بازنگری رهیافت نارایانا بر قضیه چانگ ـ فِلِر

سید محسن قریشی شهرکی[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۷/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۰

چکیده: نارایانا[۲] با به کار بردن جایگشت‌های دوری رابطه بین مساحت ناحیه زیر مسیرهای شمالی ـ شرقی از مبدأ به نقطه (n,n) و تعداد نقیصه‌های[۳] آن‌ها را موردبررسی قرار داد و از این طریق اثباتی برای قضیه معروف چانگ ـ فلر[۴] ارائه نمود. در این مقاله با بازنگری رهیافت نارایانا، اثبات‌هایی کوتاه بر قضایای نارایانا و چانگ ـ فلر ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: اعداد کاتالان، مسیر شمالی-شرقی، نقیصه

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۰۵A۱۵.

۱-مقدمه

فرض کنید $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ یک زیرمجموعه متناهی از بردارهایی در $\mathbb{Z}^2$ باشد. یک مسیر شبکه‌ای P از طول n با گام‌هایی در V، دنباله‌ای به‌صورت $(p_0,p_1,\ldots,p_n)$ در $\mathbb{Z}^2$ است که $p_{i+1}-p_i\in V$. یک مسیر دایک مسیری شبکه‌ای است که تنها دارای گام‌های شرقی $(1,0)$ و گام‌های شمالی $(0,1)$ است. از مهم‌ترین مسیرهای دایک، می‌توان به مسیرهای کاتالان اشاره کرد. یک مسیر دایک که از مبدأ $(0,0)$ شروع می‌شود، متشکل از n گام شمالی و n گام شرقی است و $2r$ گام آن بالای خط $x=y$ قرار دارد مسیر کاتالان با r نقیصه نامیده می‌شود. به‌وضوح چنین مسیری در نقطه (n,n) خاتمه می‌یابد و $0\le r\le n$. یکی از مهم‌ترین قضایا در این رابطه قضیه زیر است [۱ و ۵].

---

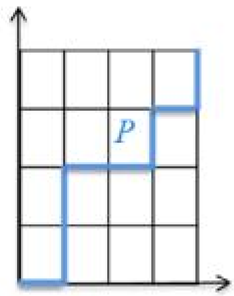
[۱]- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.ghoraishi@scu.ac.ir

2- Narayana
3- flaw
4- Chung-Feller

قضیه (چانگ ـ فلر). تعداد مسیرهای کاتالان به طول $۲n$ و با r نقیصه، مستقل از r و برابر با nاُمین عدد کاتالان یعنی $C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ است.

نارایانا در [۷] با به کار بردن جایگشت‌های دوری به مطالعه رابطه‌ای بین مساحت ناحیه زیر یک مسیر شمالی ـ شرقی و تعداد نقیصه‌های آن پرداخت. رهیافت وی بدین قرار است: فرض کنید $C(n)$مجموعه تمامی مسیرهای شمالی ـ شرقی از $(۰,۰)$ به (n,n) باشد و قرار دهید:

$$\mathrm{N}(n)=\{(a_۱,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n \mid ۰\le a_۱\le\cdots\le a_n\le n\}.$$



شکل (۱): مسیر شمالی ـ شرقی متناظر با بردار $(۰,۱,۳,۳)\in N(۴)$

به هر مسیر $P\in C(n)$ بردار $\bar{a}_{(P)}=(a_۱,\dots,a_n)\in N(n)$ را وابسته سازید، به‌طوری‌که a_i برابر با مینیمم فاصله‌ای است که نقطه $(n,n-i)$ به‌موازات محور xها از مسیر P دارد. به‌عکس هر بردار $\bar{a}\in N(n)$ متناظر با مسیری یکتا در $C(n)$ است که آن را با $P_{(\bar{a})}$ نشان می‌دهیم. برای مثال مسیر داده شده در شکل ۱ متناظر با بردار $(۰,۱,۳,۳)\in N(۴)$ است. برای $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in N(n)$ و $۰\le i\le n$، قرار دهید $\bar{b}_{(i)}=(a_۱+i,a_۲+i,\dots,a_n+i)$. سپس ترتیب جملات هر $\bar{b}_{(i)}$ را چنان تغییر دهید که دنباله‌ای صعودی حاصل شود. بردارهای جدید متناظر با هر $\bar{b}_{(i)}$ را با $\bar{a}_{(i)}$ نشان دهید، به‌طوری‌که $۰\le i\le n$. اگر $i\ne j$، آنگاه مساحت‌های نواحی زیر مسیرهای $\bar{a}_{(i)}$ و $\bar{a}_{(j)}$ مختلف‌اند [۷، لم ۱]. برای $\bar{a},\bar{b}\in N(n)$، تعریف کنید $\bar{a}\sim\bar{b}$ اگر و تنها اگر $\bar{b}\in\{\bar{a}_{(۰)},\dots,\bar{a}_{(n)}\}$. در این صورت $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است و هر رده هم‌ارزی شامل $n+۱$ مسیر است. بعلاوه قضیه زیر برقرار است [۷، قضیه اصلی].

