & 357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ R = \begin{bmatrix} 0 & -56 & -55 & -64 & 0 \\ -56 & 0 & -15 & -68 & 0 \\ -55 & -15 & 0 & -95 & 0 \\ -64 & -68 & -95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{۳۸}$$

**جدول (۲):** جواب‌های تقریبی دستگاه (۳۵) با استفاده از مترهای متفاوت

| | $\tilde{x}$ | $r(\tilde{x})$ | R |
|---|---|---|---|
| متر مینگ | $\tilde{x}_{۱} = (۰/ ۱۷۶,۰/ ۲۰۴,۰/ ۲۷,۶/ ۴۱\times ۱۰^{-۳})$<br>$\tilde{x}_{۲} = (-۰/ ۴۸۹,-۰/ ۴۸۹,۰/ ۲۴,۲/ ۵۲\times ۱۰^{-۱۳})$<br>$\tilde{x}_{۳} = (-۰/ ۸۸۲,-۰/ ۷۸۱,۹/ ۰۵\times ۱۰^{-۴},۰/ ۱۵۶)$<br>$\tilde{x}_{۴} = (-۰/ ۲۸۳,-۰/ ۲۱۵,۰/ ۵۴۶,۰/ ۵۳۹)$<br>$\tilde{x}_{۵} = (-۲/ ۷۹\times ۱۰^{۱۴},۲/ ۷۹\times ۱۰^{۱۴},۰,۰)$ | ۴/۱۱ | ۰/۶۱۲۶ |
| تقریب مینگ | $\tilde{x}_{۱} = (۰/ ۱۷۵,۰/ ۲۰۴,۰/ ۲۶۳,۱/ ۲۷\times ۱۰^{-۹})$<br>$\tilde{x}_{۲} = (-۰/ ۴۸۲,-۰/ ۴۸۲,۰/ ۲۶۶,۱/ ۰۱\times ۱۰^{-۱۳})$<br>$\tilde{x}_{۳} = (-۰/ ۸۸۱,-۰/ ۷۸۴,۸/ ۵۴۱\times ۱۰^{-۱۳})$<br>$\tilde{x}_{۴} = (-۰/ ۲۸۴,-۰/ ۲۱۴,۰/ ۵۴۳,۰/ ۵۳۷)$<br>$\tilde{x}_{۵} = (-۳/ ۱۴\times ۱۰^{۱۴},۳/ ۱۴\times ۱۰^{۱۴},۰,۰)$ | ۵/۴۲ | ۰/۶۰۲۰ |
| متر پی | $\tilde{x}_{۱} = (۰/ ۱۷۷,۰/ ۲۰۵,۰/ ۲۶۲,۴/ ۵۱\times ۱۰^{-۱۰})$<br>$\tilde{x}_{۲} = (-۰/ ۴۷۱,-۰/ ۴۷۱,۰/ ۲۷۲,۵/ ۹۹\times ۱۰^{-۱۵})$<br>$\tilde{x}_{۳} = (-۰/ ۸۸۶,-۰/ ۷۸۹,۸/ ۸۹\times ۱۰^{-۱۴},۰/ ۱۶۲)$<br>$\tilde{x}_{۴} = (-۰/ ۲۸۵,-۰/ ۲۱۵,۰/ ۵۴۲,۰/ ۵۳۶)$<br>$\tilde{x}_{۵} = (-۸/ ۵۹\times ۱۰^{۱۴},۸/ ۵۹\times ۱۰^{۱۴},۰,۰)$ | ۱۰/۲ | ۰/۵۷۷۴ |

مشابه مثال قبل به کمک روابط (۱۲)، (۱۶) و (۲۰) می‌توان ماتریس‌های متناظر با سه متر معرفی شده را به‌دست آورد. پس از حل مسئله (۵) به کمک نرم‌افزار متلب جواب تقریبی دستگاه (۳۵) به‌دست می‌آید که نتایج آن در جدول ۲ بیان شده است.

