# تعمیم مفهوم کارای منصف در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه

داود فروتن‌نیا[۱] و مینا مرآتی

گروه ریاضی، دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۵/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۶

**چکیده:** هدف این مقاله تعمیم مفهوم کارای منصف به‌وسیله معرفی کردن $A$ -کارای منصف است که $A$ ماتریسی با درایه‌های نامنفی است. شرایطی ارائه شده که تضمین می‌دهد رابطه $A$ -غالب منصف، رابطه اولویت منطقی منصف است. بعلاوه ساختار مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف بررسی شده و ثابت شده که مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف زیرمجموعه جواب‌های کارا است ازاین‌رو برای کاهش جواب‌های بهینه پارتو می‌توان از جواب‌های $A$ -کارای منصف استفاده نمود.

**واژه‌های کلیدی:** جواب کارا، نامغلوب، منصف، رابطه اولویت، بهینه‌سازی چندهدفه.

**رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰):** ۹۰C۲۹، ۹۱B۰۸.

## ۱- مقدمه

در بهینه‌سازی چندهدفه‌ی سنتی معمولاً معیارها[۲] غیرقابل مقایسه هستند یعنی معیارهای مختلف ممکن است دارای واحدهای اندازه‌گیری و تفاسیر فیزیکی مختلف داشته باشند. بااین‌وجود بسیاری از کاربردها زمانی رخ می‌دهد که معیارها به‌صورت منصف[۳] در نظر گرفته می‌شود. منصف یعنی اینکه معیارها نه‌تنها به لحاظ مقیاس قابل مقایسه‌اند و در مقیاس مشترک اندازه‌گیری می‌شوند بلکه به شیوه‌ای بی‌طرفانه معیارها مورد رسیدگی قرار می‌گیرند که این مسئله عدالت و انصاف را در میان جواب‌ها به ارمغان می‌آورد؛ بنابراین توزیع خروجی‌ها در میان

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: foroutan@vru.ac.ir

2- Criteria
3- Equitable, Fair

معیارها مهم‌تر از انتصاب خروجی‌ها به معیارهای خاص است، بدین ترتیب این روش تخصیص منصفانه منابع را مدل می‌کند.

اولویت منصف به غالب لورنتس تعمیم‌یافته مشهور است [۲-۱]. کاسترروا و اگریزاک در سال ۱۹۹۹ مفهوم منصف را برای برنامه‌ریزی چندهدفه معرفی کردند [۲]. آن‌ها نشان دادند که کارایی[1] منصف تظریفی از کارایی پارتو بوده که علاوه بر خواص انعکاسی[2]، یکنوایی اکید[3] و تعدی[4] برای اولویت پارتو دارای خواص بی‌طرفی[5] و اصل انتقال[6] است. سپس کاسترروا و همکاران [۳] نظریه کارایی منصف را به‌صورت کلی‌تر ارائه دادند. آن‌ها روش‌های عددی‌سازی را برای تولید جواب‌های کارای منصف در مسائل چندهدفه خطی و غیرخطی توسعه دادند. اگریزاک مفهوم منصف را برای بهینه‌سازی سبد سهام [۴]، مسائل تخصیص [۵] و ارتباطات [۶] به‌کاربرده است. به‌علاوه اگریزاک و همکاران از روش‌های بهینه‌سازی منصف برای مسائل تخصیص منابع در شبکه‌های مخابرات استفاده نموده‌اند [۷]. اخیراً فروتن‌نیا و محمودی‌نژاد [۸] مفهوم $B$-کارای منصف را معرفی کرده که $B$ افرازی از مجموعه اندیس‌های توابع هدف است. آن‌ها برخی از مفاهیم نظری و علمی از جواب‌های $B$-کارای منصف را بحث کرده و نشان دادند که برای مسئله یکسان مجموعه جواب‌های $B$-کارای منصف درون مجموعه جواب‌های کارای منصف قرار دارد.

در اغلب مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به علت تقابل اهداف، جواب شدنی که یک تابع هدف را بهینه می‌کند نمی‌تواند موجب بهینه شدن سایر توابع هدف گردد. تحت چنین شرایطی تصمیم‌گیرنده باید جوابی را اتخاذ نماید که به بهترین نتیجه منجر شود؛ بنابراین در حل یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه دو نوع پیچیدگی مفهومی به نام‌های جستجوی جواب و تصمیم‌گیری مطرح است. ویژگی اول مربوط به فرآیند بهینه‌سازی است که در آن مجموعه‌ای به‌عنوان نمونه‌ای از مجموعه بهینه پارتو شناسایی می‌شود. ویژگی دیگر به چگونگی انتخاب یک جواب سازشی از میان مجموعه جواب بهینه پارتو توسط تصمیم‌گیرنده می‌پردازد. بسته به چگونگی ترکیب فرایندهای بهینه‌سازی و تصمیم‌گیری، روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه را می‌توان به سه گروه تقسیم‌بندی نمود:

۱) تصمیم‌گیری پیش از جستجو: در این حالت، قبل از حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، درجه اهمیت توابع هدف توسط تصمیم‌گیرنده مشخص می‌شود که در اصطلاح به آن

1- Efficiency
2- Reflexivity
3- Strict monotonicity
4- Transitivity
5- Impartiality
6- Principle of transfers

بیان پیشین ترجیحات[1] گفته می‌شود. سپس با استفاده از این ترجیحات مسئله چندهدفه به یک مسئله تک هدفه یا چندهدفه جدید تبدیل می‌شود. ادغام توابع هدف چندگانه توسط تصمیم‌گیرنده در تصمیم‌گیری پیش از جستجو این مزیت را دارد که می‌توان در حل مسئله جدید از روش‌های موجود و مشهور استفاده نمود. مشکل اصلی این رویکرد این است که برای تصمیم‌گیرنده بسیار دشوار خواهد بود که قبل از حل مسئله، ارجحیت‌های خود را به‌صورت عددی، دقیق و مشخص بازگو نماید.

۲) تصمیم‌گیری در حین جستجو: تصمیم‌گیرنده ترجیحات خود را در حین فرآیند بهینه‌سازی تعاملی ابراز می‌دارد. پس از هر گام بهینه‌سازی تعدادی از جواب‌ها به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌شوند. سپس بر اساس این جواب‌ها تصمیم‌گیرنده ترجیحات خود را مشخص می‌نماید و به‌این‌ترتیب فرآیند جستجو هدایت می‌شود. در رویکردهای در حین جستجو، تصمیم‌گیرنده در تمام مراحل فرایند حل مسئله درگیر می‌شود که به آن بیان مترقی از ترجیحات[2] گفته می‌شود.