قضیه ۱. فرض کنید $\bar{a},\bar{b}\in N(n)$ و $\bar{a}\sim\bar{b}$. اگر مساحت ناحیه زیر مسیر $P_{(\bar{a})}$ بیشتر از مساحت ناحیه زیر مسیر $P_{(\bar{b})}$ باشد، آنگاه تعداد نقیصه‌های $P_{(\bar{a})}$ بیشتر از نقیصه‌های $P_{(\bar{b})}$ است.

قضیه ۱ که اثبات آن چندان هم ساده و کوتاه نیست، به‌سادگی قضیه چانگ ـ فلر را نتیجه می‌دهد. در این مقاله با بازنگری رهیافت نارایانا، اثبات‌هایی کوتاه برای قضایای نارایانا و چانگ ـ فلر ارائه می‌دهیم. پیش از آن خواننده را برای اثبات‌هایی کوتاه و ترکیباتی از قضیه چانگ ـ فلر به [۲، ۳ و ۶] ارجاع می‌دهیم. همچنین [۴] مرجع مناسبی برای مطالعه درزمینه‌ی شمارش مسیرهای شبکه‌ای است.

۲-بازنگری رهیافت نارایانا

فرض کنید $X(n)\subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ مجموعه همه $\binom{2n}{n}$ جواب‌های صحیح نامنفی معادله زیر باشد.

$$x_0+x_1\cdots+x_n=n \qquad (1)$$

به هر بردار $\bar{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in X(n)$ مسیر $P_{\bar{x}}\in C(n)$ را به شرح زیر وابسته می‌سازیم. برای $0\le i\le n$، قرار دهید

$X_i=x_0+x_1\cdots+x_i$ و $P_{\bar{x}}$ را مسیری در نظر بگیرید که از نقاط زیر می‌گذرد.

$$(0,0),\ (0,X_0),(1,X_0),(1,X_1),\ldots,(i,X_{i-1}),(i,X_i),\ldots,(n,X_{n-1}),(n,n) \quad (\#)$$

به‌عکس، هر مسیر $P\in C(n)$ متناظر با جوابی یکتا از معادله (۱) است. دقت کنید که نقاط (i,X_{i-1}) و (i,X_i) به ترتیب نقاط پایینی و بالایی اشتراک مسیر P با خط $x=i$ می‌باشند که ممکن است برهم منطبق باشند. برای مثال مسیر داده شده در شکل (۱) متناظر با بردار $(0,2,0,1,1)\in X(4)$ است. بالعکس بردار $(0,2,0,1,1)$ به‌وضوح یک جواب معادله $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=4$ است و با توجه به (#) دنباله نقاط

$$(0,0),\ (0,0),(1,0),(1,2),(2,2),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),$$

را مشخص می‌کند که منطبق بر مسیر شکل (۱) است.