با توجه به نتایج جدول ۲ در این حالت نیز مقدار معیار ارزش $\mathrm{r}$ در متر پی از دو متر مینگ و تقریب مینگ کمتر است

## ۴- نتایج محاسباتی

ازآنجایی‌که در مسائل کاربردی، کار با ماتریس‌های با اندازه بزرگ حائز اهمیت است لذا در این بخش برای مقایسه نتایج عددی حاصل از حل دستگاه خطی فازی (۱)، ابتدا به‌صورت تصادفی ماتریس ضرایب حقیقی مقدار $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس مربعی و یا غیر مربعی، کامل و یا غیر کامل تولید می‌شود که در آن $m$ و $n$ از میان دو مجموعه‌ی زیر انتخاب می‌شود

$$M = \{۱۰,۲۰,\ldots,۹۰\}, \qquad \mathrm{L} = \{۱۰۰,۲۰۰,\ldots,۹۰۰\}.$$

**جدول (۳):** مقادیر بهینه حاصل از مترهای مینگ، تقریب مینگ و پی

| $m$ | $n$ | رتبه | $r(x)$–تقریب مینگ | $r(x)$–مینگ | $r(x)$–پی |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۱۰ | کامل | ۴۵/۸۸۱۸۴۵۲۵ | ۲۶/۷۹۴۷۷۲۲ | ۳۵/۸۷۹۸۳۵۲۳ |
| ۴۰ | ۴۰ | کامل | ۳۲۸/۶۳۶۹۲۸۷ | ۲۹۶/۱۷۰۳۷۱ | ۳۴۱/۵۹۲۷۶۳۷ |
| ۷۰ | ۷۰ | کامل | ۵۴۵/۰۱۳۲۵۶۱ | ۴۷۰/۸۶۵۱۸۷ | ۵۲۸/۲۱۶۱۸۶۷ |
| ۱۰ | ۱۰ | ۸ | ۶۳۴۳۰۷۵۰ | ۶۹۲۰۶۱۷۱ | ۸۶۵۳۳۳۷۸ |
| ۴۰ | ۴۰ | ۱۹ | ۶۴۷۷۰۴۹۱۲۳۰ | ۷/۲۴۶۳e+۱۰ | ۹۵۵۴۳۸۵۲۱۷۶ |
| ۷۰ | ۷۰ | ۶۸ | ۱۶۹۰۵۳۴۹۲۳ | ۱۸۲۸۵۷۵۴۱۰ | ۲۲۴۲۸۶۸۹۹۱ |
| ۱۰ | ۱۲ | کامل | ۴۰۲۸۹۸ | ۴۷۱۶۴۲ | ۶۸۳۳۱۰ |
| ۴۰ | ۵۵ | کامل | ۲۸۸۵۴۳۲۷۲ | ۳۱۴۴۳۳۱۳۵ | ۳۹۲۲۱۲۰۸۲ |
| ۷۰ | ۸۰ | کامل | ۷۸۴۳۹۶۴۲۲ | ۸۳۶۱۳۹۵۸۰ | ۹۹۱۵۹۸۰۶۰ |
| ۱۰ | ۱۴ | ۴ | ۳۰۳۹۹۴۰۹۶ | ۳۱۳۹۲۸۹۲۱ | ۳۴۳۷۹۶۳۸۸ |
| ۴۰ | ۵۸ | ۳۸ | ۲۱۷۳۶۷۱۳۵۳۷ | ۲/۲۱۳۲e+۱۰ | ۲۳۳۱۷۷۵۷۱۵۷ |
| ۷۰ | ۱۰۲ | ۵۵ | ۱/۱۲۱۳۲e+۱۲ | ۱/۱۶۹۵e+۱۲ | ۱/۳۱۴۱۱e+۱۲ |