۳) جستجو پیش از تصمیم‌گیری: در این حالت بهینه‌سازی بدون هیچ‌گونه اطلاعاتی از اولویت‌بندی تصمیم‌گیرنده انجام می‌شود. نتیجه این جستجو مجموعه جواب‌های نامزدی است (که در حالت ایدئال بهینه پارتو هستند) که انتخاب نهایی از میان آن‌ها، توسط تصمیم‌گیرنده صورت می‌پذیرد که در اصطلاح به آن بیان پسین ترجیحات[3] گفته می‌شود.

روش ارائه شده در این مقاله، رویکردی از تصمیم‌گیری پیش از جستجو است که در آن با ادغام توابع هدف و ارائه ماتریس ارجحیت $A$ توسط تصمیم‌گیرنده، مفهوم جواب $A$ -کارای منصف تعریف شده است. چون مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف زیرمجموعه جواب‌های کارا است با استفاده از این مفهوم، جواب‌های کارا کاهش‌یافته و ازاین‌رو تصمیم‌گیرنده می‌تواند جواب مطلوب را آسان‌تر انتخاب کند. همچنین در این مقاله برخی از مفاهیم نظری و علمی جواب‌های $A$ - کارای منصف را بررسی می‌کنیم. نتایج به‌دست‌آمده تعمیمی از نتایج کاسترووا و اگریزاگ [۲]، کاسترووا و همکاران [۳] و فروتن‌نیا و محمودی‌نژاد [۸] است.

1- Priori articulation of preferences
2- Progressive articulation of preferences
3- Posteriori articulation of preferences

**۲- مفاهیم اولیه**

در سراسر این مقاله نمادهای زیر استفاده شده است. فرض کنید $R^m$ فضای برداری اقلیدسی و $y', y'' \in R^m$. $y' \leqq y''$ یعنی $y'_i \leq y''_i$ برای $i = 1, \cdots, m$ و $y' < y''$ یعنی $y'_i < y''_i$ برای $i = 1, \cdots, m$. همچنین $y' \leq y''$ یعنی $y' \leqq y''$ اما $y' \neq y''$.

مسئله بهینه‌سازی با $m$ هدف را در نظر بگیرید

$$\min_{x \in X} \left\{ \left( f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \right) \right\}, \tag{1}$$

که $x$ بردار متغیر تصمیم انتخاب شده از مجموعه شدنی[1] $X$ است و $f(x) = \left( f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x) \right)$ تابع برداری بوده که مجموعه شدنی $X$ را به فضای هدف[2] (معیار) $R^m$ می‌نگارد. عناصر فضای هدف را بردارهای خروجی[3] گوییم. یک بردار خروجی $y$ جذب شدنی است هرگاه $x \in X$ وجود داشته که $y = f(x)$. مجموعه بردارهای خروجی جذب شدنی به‌وسیله $Y = f(X)$ نشان داده می‌شود.

برای انتخاب بهترین تصمیم در مسائل مینیمم سازی تک هدفه، مقادیر هدف را با توجه به رابطه اولویت[4] کوچک‌تر مساوی اعداد حقیقی به ازای تصمیم‌های شدنی متفاوت باهم مقایسه می‌کنیم. تصمیم‌ها مطابق مقادیر هدفشان مرتب شده و تصمیم با کمترین مقدار هدف جواب بهینه نامیده می‌شود. به‌طور مشابه، برای ساختن مدل بهینه‌سازی چندهدفه لازم است که رابطه اولویتی برای ارزیابی مقادیر بردار هدف ارائه شود بدین منظور فرض می‌شود که این اولویت تنها به ارزیابی بردارهای خروجی بستگی دارد؛ بنابراین تعریف رابطه اولویت را به فضای هدف $Y$ محدود می‌کنیم.

در ادامه برخی از مفاهیم اساسی و تعاریف روابط اولویت از [۲] مرور شده است. اولویت‌ها به‌وسیله رابطه اولویت ضعیف[5] $\preceq$ نمایش داده می‌شود که اجازه می‌دهد جفت‌بردارهای خروجی $y'$ و $y''$ از فضای هدف $Y$ را مقایسه کنیم. گوییم $y' \preceq y''$ اگر و تنها اگر $y'$ حداقل به‌خوبی $y''$ باشد یا $y'$ به‌طور ضعیف به $y''$ ترجیح داده شود؛ بنابراین $y' \preceq y''$ یعنی این‌که تصمیم‌گیرنده فکر می‌کند $y'$ حداقل به‌خوبی بردار خروجی $y''$ است. توجه کنید که رابطه اولویت ضعیف $\preceq$ به‌وسیله تصمیم‌گیرنده تعریف می‌شود و از آن می‌توان دو رابطه اولویت $\prec$ و $\simeq$ را به دست آورد.

1- Feasible set
2- Objective space
3- Outcome vectors
4- Preference relation
5- Weak preference

تعریف ۱: فرض کنید $y', y'' \in R^m$ و $\preceq$ رابطه اولویت ضعیف تعریف شده روی $R^m \times R^m$ باشد. رابطه اولویت اکید[1] $\prec$ به‌صورت

$$y' \prec y'' \Leftrightarrow (y' \preceq y'',\ y'' \not\preceq y'), \tag{۲}$$

تعریف می‌شود و می‌خوانیم $y'$ به‌طور اکید به $y''$ ترجیح داده می‌شود. همچنین رابطه بی‌تفاوتی[2] $\simeq$ عبارت است از

$$y' \simeq y'' \Leftrightarrow (y' \preceq y'',\ y'' \preceq y'), \tag{۳}$$

که می‌خوانیم $y'$ بی‌تفاوت با $y''$ است.

تعریف ۲: رابطه اولویتی که در اصـل‌های زیر صـدق کند رابطه اولویت منطقی منصـف[3] نامیده می‌شود

۱) انعکاسی: برای هر $y \in R^m$ داشته باشیم $y \preceq y$.

۲) تعدی: برای هر $y', y'', y''' \in R^m$ داشته باشیم

$$\left( y' \preceq y'',\ y'' \preceq y''' \right) \Rightarrow y' \preceq y'''.$$

۳) یکنوایی اکید: برای $y \in R^m$ و هر $\varepsilon > ۰$ و هر $i \in \{۱, ۲, \cdots, m\}$ داشته باشیم $y - \varepsilon e_i \prec y$ که $e_i$ نشان‌دهنده بردار یکه $i$ام در $R^m$ است.

۴) بی‌طرفی: برای هر $y \in R^m$

$$(y_۱, y_۲, \cdots, y_m) \simeq (y_{\tau(۱)}, y_{\tau(۲)}, \cdots, y_{\tau(m)}),$$

که $\tau$ جایگشتی روی $\{۱, ۲, \cdots, m\}$ است.