برای هر $\bar{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in X(n)$ و هر $0\le k\le n$ قرار دهید $\bar{x}_k=(x_{0+k},x_{1+k},\ldots,x_{n+k})$ به‌طوری‌که اندیس‌ها به پیمانه $n+1$ در نظر گرفته می‌شوند. به‌وضوح $\bar{x}_k$ نیز جوابی از (۱) است. رابطه $\approx$ بر $X(n)$ را بدین‌صورت تعریف کنید که $\bar{x}\approx\bar{y}$ اگر و تنها اگر $\bar{y}=\bar{x}_k$، برای برخی $0\le k\le n$. به‌وضوح $\approx$ یک رابطه هم‌ارزی بر $X(n)$ است. حال فرض کنید مسیر $P\in C(n)$ به بردارهای $\bar{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in N(n)$ و $\bar{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in X(n)$ متناظر شود. در این صورت برای هر $0\le i\le n$ داریم: $x_i=|\{j\ |a_j=n-i\}|$. فرض کنید $0\le k\le n$ و $\bar{a}_{(k)}=(a'_1,\ldots,a'_n)$. همچنین در نظر

بگیرید که $P' = P_{\overline{a}_{(k)}}$ مسیر متناظر با بردار $\overline{a}_{(k)}$ است. اگر P' متناظر با $\overline{x}' = (x'_{۰}, x'_{۱}, \ldots, x'_{n}) \in X(n)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} x'_i &= \left|\{ j \mid a'_j = n - i \}\right| \\ &= \left|\{ j \mid a_j + k = n - i \}\right| \\ &= \left|\{ j \mid a_j = n - k - i \}\right| = x_{k+i}. \end{aligned}$$

بنابراین $\overline{x} = \overline{x}_k$. ازاین‌رو مسیرهای متناظر با رده‌های هم‌ارزی روابط $\sim$ و $\approx$ برهم منطبق‌اند؛ بنابراین نشان داده‌ایم که

لم ۱. روابط هم‌ارزی $\sim$ و $\approx$ رابطه هم‌ارزی یکسانی را بر $C(n)$ القا می‌کنند.

برای هر دنباله متناهی از اعداد صحیح مانند $(x_{۰}, x_{۱}, \ldots, x_m)$ قرار دهید: $X_i = \sum_{j=۰}^{i} x_j$،

$$\begin{aligned} f(x_{۰}, x_{۱}, \ldots, x_m) &= \left|\{ i \mid X_i > i,\ ۰ \le i \le m \}\right|, \\ S(x_{۰}, x_{۱}, \ldots, x_m) &= \sum_{i=۰}^{m-۱} X_i . \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\overline{x} \in X(n)$، آنگاه $f(\overline{x})$ تعداد نقیصه‌های مسیر $P_{\overline{x}}$ و $S(\overline{x})$مساحت ناحیه زیر آن را نشان می‌دهد.

نتیجه اصلی این مقاله اثبات قضیه زیر است.

قضیه ۲. برای هر عدد طبیعی $۰ \le k \le n$ و $\overline{x} \in X(n)$، فرض کنید $\overline{y} = \overline{x}_k$. در این صورت $f(\overline{x}) \ne f(\overline{y})$. به‌علاوه اگر $f(\overline{x}) < f(\overline{y})$، آنگاه $S(\overline{x}) < S(\overline{y})$.

فرض کنید $\overline{a}, \overline{b} \in N(n)$، $\overline{a} \sim \overline{b}$ و مساحت ناحیه زیر مسیر $P_{(\overline{a})}$ بیشتر از مساحت ناحیه زیر مسیر $P_{(\overline{b})}$ باشد. اگر $\overline{x}$ و $\overline{y}$ به ترتیب بردار متناظر با $\overline{a}$ و $\overline{b}$ در $X(n)$ باشند، آنگاه چون $\overline{a} \sim \overline{b}$ با توجه به لم ۱ داریم $\overline{y} = \overline{x}_k$، برای برخی $۱ \le k \le n$. بنا بر قضیه ۲، $f(\overline{x}) \ne f(\overline{y})$ یعنی تعداد نقیصه‌های $P_{\overline{x}} = P_{(\overline{a})}$ و $P_{\overline{y}} = P_{(\overline{b})}$ متفاوت‌اند. اگر تعداد نقیصه‌های $P_{\overline{x}}$ کمتر از نقیصه‌های $P_{\overline{y}}$ باشد، آنگاه با توجه به قضیه ۲، $S(\overline{x}) < S(\overline{y})$ یعنی مساحت زیر مسیر $P_{(\overline{a})}$ کمتر از مساحت زیر مسیر $P_{(\overline{b})}$ است و این در تناقض با فرض است. پس تعداد نقیصه‌های $P_{\overline{x}}$ بیشتر از تعداد نقیصه‌های مسیر $P_{\overline{y}}$ است؛ بنابراین قضیه ۲، قضیه نارایانا (قضیه ۱) را نتیجه می‌دهد. همچنین قضیه ۲ به‌وضوح لم ۱ از مرجع [۷] را نتیجه می‌دهد.