| ۱۱ | ۱۰ | کامل | ۲۱۰/۶۷۶۳۹۸۸ | ۲۶۱/۲۷۹۶۰۳ | ۴۳۵/۲۶۳۰۲۰۱ |
| ۴۸ | ۴۰ | کامل | ۴۴۰۵/۴۷۱۱۸۷ | ۵۱۶۰/۴۵۳۹۴ | ۷۴۶۸/۰۲۵۹۹۸ |
| ۱۰۲ | ۷۰ | کامل | ۹۶۵۹/۰۸۴۶۹۷ | ۱۲۳۰۹/۵۰۷۲ | ۱۹۷۴۰/۷۲۶۰۸ |
| ۱۳ | ۱۰ | ۵ | ۸۴۱۱۶۴۶۷ | ۹۱۵۶۷۲۶۳ | ۱۱۳۹۶۰۷۶۷ |
| ۵۲ | ۴۰ | ۱۵ | ۸۴۹۷۵۶۸۸۷۶۶ | ۹/۱۲۲۹e+۱۰ | ۱/۰۹۹۹۱e+۱۱ |
| ۱۰۰ | ۷۰ | ۳۳ | ۱/۴۵۷۸۵e+۱۲ | ۱/۵۲۶۷e+۱۲ | ۱/۷۳۳۲۲e+۱۲ |
| ۱۰۰ | ۱۰۰ | کامل | ۹۵۲/۹۰۳۸۵ | ۷۹۹/۹۸۵۰۳ | ۹۰۹/۸۹۹۲۵۲۸ |
| ۴۰۰ | ۴۰۰ | کامل | ۴۳۱۳/۵۲۰۸۵۳ | ۳۷۴۴/۲۲۳۸۷ | ۴۱۸۷/۶۹۳۶۹۵ |
| ۷۰۰ | ۷۰۰ | کامل | ۷۷۲۰/۶۹۲۵۳۳ | ۶۵۵۹/۵۳۴۸۳ | ۷۴۸۹/۹۷۰۷۳۸ |
| ۱۰۰ | ۱۰۰ | ۴۱ | ۵/۰۲۰۴۴e+۱۲ | ۵/۱۴۲۱e+۱۲ | ۵/۵۰۷۲۹e+۱۲ |
| ۴۰۰ | ۴۰۰ | ۲۲۷ | ۳/۱۹۴۳۴e+۱۵ | ۳/۲۲۳۵e+۱۵ | ۳/۳۱۰۷۹e+۱۵ |
| ۷۰۰ | ۷۰۰ | ۶۷۴ | ۱/۱۱۵۷۳e+۱۴ | ۱/۱۵۹۲e+۱۴ | ۱/۲۸۹۶۵e+۱۴ |
| ۱۰۰ | ۱۴۰ | کامل | ۱۲۶۲۲۹۵۳۴۳۲ | ۱/۳۰۸۳e+۱۰ | ۱۴۴۶۲۶۸۲۵۸۲ |
| ۴۰۰ | ۵۳۹ | کامل | ۲/۲۹۰۴۸e+۱۲ | ۲/۳۱۸e+۱۲ | ۲/۴۰۰۵۴e+۱۲ |
| ۷۰۰ | ۸۸۱ | کامل | ۱/۱۲۲۹۸e+۱۳ | ۱/۱۳۲۸e+۱۳ | ۱/۱۶۲۱۹e+۱۳ |
| ۱۰۰ | ۱۱۵ | ۱ | ۷۹۵۵۰۲۹۸۸۸۱ | ۸/۲۰۴۱e+۱۰ | ۸۹۵۱۷۷۳۱۴۳۵ |
| ۴۰۰ | ۵۵۸ | ۳۳۴ | ۳/۸۶۷۳۱e+۱۵ | ۳/۸۹۷۶e+۱۵ | ۳/۹۸۸۴۳e+۱۵ |
| ۷۰۰ | ۹۵۷ | ۶۲۱ | ۳/۸۷۹۶۷e+۱۶ | ۳/۹۰۱۲e+۱۶ | ۳/۹۶۵۸۲e+۱۶ |
| ۱۲۰ | ۱۰۰ | کامل | ۹۸۴۳/۷۸۳۷۰۴ | ۱۱۶۱۲/۸۱۶۳ | ۱۶۲۸۰/۰۷۳۹۹ |
| ۴۸۸ | ۴۰۰ | کامل | ۴۴۰۴۴/۹۳۶۳ | ۵۲۷۵۰/۲۷۴۳ | ۷۶۷۲۲/۸۱۸۹۹ |
| ۸۹۶ | ۷۰۰ | کامل | ۹۲۲۹۰/۶۱۸۹۴ | ۱۱۱۳۵۲/۵۸۷ | ۱۶۶۲۷۵/۷۹۸۷ |
| ۱۰۴ | ۱۰۰ | ۵۴ | ۴/۸۵۷۵۲e+۱۲ | ۵/۰۱۱۴e+۱۲ | ۵/۴۷۲۹۹e+۱۲ |
| ۵۹۴ | ۴۰۰ | ۳۴۷ | ۱/۲۳۶۲۴e+۱۵ | ۱/۲۶۵۹e+۱۵ | ۱/۳۵۴۸۳e+۱۵ |
| ۹۴۷ | ۹۴۷ | ۳۲۵ | ۱/۰۳۰۰۲e+۱۷ | ۱/۰۳۴۴e+۱۷ | ۱/۰۴۷۶۸e+۱۷ |