۵) اصل انتقال: برای هر $y \in R^m$ و هر $i, j \in \{۱, ۲, \cdots, m\}$

$$y_i > y_j \Rightarrow y - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \preceq y,$$

که $\varepsilon \in [۰, y_i - y_j]$.

توجه کنید رابطه اولویت با اصل‌های انعکاسی، تعدی و یکنوایی اکید رابطه اولویت منطقی نامیده می‌شود. برای هر $y', y'' \in Y$، گوییم $y'$ به‌طور منطقی غالب[4] $y''$ است هرگاه برای هر رابطه

1- Strict preference
2- Indifference relation
3- Equitable rational preference
4- Rationally dominated

اولویت منطقی $\preceq$ داشته باشیم $y' \prec y''$. بردار خروجی $y$ به‌طور منطقی نامغلوب است اگر و تنها اگر بردار خروجی $y'$ وجود نداشته که $y'$ به‌طور منطقی غالب $y$ باشد. همچنین نقطه شدنی $x \in X$ کارا یا بهینه پارتو[1] از مسئله بهینه (۱) است اگر و تنها اگر $y = f(x)$ به‌طور منطقی نامغلوب باشد. کاسترووا و اگریزاگ در [۲] نشان دادند که بردار خروجی $y' \in Y$ به‌طور منطقی غالب $y'' \in Y$ است اگر و تنها اگر $y' \leq y''$؛ بنابراین نقطه $x \in X$ جواب بهینه پارتو از مسئله (۱) است اگر و تنها اگر نقطه $x' \in X$ وجود نداشته که برای $i = ۱,۲,\cdots,m$ داشته باشیم $f_i(x') \leq f_i(x)$ که در آن حداقل یک نامساوی اکید است.

روابط اولویت منطقی منصف به ما اجازه می‌دهد که جواب کارای منصف را تعریف کنیم.

تعریف ۳: فرض کنید $y', y'' \in Y$. گوییم $y'$ به‌طور منصف غالب $y''$ است و آن را با $y' \prec_e y''$ نشان می‌دهیم اگر و تنها اگر برای هر رابطه اولویت منطقی منصف $\preceq$ داشته باشیم $y' \prec y''$. بردار $y$ به‌طور منصف نامغلوب است هرگاه برداری مانند $y'$ وجود نداشته که $y' \prec_e y$. همچنین نقطه $x \in X$ جواب کارای منصف است اگر و تنها اگر $y = f(x)$ به‌طور منصف نامغلوب باشد.

تعریف ۴: فرض کنید $y \in R^m$.

۱) تابع $\Theta : R^m \to R^m$ نگاشت مرتب کننده است هرگاه $\theta(y) = (\theta_۱(y), \theta_۲(y), \cdots, \theta_m(y))$ که $\theta_۱(y) \geq \theta_۲(y) \geq \cdots \geq \theta_m(y)$ و برای جایگشتی مانند $\tau$ از $\{۱,\cdots,m\}$ داریم $\theta_i(y) = y_{\tau(i)}$ $(i = ۱,\cdots,m)$.

۲) تابع $\overline{\Theta} : R^m \to R^m$ نگاشت مرتب کننده جمعی نامیده می‌شود هرگاه $\overline{\Theta}(y) = (\overline{\theta}_۱(y), \overline{\theta}_۲(y), \cdots, \overline{\theta}_m(y))$ که برای $i = ۱,۲,\cdots,m$ داریم $\overline{\theta}_i(y) = \sum_{j=۱}^{i} \theta_j(y)$.

به‌منظور عملی سازی کارایی منصف را می‌توان برحسب نامساوی برداری نوشت.

گزاره ۱: ([۲]، گزاره ۳.۲) برای هر دو بردار خروجی $y', y'' \in Y$ داریم

$$y' \preceq_e y'' \Leftrightarrow \overline{\Theta}(y') \leqq \overline{\Theta}(y''),$$

که $\preceq_e$ در تعریف ۳ بیان شده است.

1- Pareto optimal

## ۳- جواب‌های $A$ -کارای منصف

فرض کنید $I$ ماتریس همانی $m\times m$ و $e_i$ سطر $i$ام ماتریس $I$ باشد ماتریس $\overline{I}$ را که از جمع سطرهای $I$ به‌دست‌آمده، به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\overline{I}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1+e_2 \\ \vdots \\ e_1+e_2+\cdots+e_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

روی این حقیقت متمرکز می‌شویم که مفهوم منصف در برنامه‌ریزی چندهدفه به‌وسیله ماتریس $\overline{I}$ به دست می‌آید چون برای هر بردار خروجی $y\in Y$ داریم $\overline{\Theta}(y)=\overline{I}\theta(y)$. حال اگر بجای $\overline{I}$ ماتریس $\overline{A}$ را که به‌صورت زیر تعریف شده، قرار دهیم مفهوم جواب $A$ -کارای منصف نتیجه می‌شود. فرض کنید $l$ عدد صحیح مثبت و $A=[a_1,a_2,\cdots,a_l]^T$ ماتریس $l\times m$ دلخواه با سطر $i$ام، $a_i$ باشد که توسط تصمیم‌گیرنده ارائه می‌شود. در این صورت ماتریس $\overline{A}$ به شکل زیر است

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+a_2 \\ \vdots \\ a_1+a_2+\cdots+a_l \end{pmatrix}.$$

در این بخش، مفهوم کارایی منصف را به‌وسیله $\overline{A}$ تعمیم می‌دهیم. ابتدا مفهوم جواب $A$ -کارای منصف به‌وسیله رابطه‌های اولویت منطقی منصف را معرفی کرده و سپس شبیه به رابطه غالب منصف، $A$ -غالب منصف را برحسب نامساوی برداری روی بردارهای خروجی مرتب شده بیان می‌کنیم. به‌علاوه شرایطی را ارائه کرده که تضمین می‌دهد رابطه $A$ -غالب منصف یک رابطه اولویت منطقی منصف است.

در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم $A=\left(a_{ij}\right)$ ماتریسی $l\times m$ با $a_{ij}\geq 0$ برای $i=1,2,\cdots,l$ و $j=1,2,\cdots,m$ باشد. تعریف زیر برای مفاهیم جواب موردعلاقه مقاله ضروری است.

تعریف ۵: نگاشت جمعی $A(\Theta):R^m\to R^l$ به‌صورت

$$A(\Theta(y))=\left(\sum_{j=1}^{m}a_{1j}\theta_j(y),\sum_{j=1}^{m}a_{2j}\theta_j(y),\cdots,\sum_{j=1}^{m}a_{lj}\theta_j(y)\right),$$

که $\theta_j$ها همانند تعریف ۴ است.