اثبات. فرض کنید $X_{k-۱} \le k - ۱$. لذا

$$X_{k+i} = X_{k-1} + Y_i, \qquad 0 \le i \le n-k,$$
$$Y_{n-k+i+1} = Y_{n-k} + X_i, \qquad 0 \le i \le k-1.$$

بنابراین

$$f(\bar{x}) = f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \le f(x_0, \ldots, x_{k-1}) + f(x_k, \ldots, x_{n-1}).$$

ازآنجاکه $X_{k-1} + Y_{n-k} = n$، داریم $Y_{n-k} \ge n+1-k$. پس

$$f(y_0, \ldots, y_{n-k}) = f(x_k, \ldots, x_n) > f(x_k, \ldots, x_{n-1})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(\bar{y}) &\ge f(y_0, \ldots, y_{n-k}) + f(y_{n-k+1}, \ldots, y_n) \\ &> f(x_k, \ldots, x_{n-1}) + f(x_0, \ldots, x_{k-1}) \ge f(\bar{x}). \end{aligned}$$

به‌علاوه

$$\begin{aligned} S(\bar{x}) &= \sum_{i=0}^{n-1} X_i = X_0 + \cdots + X_{k-1} + (X_{k-1} + Y_0) + \cdots + (X_{k-1} + Y_{n-k-1}) \\ &= (X_0 + \cdots + X_{k-2}) + (Y_0 + \cdots + Y_{n-k-1}) + (n-k+1)X_{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\bar{y}) &= \sum_{i=0}^{n-1} Y_i = Y_0 + \cdots + Y_{n-k} + (Y_{n-k} + X_0) + \cdots + (Y_{n-k} + X_{k-2}) \\ &= (X_0 + \cdots + X_{k-2}) + (Y_0 + \cdots + Y_{n-k-1}) + kY_{n-k}. \end{aligned}$$

ازاین‌رو $S(\bar{x}) < S(\bar{y})$.

سپس فرض کنید $X_{k-1} > k-1$. قرار دهید $j = n-k$. در این صورت $Y_j \le j$ و $\bar{y}_j = \bar{x}$. حال بحث قبلی ایجاب می‌کند که $f(\bar{y}) < f(\bar{x})$ و $S(\bar{y}) < S(\bar{x})$. این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

منابع

[1] Chung, K. L. and Feller, W. (1949). On fluctuations in coin-tossing. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **35,** 605-608.

[2] Chen, Y. M. (2008). The Chung-Feller theorem revisited. *Disc. Math.*, **308**, 1328-1329.

[3] Hodges, J. (1955). Galton’s rank-order test. *Biometrika,* **42**(1/2), 261-262.

[4] Krattenthaler, C. (2015). *Lattice path enumeration. Handbook of Enumerative Combinatorics, M. Bona, Discrete Math. and Its Appl.* CRC Press, Boca Raton London-New York. 589-678.

[5] MacMahon, P. (1909). Memoir on the theory of the partitions of numbers. Part IV. *Phil. Trans. R. Soc.* A **209**, 153-175.

[6] Montagh, B. (1991). A simple proof and a generalization of an old result of Chung and Feller, *Disc. Math.*, **87**, 105-108.

[7] Narayana, T.V. (1967). Cyclic permutation of lattice paths and the Chung-Feller theorem, *Skand. Aktuarietidsk,* 23-30.

Revisiting Narayana's Approach to the Chung-Feller Theorem

Seyed Mohsen Ghoraishi Shahraki

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Using cyclic permutations, Narayana investigated the relation between the area under north-east paths from the origin to the point (n,n) and the number of the flaws of the paths. His result implies a proof to the Chung-Feller Theorem. In this paper by revising the Narayana's approach, we offer short proofs to the theorems of Narayana and Chung-Feller.

Keywords: Catalan numbers, North-east path, Flaw.

Mathematics Subject Classification (2010) :05A15.