به‌عبارت‌دیگر، در کد نوشته شده برای ماتریس ضرایب $A_{m\times n}$، ۶ نوع ماتریس حقیقی مقدار تصادفی به شرح زیر تولید می‌شود

۱. ماتریس با بعد متوسط (یعنی $m,n \in M$) مربعی و کامل،

۲. ماتریس با بعد متوسط، غیرمربعی و $Rank(A) = \min\{m, n\}$،
۳. ماتریس با بعد متوسط، غیر مربعی و $Rank(A) < \min\{m, n\}$،
۴. ماتریس با بعد بزرگ (یعنی $m, n \in L$) مربعی و کامل،
۵. ماتریس با بعد بزرگ، غیرمربعی و $Rank(A) = \min\{m, n\}$،
۶. ماتریس با بعد بزرگ، غیر مربعی و $Rank(A) < \min\{m, n\}$.

به‌طور مشابه بردار فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{b}_{m\times ۱}$ به‌صورت تصادفی تولید می‌شود. سپس، با استفاده از دستور quadprog و نوشتن کد موردنظر در نرم‌افزار متلب، مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم محدب (۵) در هر یک از سه حالت معرفی شده در بخش ۳ (متر مینگ، تقریب مینگ و متر پی) حل می‌شود. در نهایت، مقادیر بهینه تابع هدف مسئله (۵)، در جدول ۳ و نتایج مقایسه روش‌ها به کمک معیار سنجش (۳۰)، در جدول ۴ قرار گرفته است. لازم به ذکر است که محاسبات توسط رایانه با مشخصات

GB۰۰.۴GHz, RAM: ۲۰.۲M ۲۳۳۰-۳CPU: Intel(R) Core(TM) i

در محیط b۲۰۱۶MATLAB R انجام شده است.

به‌منظور مقایسه بین روش‌ها، نتایج حاصل از معیار سنجش (۳۰) در جدول ۴ آورده شده است.

واضح است با توجه به معیار سنجش (۳۰)، متر پی عملکرد بهتری نسبت به مترهای مینگ و تقریب مینگ داشته است درحالی‌که مقدار بهینه تابع هدف آن در مسئله (۵)، لزوماً نسبت به روش‌های دیگر بهتر نیست. البته لازم به ذکر است که زمانی که ماتریس ضرایب غیر کامل و یا غیر مربعی (m<n) باشد برتری بین سه روش وجود ندارد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، به ارائه روش کمترین مربعات برای دستگاه معادلات خطی فازی (ماتریس ضرایب حقیقی مقدار و بردار سمت راست فازی ذوزنقه‌ای) با در نظر گرفتن سه متر مختلف (مینگ، تقریب مینگ و پی) پرداخته‌ایم. همچنین ثابت کردیم که مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم متناظر با این روش مستقل از نوع متر، مسئله‌ای محدب است. در نهایت، با بیان یک معیار سنجش بر اساس یک تابع رتبه، به مقایسه روش کمترین مربعات با مترهای مختلف مذکور پرداخته‌ایم. نتایج حاصل از این محاسبات نشان داد که روش کمترین مربعات با متر پی بازخورد بهتری نسبت به دو متر دیگر دارد. لازم به ذکر است که محاسبات با در نظر گرفتن ماتریس ضرایب و بردار سمت راست به‌صورت تصادفی و با ابعاد و خواص گوناگون انجام شده است.