تعریف ۶: فرض کنید $y', y'' \in Y$ دو بردار خروجی باشند. گوییم $y'$ به‌طور منصف $A$ -غالب $y''$ است و آن را با $y' \prec_{Ae} y''$ نشان می‌دهیم اگر و تنها اگر برای هر رابطه اولویت منطقی منصف $\preceq$ داشته باشیم $A(\Theta(y')) \prec A(\Theta(y''))$.

توجه شود که طبق تعریف ۳، $y' \prec_{Ae} y''$ معادل است با $A(\Theta(y')) \prec_e A(\Theta(y''))$.

تعریف ۷: بردار $y \in Y$ به‌طور منصف $A$ -نامغلوب است هرگاه بردار $y' \in Y$ وجود نداشته که $y' \prec_{Ae} y$. همچنین نقطه شدنی $x \in X$، $A$ -کارای منصف است اگر و تنها اگر $y = f(x)$ به‌طور منصف $A$ -نامغلوب باشد.

شبیه به رابطه $A$ -غالب منصف، می‌توانیم رابطه $A$ -بی‌تفاوتی منصف (بی‌تفاوت برای هر رابطه اولویت منطقی منصف) و رابطه $A$ -غالب ضعیف منصف (اولویت ضعیف برای هر رابطه اولویت منطقی منصف) را تعریف نماییم. رابطه‌های $A$ -غالب منصف $\prec_{Ae}$، $A$ -بی‌تفاوتی منصف $\simeq_{Ae}$ و $A$ -غالب ضعیف منصف $\preceq_{Ae}$ در شرایط (۳-۲) صدق می‌کنند.

برای تعریف $A$ -کارایی منصف برحسب نامساوی برداری از نگاشت مرتب کننده جمعی زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۸: فرض کنید برای $i = 1,2,\cdots,l$ و $j = 1,2,\cdots,m$، $c_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{kj}$. نگاشت مرتب کننده جمعی $\overline{A}(\Theta): R^m \to R^l$ به‌صورت

$$\overline{A}(\Theta(y)) = \left( \sum_{j=1}^{m} c_{1j}\theta_j(y), \sum_{j=1}^{m} c_{2j}\theta_j(y), \cdots, \sum_{j=1}^{m} c_{lj}\theta_j(y) \right),$$

است که $\theta_j$ ها همانند تعریف ۴ است.

تعریف ۹: فرض کنید $y', y'' \in Y$ دو بردار خروجی باشند. رابطه $\leq_{Aie}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$y' \leq_{Aie} y'' \Leftrightarrow \overline{A}(\Theta(y')) \leqq \overline{A}(\Theta(y'')).$$

توجه کنید اگر $A = I$ آنگاه $A(\Theta(y)) = \Theta(y)$ و $\overline{A}(\Theta(y)) = \overline{\Theta}(y)$، بنابراین رابطه $\preceq_{Ae}$ به $\preceq_e$ تبدیل می‌شود.

طبق (۳-۲) رابطه‌های $<_{Aie}$ و $=_{Aie}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$y' <_{Aie} y'' \Leftrightarrow (y' \leq_{Aie} y'', y'' \not\leq_{Aie} y'),$$
$$y' =_{Aie} y'' \Leftrightarrow (y' \leq_{Aie} y'', y'' \leq_{Aie} y').$$

واضح است که رابطه $\leq_{Aie}$ در اصل‌های انعکاسی، تعدی و بی‌طرفی صدق می‌کند. برای بررسی اصل انتقال گزاره زیر لازم است.

گزاره ۲: فرض کنید $x$، $y$ و $w$ بردارهایی در $R^m$ باشند و $w \geqq 0$. اگر $w$ نزولی و

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i \qquad (k = 1, 2, \cdots, m),$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^{m} w_i x_i \leq \sum_{i=1}^{m} w_i y_i.$$

اثبات: قرار دهید $w_{m+1} = 0$. طبق جمع‌وند آبل واضح است که

$$\sum_{i=1}^{m} w_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (w_i - w_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} (w_i - w_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} y_j = \sum_{i=1}^{m} w_i y_i.$$

قضیه ۱: اگر برای هر $i$، $c_{ij}$ نسبت به $j$ نزولی باشد یعنی برای $i = 1, 2, \cdots, l$ داشته باشیم $c_{ij} \geq c_{ij+1}$. همچنین اگر برای $j = 1, 2, \cdots, m$، $c_{lj} > 0$، آنگاه $\leq_{Aie}$ رابطه اولویت منطقی منصف است.

اثبات: فقط خاصیت یکنوایی اکید و اصل انتقال را بررسی کنیم. فرض کنید $y \in R^m$ و $\varepsilon > 0$ و $y' = y - \varepsilon e_k$. به‌راحتی می‌توان نشان داد

$$\theta_j(y') \leq \theta_j(y), \qquad (j = 1, 2, \cdots, m), \tag{۴}$$

که در آن حداقل یک نامساوی به‌صورت اکید برقرار است. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنید $y$ نزولی و به‌صورت زیر باشد

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_k \geq \cdots \geq y_m.$$

طبق تعریف $y'$ برای $j$ هایی که $1 \leq j \leq k-1$ داریم $\theta_j(y') = y_j = \theta_j(y)$، همچنین برای $j$ هایی که $y_k - \varepsilon \geq y_j$ داریم $\theta_j(y') = \theta_j(y)$. حال اگر $y_j$ های بین $y_k - \varepsilon$ و $y_k$ به‌صورت زیر باشد

$$y_k \geq y_{j_1} \geq y_{j_2} \geq \cdots \geq y_{j_t} \geq y_k - \varepsilon,$$

آنگاه برای هر $1\leq i\leq t+1$ داریم $\theta_{k+i-1}(y')=y_{j_i}\leq y_{j_{i-1}}=\theta_{k+i-1}(y)$ که $y_{j_0}=y_k$ و $\theta_{k+t}(y')=y_k-\varepsilon$. همچنین چون $\varepsilon>0$ حداقل یک نامساوی در (۴) به‌صورت اکید برقرار است. چون برای هر $i$ و $j$ داریم $c_{ij}\geq 0$ از رابطه (۴) نتیجه می‌شود که

$$\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\theta_j(y')\leq\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\theta_j(y),\qquad (i=1,2,\cdots,l),$$

و چون برای $j=1,2,\cdots,m$ ، $c_{lj}>0$

$$\sum_{j=1}^{m}c_{lj}\theta_j(y')<\sum_{j=1}^{m}c_{lj}\theta_j(y).$$

ازاین‌رو $y'\leq_{Aie} y$ و رابطه اولویت $\leq_{Aie}$ دارای خاصیت یکنوایی اکید است.

در ادامه اصل انتقال را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $y\in Y$ و $y_i>y_j$ و $y'=y-\epsilon e_i+\epsilon e_j$ که $0\leq\epsilon\leq y_i-y_j$. نشان می‌دهیم $\overline{A}(\Theta(y'))\leqq\overline{A}(\Theta(y))$. چون رابطه اولویت معرفی شده به‌وسیله $\overline{\Theta}$ در اصل انتقال صدق می‌کند $\overline{\Theta}(y')\leqq\overline{\Theta}(y)$. ازاین‌رو

$$\sum_{j=1}^{i}\theta_j(y')\leq\sum_{j=1}^{i}\theta_j(y),\qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

با بکار بردن گزاره ۲ داریم

$$\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\theta_j(y')\leq\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\theta_j(y).$$

این یعنی $y'\leq_{Aie} y$ و رابطه اولویت $\leq_{Aie}$ دارای خاصیت اصل انتقال است.

در حالت کلی رابطه اولویت $\leq_{Aie}$ در اصل انتقال صدق نمی‌کند. درستی این ادعا به‌وسیله مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۱: فرض کنید $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$ و $y=(4,2)^T$. اگر $\varepsilon=0/9$ و $y'=y-\varepsilon e_1+\varepsilon e_2$ آنگاه $y'=(3/1,2/9)^T$. چون $\overline{A}(\Theta(y))=(4,6,8)^T$ و $\overline{A}(\Theta(y'))=(3/1,6,8/9)^T$ ، داریم $\overline{A}(\Theta(y'))\nleqq\overline{A}(\Theta(y))$ پس $y'\nleq_{Aie} y$.

در ادامه رابطه بین اولویت‌های $\preceq_{Ae}$ و $\leq_{Aie}$ را بررسی می‌کنیم برای انجام این کار گزاره زیر لازم است.

گزاره ۳: فرض کنید برای $i=1,2,\cdots,l$ و $j=1,2,\cdots,m$ داشته باشیم $r_{ij}=\sum_{k=1}^{j}a_{ik}$. اگر برای $j=1,2,\cdots,m$ ، $r_{ij}$ نسبت به $i$ نزولی است آنگاه برای هر $y\in R^m$ ، $A(\Theta(y))$ نزولی باشد.

اثبات: قرار دهید $\theta_{m+1}(y)=0$ و $r_{i0}=0$ ، با بکار بردن جمع‌وند آبل داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\theta_j(y) &= \sum_{j=1}^{m}\left(r_{ij}-r_{i(j-1)}\right)\theta_j(y)\\ &= \sum_{j=1}^{m}r_{ij}\theta_j(y)-\sum_{j=0}^{m-1}r_{ij}\theta_{j+1}(y)\\ &= \sum_{j=1}^{m}r_{ij}\left(\theta_j(y)-\theta_{j+1}(y)\right).\end{aligned}$$

اگر برای $j=1,2,\cdots,m$ ، $r_{ij}$ نسبت به $i$ نزولی باشد آنگاه

$$\begin{aligned}\left(A(\theta(y))\right)_i &= \sum_{j=1}^{m}a_{ij}\theta_j(y)\\ &= \sum_{j=1}^{m}r_{ij}\left(\theta_j(y)-\theta_{j+1}(y)\right)\geq\\ &\sum_{j=1}^{m}r_{(i+1)j}\left(\theta_j(y)-\theta_{j+1}(y)\right)=\left(A(\theta(y))\right)_{i+1},\end{aligned}$$

این یعنی $A(\Theta(y))$ نزولی است.

قضیه ۲: فرض کنید برای $j=1,2,\cdots,m$ ، $r_{ij}$ نسبت به $i$ نزولی باشد و $y',y''\in Y$. آنگاه

$$\begin{aligned}y'\preceq_{Ae} y'' &\Leftrightarrow y'\leq_{Aie} y'',\\ y'\prec_{Ae} y'' &\Leftrightarrow y'<_{Aie} y''.\end{aligned}$$

اثبات: از گزاره ۳ می‌توان گفت که برای هر $y\in Y$ ، بردار $A(\Theta(y))$ نزولی است بنابراین

$$\sum_{j=1}^{m}a_{1j}\theta_j(y)\geq\sum_{j=1}^{m}a_{2j}\theta_j(y)\geq\cdots\geq\sum_{j=1}^{m}a_{mj}\theta_j(y),$$

و $\bar{\Theta}(A(\Theta(y)))=\bar{A}(\Theta(y))$. فرض کنید $y',y''\in Y$ ، با بکار بردن تعریف ۳ و گزاره ۱ داریم

$$\begin{aligned} y' \preceq_{Ae} y'' &\Leftrightarrow A(\Theta(y')) \preceq_e A(\Theta(y'')) \\ &\Leftrightarrow \bar{\Theta}(A(\Theta(y'))) \leqq \bar{\Theta}(A(\Theta(y''))) \\ &\Leftrightarrow \bar{A}(\Theta(y')) \leqq \bar{A}(\Theta(y'')) \\ &\Leftrightarrow y' \leq_{Aie} y''. \end{aligned}$$

با روشی مشابه قسمت بعدی اثبات می‌شود.

در حالت کلی برای هر ماتریس $A$ قضیه ۲ درست نیست و شرط نزولی بودن $r_{ij}$ نسبت به $i$ برای $j=۱,۲,\cdots,m$ ضروری است. این حقیقت به‌وسیله مثال زیر بررسی شده است.

مثال ۲: ماتریس $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ در شرط نزولی بودن $r_{ij}$ نسبت به $i$ صدق نمی‌کند چون $r_{۱۳} < r_{۲۳}$. اگر $y'=(۴,۲,۱)^T$ و $y''=(۳/۵,۳,۲)^T$. واضح است که $A(\Theta(y'))=(۴,۳)^T$ و $A(\Theta(y''))=(۳/۵,۵)^T$، چون $\bar{\Theta}\left(A(\Theta(y'))\right)=(۴,۷)^T$ و $\bar{\Theta}\left(A(\Theta(y''))\right)=(۵,۸/۵)^T$ داریم $\bar{\Theta}\left(A(\Theta(y'))\right) \leq \bar{\Theta}\left(A(\Theta(y''))\right)$؛ بنابراین از گزاره ۱ نتیجه می‌شود که $A(\Theta(y')) \preceq_e A(\Theta(y''))$ و $y' \preceq_{Ae} y''$. از طرفی چون $\bar{A}(\Theta(y'))=(۴,۷)$ و $\bar{A}(\Theta(y''))=(۳/۵,۸/۵)^T$ می‌توان گفت $y' \not\leq_{Aie} y''$.