**جدول (۴):** مقایسه مقدار ارزش r حاصل از مترهای مینگ، تقریب مینگ و پی

| $m$ | $n$ | رتبه | $r(x)$-تقریب مینگ | $r(x)$-مینگ | $r(x)$-پی |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۱۰ | کامل | ۱/۲۹۹۳۲۳۷۸۶ | ۱/۳۵۷۷۵۳۲۵۲ | ۰/۶۷۵۱۴۲۸۸۲ |
| ۴۰ | ۴۰ | کامل | ۰/۹۴۰۸۳۰۲۴۳ | ۰/۹۸۲۷۱۲۵۷۵ | ۰/۴۸۲۷۷۵۱۵۹ |
| ۷۰ | ۷۰ | کامل | ۱/۲۶۴۴۹۰۶۶۵ | ۱/۴۱۸۳۸۷۱۳۳ | ۰/۶۷۰۹۳۲۸۱۲ |
| ۱۰ | ۱۰ | ۸ | ۱۳۷۹/۷۵ | ۱۳۷۹/۷۵ | ۱۳۷۹/۷۵ |
| ۴۰ | ۴۰ | ۱۹ | ۲۹۴۷۰ | ۲۹۴۷۰ | ۲۹۴۷۰ |
| ۷۰ | ۷۰ | ۶۸ | ۶۱۲۳/۵۸۳۳۳ | ۶۱۲۳/۵۸۳۳۳ | ۶۱۲۳/۵۸۳۳۳ |
| ۱۰ | ۱۲ | کامل | ۱۰۲/۵۸۳۳۳۳ | ۱۰۲/۵۸۳۳۳۳ | ۱۰۲/۵۸۳۳۳۳ |
| ۴۰ | ۵۵ | کامل | ۱۲۳۱/۹۱۶۶۷ | ۱۲۳۱/۹۱۶۶۷ | ۱۲۳۱/۹۱۶۶۷ |
| ۷۰ | ۸۰ | کامل | ۱۴۴۸/۵۸۳۳۳ | ۱۴۴۸/۵۸۳۳۳ | ۱۴۴۸/۵۸۳۳۳ |
| ۱۰ | ۱۴ | ۴ | ۱۵۵۱/۹۱۶۶۷ | ۱۵۵۱/۹۱۶۶۷ | ۱۵۵۱/۹۱۶۶۷ |
| ۴۰ | ۵۸ | ۳۸ | ۱۳۶۴۴/۵۸۳۳ | ۱۳۶۴۴/۵۸۳۳ | ۱۳۶۴۴/۵۸۳۳ |
| ۷۰ | ۱۰۲ | ۵۵ | ۱۱۲۲۰۵/۴۱۶۷ | ۱۱۲۲۰۵/۴۱۶۷ | ۱۱۲۲۰۵/۴۱۶۷ |
| ۱۱ | ۱۰ | کامل | ۳/۶۹۶۹۲۴۷۰۳ | ۳/۶۷۶۸۴۵۳۷۸ | ۳/۷۲۱۴۷۹۷۵۴ |
| ۴۸ | ۴۰ | کامل | ۷/۷۶۰۲۶۲۹۴۵ | ۷/۷۵۸۶۷۶۵۰۱ | ۷/۴۴۲۴۷۶۳۱۳ |
| ۱۰۲ | ۷۰ | کامل | ۱۱/۰۱۵۹۰۱۳۵ | ۱۱/۰۱۲۶۲۸۳۳ | ۱۰/۸۵۹۰۷۶۲۵ |
| ۱۳ | ۱۰ | ۵ | ۱۶۵۰/۶۶۶۶۷ | ۱۶۵۰/۶۶۶۶۷ | ۱۶۵۰/۶۶۶۶۷ |
| ۵۲ | ۴۰ | ۱۵ | ۲۶۷۵۲/۵ | ۲۶۷۵۲/۵ | ۲۶۷۵۲/۵ |