در ادامه برای برقراری قضـــیه‌های ۱ و ۲، فرض می‌کنیم $A=\left(a_{ij}\right)$ ماتریســـی با درایه‌های نامنفی باشد به‌طوری‌که

۱) برای $i=۱,۲,\cdots,l$، $c_{ij}$ نسـبت به $j$ نزولی باشـد و همچنین برای $j=۱,۲,\cdots,m$، $c_{lj}>۰$.

۲) برای $j=۱,۲,\cdots,m$، $r_{ij}$ نسبت به $i$ نزولی باشد.

شرط (۱) تضمین می‌کند که $\leq_{Aie}$ رابطه اولویت منطقی منصف است، درحالی‌که معادل بودن رابطه‌های اولویت $\preceq_{Ae}$ و $\leq_{Aie}$ از شرط (۲) نتیجه می‌شود.

با بکار بردن قضیه ۲ و تعریف ۹، نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۱: برای هر دو بردار خروجی $y',y'' \in Y$ داریم

$$\begin{aligned} y' \preceq_{Ae} y'' &\Leftrightarrow \bar{A}(\Theta(y')) \leqq \bar{A}(\Theta(y'')), \\ y' \prec_{Ae} y'' &\Leftrightarrow \bar{A}(\Theta(y')) \leq \bar{A}(\Theta(y'')). \end{aligned}$$

فرض کنید $l \leq m$ و $B=\{B_۱,B_۲,\cdots,B_l\}$ افرازی از مجموعه $\{۱,۲,\cdots,m\}$ باشد که

$$\max B_k < \min B_{k+۱}, \qquad k=۱,۲,\cdots,l-۱.$$

مفهوم $B$ - کارایی منصــف در [۸] معرفی شـــده اســـت. اگر ماتریس $A=\left(a_{ij}\right)$ برای $i=۱,۲,\cdots,l$ و $j=۱,۲,\cdots,m$ ، به‌وسیله

$$a_{ij}=\begin{cases} ۱ & j\in B_i \\ ۰ & j\notin B_i, \end{cases} \qquad (۵)$$

تعریف شود. آنگاه $A(\Theta(y))=\Theta_B(y)$ و $\overline{A}(\Theta(y))=\overline{\Theta}_B(y)$ ، ازاین‌رو نتایج [۸] به د ست می‌آید. توجه کنید برای ماتریس $A$ شرط (۱) برقرار بوده درحالی‌که شرط (۲) برقرار است اگر و تنها اگر $|B_1|\geq|B_2|\geq\cdots\geq|B_l|$.

ملاحظه ۱: اگر $A=I$ ، گزاره ۳.۲ از [۲] نتیجه می‌شـــود. همچنین اگر ماتریس $A$ مانند (۵) تعریف شود آنگاه نتیجه ۱ از [۸] به دست می‌آید.

توجه شود که نتیجه ۱ اجازه می‌دهد که $A$ -کارایی منصف برای مسئله (۱) را برحسب کارایی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه‌ی

$$\min\{\overline{A}(\Theta(f(x))):x\in X\}, \qquad (۶)$$

بیان کنیم.

قضیه ۳: نقطه شدنی $x\in X$ جواب $A$ -کارای منصف مسئله چندهدفه (۱) است اگر و تنها اگر آن جواب کارای مسئله چندهدفه (۶) باشد.

اثبات: با بکار بردن نتیجه ۱ اثبات بدیهی است. ■

ملاحظه ۲: اگر $A=I$ ، گزاره ۲.۲ از [۲] نتیجه می‌شـــود. همچنین اگر ماتریس $A$ مانند (۵) تعریف شده باشد آنگاه قضیه ۲ از [۸] به دست می‌آید.

رابطه بین جواب‌های $A$ -کارای منصف و جواب‌های کارای منصف در قضیه زیر برر سی شده است.

قضـــیه ۴: فرض کنید $x\in X$ نقطه شـــدنی باشـــد. اگر $x$ جواب $A$ -کارای منصـــف مســـئله چندهدفه (۱) باشد آنگاه آن جواب کارای منصف مسئله چندهدفه (۱) است.

اثبات: فرض کنید $x$ جواب $A$ -کارای منصف مسئله چندهدفه (۱) باشد. اگر $x$ جواب کارای منصـف مسـئله چندهدفه (۱) نباشـد آنگاه نقطه شـدنی $x'$ وجود داشـته که برای بردارهای $y=f(x)$ و $y'=f(x')$ داریم $y'\prec_e y$ ؛ بنابراین طبق گزاره ۱، $\overline{\Theta}(y')\leq\overline{\Theta}(y)$. چون $c_{ij}$ نسبت به $j$ نزولی است از گزاره ۲ نتیجه می‌شود

$$\sum_{j=۱}^{m} c_{ij}\theta_j(y') \leq \sum_{j=۱}^{m} c_{ij}\theta_j(y).$$

ازاین‌رو $y' <_{Aie} y$ و طبق نتیجه ۱ داریم $y' \prec_{Ae} y$ که این با فرض جواب $A$ -کارای منصف بودن $x$ تناقض دارد.

قضـیه ۴ به ما می‌گوید که مجموعه جواب‌های $A$ -کارا زیرمجموعه جواب‌های کارای منصـف است اما در حالت کلی عکس این شمول برقرار نیست.

ساختار غالب منصف به‌وسیله کاسترِوا و اگریزک بحث شده است [۲]. آن‌ها نشان دادند که هر جواب کارای منصـف یک جواب کارا اسـت بنابراین طبق قضـیه ۴ مجموعه جواب‌های $A$ -کارا منصـف نیز زیرمجموعه‌ای از جواب‌های کارا اسـت. به‌وسـیله مثال ۱.۲ از [۲] می‌توان مؤثری رابطه $A$ -غالب منصف را نسبت به رابطه غالب منصف بررسی نمود.

مثال ۳: مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\min\left\{(x_۱, x_۲) : ۴x_۱ + ۵x_۲ \geq ۷۲,\ x_۱ \geq ۰, ۰ \leq x_۲ \leq \frac{۷۲}{۵}\right\}.$$

اگر $A=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ ، آنگاه واضح است که

$$E = \left\{(x_۱, x_۲) : ۴x_۱ + ۵x_۲ = ۷۲,\ x_۱ \geq ۰,\ x_۲ \geq ۰\right\},$$
$$F = \left\{(x_۱, x_۲) : ۴x_۱ + ۵x_۲ = ۷۲, ۰ \leq x_۱ \leq ۸, ۸ \leq x_۲ \leq \frac{۷۲}{۵}\right\},$$

و $G = \left\{\left(۰, \frac{۷۲}{۵}\right)\right\}$ به ترتیب مجموعه جواب‌های کارا، مجموعه جواب‌های کارای منصـف و مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف می‌باشند؛ بنابراین $G \subsetneq F \subsetneq E$.

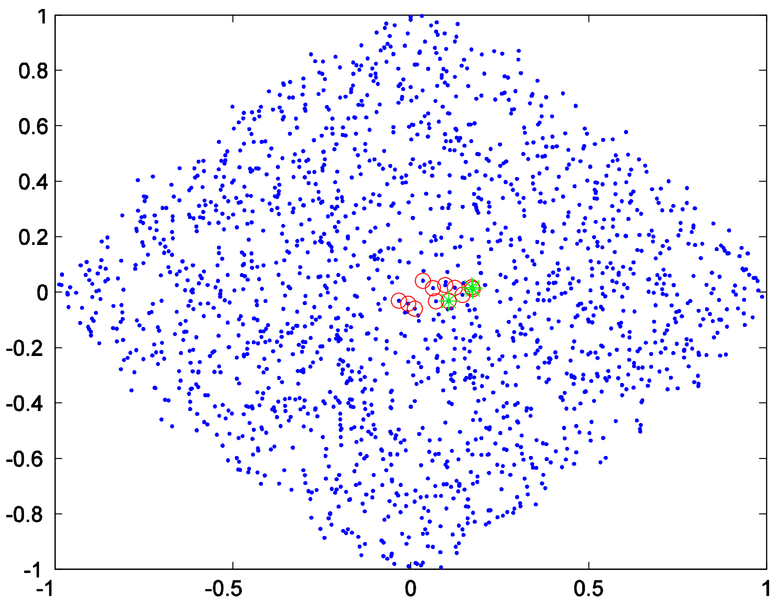
در مثال زیر تعداد زیادی از جواب‌های تصـادفی برای تسـت تولید شـده اسـت. از این مجموعه بزرگ از جواب‌ها، جواب‌های نامغلوب نســبت به رابطه‌های غالب منطقی (غالب پارتو)، غالب منصف و $A$ -غالب منصف محاسبه شده است. در این مثال با بکار بردن قضیه ۳ نشان می‌دهیم که از جواب‌های $A$ -کارای منصف می‌توان برای کاهش جواب‌های منصف و بهینه پارتو استفاده نمود.

مثال ۴: مسئله زیر را در نظر بگیرید [۹]،

$$\begin{aligned}
\min_{x\in R^{۲}} \quad & y=\{ f_{۱}(x), f_{۲}(x), f_{۳}(x), f_{۴}(x), f_{۵}(x), f_{۶}(x)\} \\
& f_{۱}(x)=x_{۱}^{۲}+(x_{۲}+۱)^{۲} \\
& f_{۲}(x)=(x_{۱}-۰/۵)^{۲}+(x_{۲}+۰/۵)^{۲} \\
& f_{۳}(x)=(x_{۱}-۱)^{۲}+x_{۲}^{۲} \\
& f_{۴}(x)=(x_{۱}+۱)^{۲}+x_{۲}^{۲} \\
& f_{۵}(x)=(x_{۱}-۰/۵)^{۲}+(x_{۲}-۰/۵)^{۲} \\
& f_{۶}(x)=x_{۱}^{۲}+(x_{۲}-۱)^{۲} \\
& x_{۱},x_{۲}\in[-۱,۱].
\end{aligned}$$

با استفاده از نرم‌افزار مطلب از بین ۳۰۰۰ جواب تصادفی با مقایسه دوبه‌دوی مقدار توابع هدف، ۱۷۸۹ جواب به‌طور منطقی نامغلوب (نقطه آبی) به‌دست‌آمده است. طبق ملاحظه ۲، ۱۲ جواب نامغلوب منصف (دایره قرمز) از مقایسه توابع هدف $\overline{\Theta}(f(x))$ و به‌وسیله قضیه ۳، ۳ جواب $A$-نامغلوب منصف (ستاره سبز) از مقایسه توابع هدف $\overline{A}(\Theta(f(x)))$ به‌دست‌آمده است که

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$




**شکل (۱):** پیشانی پارتو، منصف و $A$-غالب منصف را در فضای هدف نشان می‌دهد.

## ۴- ساختار مجموعه $A$ -کارای منصف

در این بخش ساختار مجموعه $A$ -کارای منصف را بررسی می‌کنیم. برای این هدف مسئله (۱) را به‌عنوان مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی در نظر می‌گیریم. فرض کنید $X \subset R^n$ نشان‌دهنده مجموعه شدنی تعریف شده به‌وسیله دستگاه معادلات خطی و توابع هدف

$$f_i(x) = \gamma_i x \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

باشد که $\gamma_i^T \in R^n$. در قضیه ۳ هم‌ارزی بین جواب‌های $A$ -کارای منصف از مسئله (۱) و جواب‌های کارای مسئله چندهدفه (۶) بحث شده است.

اکنون از این نتیجه برای شرح دادن ساختار مجموعه $A$ -کارای منصف استفاده می‌کنیم. چون $c_{ij}$ نسبت به $j$ نزولی است

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\theta_j(y) = \max_{\tau\in\Pi}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, y_{\tau(j)}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, l), \tag{۷}$$

که $\Pi$ نشان‌دهنده مجموعه همه جایگشت‌های $\tau$ از مجموعه $\{1, 2, \cdots, m\}$ است؛ بنابراین مسئله (۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} &\min\left(z_1, z_2, \cdots, z_l\right)\\ &\textit{subject to}\\ &x \in X,\\ &y_i = \gamma_i x, \quad i = 1, 2, \cdots, m,\\ &z_i \ge \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, y_{\tau(j)}, \quad \tau\in\Pi\,; i = 1, 2, \cdots, l. \end{aligned} \tag{۸}$$

قرار دهید $z = \left(z_1, z_2, \cdots, z_l\right)$. طبق (۷)، مسئله بالا با مسئله (۶) معادل است؛ بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه ۵: فرض کنید $\Gamma$ ماتریسی $m\times n$ با سطرهای $\gamma_i$ باشد. سه‌تایی $\left(x, y, z\right)$ یک جواب کارا از مسئله (۸) است اگر و تنها اگر $y = \Gamma x$ ، $z = \overline{A}(\Theta(y))$ و $x$ جواب کارایی از مسئله (۶) باشد.

ملاحظه ۳: اگر $A = I$ ، گزاره ۱.۴ از [۲] نتیجه می‌شود. همچنین اگر ماتریس $A$ مانند (۵) تعریف شده باشد آنگاه قضیه ۴ از [۸] به دست می‌آید.

در ادامه این سـؤال مطرح می‌شـود که تحت چه شـرایطی جواب‌های $A$ -کارای منصـف وجود دارند. برای پاسخ این سؤال، قضیه زیر لازم است.