| ۱۰۰ | ۷۰ | ۳۳ | ۵۲۹۳۶ | ۵۲۹۳۶ | ۵۲۹۳۶ |
| ۱۰۰ | ۱۰۰ | کامل | ۱/۶۷۳۳۸۰۰۳۵ | ۱/۸۱۴۴۵۳۱۹۷ | ۰/۸۸۴۷۸۹۱۵ |
| ۴۰۰ | ۴۰۰ | کامل | ۱/۵۳۱۳۳۵۴۵۳ | ۱/۵۴۹۱۹۴۴۸۷ | ۰/۷۶۸۸۲۸۰۹۹ |
| ۷۰۰ | ۷۰۰ | کامل | ۱/۶۰۸۷۷۶۷۶۶ | ۱/۷۲۰۰۲۳۰۹۸ | ۰/۸۳۰۱۲۲۴۰۹ |
| ۱۰۰ | ۱۰۰ | ۴۱ | ۷۹۲۳۸ | ۷۹۲۳۸ | ۷۹۲۳۸ |
| ۴۰۰ | ۴۰۰ | ۲۲۷ | ۸۸۶۵۵۱/۵ | ۸۸۶۵۵۱/۵ | ۸۸۶۵۵۱/۵ |
| ۷۰۰ | ۷۰۰ | ۶۷۴ | ۷۸۱۶۶۷/۹۱۶۷ | ۷۸۱۶۶۷/۹۱۶۷ | ۷۸۱۶۶۷/۹۱۶۷ |
| ۱۰۰ | ۱۴۰ | کامل | ۴۳۵۵/۱۶۶۶۷ | ۴۳۵۵/۱۶۶۶۷ | ۴۳۵۵/۱۶۶۶۷ |
| ۴۰۰ | ۵۳۹ | کامل | ۲۰۹۸۷/۵ | ۲۰۹۸۷/۵ | ۲۰۹۸۷/۵ |
| ۷۰۰ | ۸۸۱ | کامل | ۲۸۲۲۹/۶۶۶۶۷ | ۲۸۲۲۹/۶۶۶۶۷ | ۲۸۲۲۹/۶۶۶۶۷ |
| ۱۰۰ | ۱۱۵ | ۱ | ۸۴۵۰/۳۳۳۳۳ | ۸۴۵۰/۳۳۳۳۳ | ۸۴۵۰/۳۳۳۳۳ |
| ۴۰۰ | ۵۵۸ | ۳۳۴ | ۱۳۴۲۲۶۰/۷۵ | ۱۳۴۲۲۶۰/۷۵ | ۱۳۴۲۲۶۰/۷۵ |
| ۷۰۰ | ۹۵۷ | ۶۲۱ | ۳۳۳۴۲۱۴/۳۳۳ | ۳۳۳۴۲۱۴/۳۳۳ | ۳۳۳۴۲۱۴/۳۳۳ |
| ۱۲۰ | ۱۰۰ | کامل | ۶/۸۴۰۱۸۷۴۲۷ | ۶/۸۴۴۸۹۰۰۹۸ | ۶/۶۹۳۴۳۸۱۶۷ |
| ۴۸۸ | ۴۰۰ | کامل | ۸/۲۱۴۵۱۲۹۷۱ | ۸/۲۱۳۰۵۸۷۳۸ | ۸/۰۷۸۸۱۴۱۲۴ |
| ۸۹۶ | ۷۰۰ | کامل | ۹/۴۱۲۷۹۸۲۴۲ | ۹/۴۱۲۸۱۹۹۳۱ | ۹/۲۶۰۸۴۱۴۱۱ |
| ۱۰۴ | ۱۰۰ | ۵۴ | ۱۰۵۸۱۱/۰۸۳۳ | ۱۰۵۸۱۱/۰۸۳۳ | ۱۰۵۸۱۱/۰۸۳۳ |
| ۵۹۴ | ۴۰۰ | ۳۴۷ | ۸۱۶۴۳۵/۰۸۳۳ | ۸۱۶۴۳۵/۰۸۳۳ | ۸۱۶۴۳۵/۰۸۳۳ |
| ۹۴۷ | ۹۴۷ | ۳۲۵ | ۲۶۳۹۵۵۶ | ۲۶۳۹۵۵۶ | ۲۶۳۹۵۵۶ |