قضیه ۶: (قضیه ۶.۵، [۱۰]) اگر $X \neq \varnothing$ و $y^{\circ} \in Y$ وجود داشته که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $y^{\circ} \leq \Gamma x$ ، آنگاه جواب کارایی از مسئله (۱) وجود دارد.

گزاره زیر برخی شرایط کافی برای وجود جواب‌های $A$ -کارای منصف را فراهم می‌کند.

قضیه ۷: اگر $X \neq \varnothing$ و $y^{\circ} \in Y$ وجود داشته که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $y^{\circ} \preceq_{Ae} \Gamma x$ ، آنگاه جواب $A$ -کارایی منصف از مسئله (۱) وجود دارد.

اثبات: طبق نتیجه ۱، برای هر $x \in X$ داریم $z^{\circ} = \overline{A}(\Theta(y^{\circ})) \leqq \overline{A}(\Theta(\Gamma x))$ ؛ بنابراین برای هر بردار $z$ از مسئله (۸) که به‌وسیله قضیه ۵ با مسئله (۶) معادل است، داریم $z^{\circ} \leqq z$ .
ازاین‌رو به‌وسیله قضیه ۶، جواب کارای $x^{\circ}$ از مسئله (۸) وجود دارد؛ بنابراین با بکار بردن نتیجه ۱ می‌توان گفت که $x^{\circ}$ جواب $A$ -کارای منصف مسئله (۱) است.

ملاحظه ۴: اگر $A = I$ ، گزاره ۳.۴ از [۲] نتیجه می‌شـــود. همچنین اگر ماتریس $A$ مانند (۵) تعریف شده باشد آنگاه قضیه ۶ از [۸] به دست می‌آید.

گزاره ۴.۴ از [۲] به ما می‌گوید که اگر جواب کارایی از مســـئله (۱) وجود داشـــته، آنگاه جواب کارای منصــفی از مســئله (۱) وجود دارد. ازاین‌رو مجموعه جواب‌های $I$ -کارای منصــف ناتهی است که $I$ ماتریس همانی می‌باشد.

علاوه بر وجود جواب‌های $A$ -کارای منصـــف، این حقیقت که مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف همبند است را بررسی می‌نماییم. برای این کار به قضیه زیر نیاز داریم.

قضیه ۸: (قضیه ۳.۲، [۱۱]) اگر مجموعه جواب‌های کارا از مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی ناتهی باشد آنگاه این مجموعه همبند است.

قضـــیه ۹: اگر مجموعه جواب‌های کارای مســـئله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی (۸) ناتهی باشـــد. آنگاه مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف مسئله (۱) همبند است.

اثبات: مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف مسئله (۱) با مجموعه جواب‌های کارای مسئله (۶) مساوی است و طبق قضیه ۵، جواب‌های کارای مسئله (۶) با جواب‌های کارای (۸) در تناظر یک‌به‌یک است. حال چون (۸) مسئله بهینه‌سازی چندهدفه خطی بوده، طبق قضیه ۹ مجموعه کارای آن همبند است.

ملاحظه ۵: اگر $A = I$ ، گزاره ۵.۴ از [۲] نتیجه می‌شـــود. همچنین اگر ماتریس $A$ مانند (۵) تعریف شده باشد آنگاه قضیه ۸ از [۸] به دست می‌آید.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مفهوم کارایی منصف را به‌وسیله ماتریس $\overline{A}$ تعمیم داده‌ایم. مشکلی که گاهی اوقات در بهینه‌سازی چندهدفه رخ می‌دهد وجود یک مجموعه بزرگ از جواب‌های کارای منصف است. ازاین‌رو تصمیم‌گیری برای انتخاب یک جواب ترجیح داده شده منحصربه‌فرد مشکل است. مدل بررسی شده با $A$ -کارای منصف این مشکل را به‌وسیله کوچک‌تر کردن مجموعه جواب آسان می‌کند، چون مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف از یک مسئله زیرمجموعه جواب‌های کارای منصف برای همان مسئله است. به‌علاوه، بعضی از خواص جواب‌های $A$ -کارای منصف مانند وجود جواب و همبندی مجموعه جواب‌های $A$ -کارای منصف را بررسی کرده‌ایم.

## منابع


[1] Lorenz, M.O. (1905). Methods of measuring the concentration of wealth, *American Statistical Association*, *New Series*, **70**, 209–219.

[2]. Kostreva, M.M. and Ogryczak, W. (1999). Linear optimization with multiple equitable criteria, *RAIRO-Operations Research*, **33** (3), 275–297.

[3]. Kostreva, M.M., Ogryczak, W. and Wierzbicki, A. (2004). Equitable aggregations and multiple criteria analysis, *European Journal of Operational Research*, **158** (2), 362–377.

[4]. Ogryczak, W. (2000). Multiple criteria linear programming model for portfolio selection, *Annals of Operations Research*, **97**, 143–162.

[5]. Ogryczak, W. (2000). Inequality measures and equitable approaches to location problems, *European Journal of Operational Research*, **122** (2), 374–391.

[6]. Ogryczak, W., Wierzbicki, A. and Milewski, M. (2008). A multi-criteria approach to fair and efficient bandwidth allocation, *Omega*, **36** (3), 451–463.

[7]. Ogryczak, W., Luss, H., Pióro Michałand Nace, D. and Tomaszewski, A. (2014). Fair optimization and networks: A survey, *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, ID 340913.

[8]. Foroutannia D. and Mahmodinejad, A. (2017). The concept of $B$ -

efficient solution in fair multiob jective optimization problems, *Iranian Journal* of Numerical *Analysis* and *Optimization*, **7**(1), 47–64.

[9]. Farina M. and Amato, P. (2002). On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems, *In Proceedings of the NAFIPS-FLINT International Conference*, 233–238.

[10]. Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization*, Berlin: Springer Verlag.

[11]. Luc, D.T. (1989). *Theory of Vector Optimization,* Berlin: Springer Verlag.

# Generalization of the Concept of Equitable Efficiency in Multi-objective Optimization Problems

Davood Foroutan Nia, Mina Merati

Department of Mathematics, Vali Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

Abstract

The main purpose of the paper is to generalize the concept of equitable efficiency by introducing the concept of equitable $A$-efficiency, where $A$ is an arbitrary matrix with non-negative entries. Two conditions are provided to ensure that the relation of equitable $A$-dominance is an equitable rational preference relation. Furthermore the structure of equitably $A$-efficient set is investigated and is proved that the set of equitably $A$-efficient solutions is contained within the set of efficient. Hence to reduce Pareto-optimal solutions, we can use equitably $A$-efficient solutions.

***Keywords***: Efficient solution, Non-dominated, Equitable, Preference relation, Multi-objective optimization.

**Mathematics Subject Classification (2010)**: 90C29, 91B08.