**ضمیمه**

در صفحه ۹ لم ۱,۳ بیان شده است که ماتریس‌های $Q_{۱۱}$ و $Q_{۲۲}$ نیمه معین مثبت هستند. در فرایند اثبات داریم

$$Q_{۱۱} = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-} & B^{+} \end{bmatrix},$$
$$Q_{۲۲} = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ -B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & -B^{-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{-T} \\ -B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-} & -B^{+} \end{bmatrix}.$$

برای اثبات نیمه معین مثبت بودن $Q_{۱۱}$ و $Q_{۲۲}$ کافی است نشان دهیم برای هر بردار $x$، $x^T Q_{۱۱} x \geq ۰$ (و به‌طور مشابه $x^T Q_{۲۲} x \geq ۰$). ابتدا نشان می‌دهیم ماتریس‌های $\begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-} & B^{+} \end{bmatrix}$ نیمه معین مثبت هستند. بر اساس ماتریس‌های $B^{+}$ و $B^{-}$ بردار $x$ را به‌صورت $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ افراز می‌کنیم؛ بنابراین

$$\begin{bmatrix} x_{۱}^T & x_{۲}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{bmatrix} = (x_{۱}^T B^{+T} + x_{۲}^T B^{-T})(B^{+} x_{۱} + B^{-} x_{۲}).$$

با تعریف $y_{۱} = B^{+} x_{۱}$ و $y_{۲} = B^{-} x_{۲}$ رابطه فوق به‌صورت زیر بازتعریف می‌شود

$$\begin{bmatrix} x_{۱}^T & x_{۲}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{bmatrix} = (y_{۱}^T + y_{۲}^T)(y_{۱} + y_{۲}) = z^T z \geq ۰,$$

که در رابطه فوق $z = y_{۱} + y_{۲}$. به‌طور مشابه می‌توان اثبات کرد که ماتریس $\begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix}$ نیز نیمه معین مثبت است پس

$$x^T Q_{۱۱} x = \begin{bmatrix} x_{۱}^T & x_{۲}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{۱}^T & x_{۲}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{+} & B^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{bmatrix} \geq ۰.$$

بنابراین ماتریس $Q_{11}$ نیمه معین مثبت است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که ماتریس $Q_{22}$ نیز نیمه معین مثبت است. در حالت خاص که ماتریس‌های $B^+$ و $B^-$ تک عضوی هستند. مثلاً $B^+ = a$ و $B^- = b$ در این حالت با محاسبات مستقیم داریم

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix},$$

و همچنین

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + b^2 \end{bmatrix},$$

که هر دو ماتریس متقارن هستند و همچنین مقادیر ویژه هر دو ماتریس یکسان و برابر با مقادیر زیر هستند.

$$\lambda_1 = (|\, a \,| - |\, b \,|)^2, \qquad \lambda_2 = (|\, a \,| + |\, b \,|)^2$$

که هر دو نامنفی هستند.

نکته: برای اثبات نیمه معین مثبت بودن عوامل تشکیل دهنده $Q_{11}$ و $Q_{22}$ اثبات نسبتاً ساده‌تری نیز هست. در واقع هر ماتریس به شکل $H = UU^T$ که $U$ یک ماتریس دلخواه با عناصر حقیقی باشد، نیمه معین مثبت است؛ زیرا

$$x^T Hx = x^T UU^T x = (U^T x)^T (U^T x) = y^T y = \|\, y \,\|_2^2 \geq 0,$$

که در رابطه فوق $y = U^T x$ تعریف شده است؛ بنابراین اگر ماتریس‌های زیر را تعریف کنیم

$$U_1 = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ B^{-T} \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} B^{-T} \\ B^{+T} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} B^{+T} \\ -B^{-T} \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} B^{-T} \\ -B^{+T} \end{bmatrix},$$

در این صورت $Q_{11} = U_1 U_1^T + V_1 V_1^T$ و $Q_{22} = U_2 U_2^T + V_2 V_2^T$ به‌صورت مجموعی از دو ماتریس نیمه معین مثبت هستند.

## منابع

[1] John, R. I. and Innocent, P. R. (2005). Modeling uncertainty in clinical diagnosis using fuzzy logic. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, **35**(6), 1340-1350.

[2] Allahviranloo, T. and Babakordi, F. (2017). Algebraic solution of fuzzy linear system as: $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}\tilde{X} = \tilde{Y}$ , *Soft Computing*, **21**(24), 7463-7472.

[3] Jerković, V.M., Mihailović, B. and Malešević, B. (2017). A New Method for Solving Square Fuzzy Linear Systems, in Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017, Springer, 278-289.

[4] Najariyan, M., Mazandarani, M. and John, R. (2017). Type-2 fuzzy linear systems. *Granular Computing*, **2**(3), 175-186.

[5] Senthilkumar, P. and Rajendran, G. (2011). An algorithmic approach to solve fuzzy linear systems. *Journal of Information and Computational Science*, **8**(3), 503-510.

[6] Ezzati, R. (2011). Solving fuzzy linear systems. *Soft computing*,**15**(1), 193-197.

[7] Allahviranloo, T. and Ghanbari, M. (2012). On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory. Applied mathematical modelling, **36**(11), 5360-5379.

[8] Ghanbari, R. (2015). Solutions of fuzzy LR algebraic linear systems using linear programs. *Applied Mathematical Modelling*, **3**(17), 5164-5173.

[9] Babbar, N., Kumar, A. and Bansal, A. (2013). Solving fully fuzzy linear system with arbitrary triangular fuzzy numbers $(m, \alpha, \beta)$, *Soft Computing*, **17**(4), 691-702.

[10] Inearat, L. and Qatanani, N. (2018). Numerical Methods for Solving Fuzzy Linear Systems. *Mathematics*, **6**(19), 1-9.

[11] Ghanbari, R. and Mahdavi-Amiri, N. (2015). Fuzzy LR linear systems: quadratic and least squares models to characterize exact solutions and an algorithm to compute approximate solutions. *Soft Computing*, **19**(1), 205-216.

[12] Ghanbari, R., Mahdavi-Amiri, N. and Yousefpour, R. (2010). Exact and approximate solutions of fuzzy LR linear systems: new algorithms using

a least squares model and the abs approach. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **7**(2), 1-8.

[13] Ezzati, R., Khezerloo, S. and Ziari, S. (2015). Application of parametric form for ranking of fuzzy numbers. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **12**(1), 59-74.

[14] Zimmermann, H. J. (2011). Fuzzy set theory and its applications. Springer Science & Business Media, NewYork.

[15] Ming, M., Friedman, M. and Kandel, A. (1997). General fuzzy least squares. *Fuzzy sets and systems*, **88**(1), 107-118.

[16] Rabiei, M. R., Arghami, N. R., Taheri, S. M. and Sadeghpour, B. (2013). Fuzzy regression model with interval-valued fuzzy input-output data. in Fuzzy System (FUZZ), IEEE International Conference on 2013, 1-7.

[17] Xu, R. and Li, C. (2001). Multidimensional least-squares fitting with a fuzzy model. *Fuzzy sets and systems*, **119**(2), 215-223.

[18] Wang, X. and Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy sets and systems*, **118**(3), 375-385.

[19] Wang, X. and Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). *Fuzzy sets and systems*, **118**(3), 387-405.

# A Generalized Convex Quadratic Programming to Solve Fuzzy Linear System

Omid Solaymani Fard*, Naser Akhoundi**, Mohadeseh RamezanZadeh**, Morteza Gachpazan*

*Department of Applied Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

**Department of Applied Mathematics, Damghan University, Damghan, Iran

**Abstract**

The linear systems are one of the most important tools for modeling real-world phenomena. Because the real-world phenomena are always associated with uncertainty, solving the fuzzy linear system have a great importance. One of the proposed methods to find the exact and approximate solutions of a fuzzy linear system is using the least squares method. In this method, by choosing an arbitrary meter and solving a quadratic programming, they provide an approximate (or exact) solution for the fuzzy linear system. In this paper, at first, we prove that under some conditions and not depending on the selected meter the quadratic programming is convex. Therefore, by considering three different meters and solving several examples, we compare the obtained approximate solutions.

***Keywords***: Fuzzy numbers, Convex quadratic programming, Least squares.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 90C20, 15A06..