نگاشت‌های R-s-پیوسته

معصومه اعتبار[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۲/۳۰

چکیده: کلاس جدیدی از نگاشت‌های پیوسته، به نام نگاشت‌های $R-s-$ پیوسته، معرفی می‌شود. ارتباط میان $R-s-$ پیوستگی با پیوستگی و انواع دیگری از پیوستگی‌های قوی که تاکنون معرفی‌شده‌اند، بررسی می‌شود. سپس ویژگی‌های نگاشت‌های $R-s-$ پیوسته موردمطالعه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌ی θـ باز، مجموعه‌ی θ_{cl}ـ باز، نگاشت Rـ پیوسته، نگاشت $R-\theta-$ پیوسته، نگاشت $R-s-$ پیوسته.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۵۴C۰۸، ۵۴C۰۵،

۱- مقدمه

صورت‌های قوی پیوستگی توابع ازجمله Rـ پیوستگی، $R-\theta-$پیوستگی و R_{cl}ـ بالا پیوستگی در سال‌های ۱۹۹۲، ۱۹۹۴ و ۲۰۱۳ در [۳،۲،۱] معرفی و خواص اساسی آن‌ها مورد بررسی قرارگرفته است. در این مقاله مفهوم دیگری از پیوستگی قوی توابع؛ به نام $R-s-$ پیوستگی، معرفی می‌شود.

برای مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X، مجموعه‌ی θـ بستار A شامل تمام نقاطی مانند $x\in X$ است که هر همسایگی بسته شامل x با A اشتراک داشته باشد و این مجموعه با $cl_\theta A$ نشان داده می‌شود[۴]. مجموعه‌ی B را θـ بسته گوییم، اگر $B=cl_\theta B$. متمم یک مجموعه‌ی θـ بسته، یک مجموعه‌ی θـ باز نامیده می‌شود.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.etebar@scu.ac.ir

مجموعه‌ی clـ بستار(sـ بستار) A در فضای توپولوژی X از تمام نقاطی مانند $x \in X$ تشکیل شده است که هر مجموعه‌ی بستباز (مجموعه‌ی باز و بسته) شامل x با A اشتراک داشته باشد و با $cls\,A$ ($cls_X A$) نمایش داده می‌شود [۵]. مجموعه‌ی B را cl ـ بسته گوییم، اگر $B = cls\,B$ ؛ به‌عبارت‌دیگر، B یک مجموعه‌ی cl ـ بسته است اگر و تنها اگر به‌صورت اشتراکی از مجموعه‌های بستباز باشد. متمم یک مجموعه‌ی cl ـ بسته را یک مجموعه‌ی cl ـ باز می‌نامیم. مجموعه‌ی باز A در فضای توپولوژی X را r_{cl}ـ باز گوییم، اگر به‌صورت اجتماعی از مجموعه‌های cl ـ بسته باشد [۳]. فضای R_{cl}ـ باز به فضایی گفته می‌شود که هر مجموعه‌ی باز، r_{cl}ـ باز باشد.

برای مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X، مجموعه‌ی θ_{cl}ـ بستار A شامل تمام نقاطی مانند $x \in X$ است که هر همسایگی cl ـ بسته شامل x (مجموعه‌ی cl ـ بسته‌ی شامل یک مجموعه‌ی باز شامل x) با A اشتراک داشته باشد و این مجموعه با $cl_{\theta_{cl}} A$ نشان داده می‌شود [۶]. گوییم B یک مجموعه‌ی θ_{cl}ـ بسته است، اگر $B = cl_{\theta_{cl}} B$. متمم یک مجموعه‌ی θ_{cl}ـ بسته، θ_{cl}ـ باز نام دارد؛ بنابراین مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X مجموعه‌ای θ_{cl}- باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$ مجموعه‌ی باز U شامل x موجود باشد که $clsU \subseteq A$. یک θ_{cl}ـ فضا، فضایی است که در آن هر مجموعه‌ی باز، θ_{cl}ـ باز باشد. هر θ_{cl}ـ فضا یک R_{cl} ـ فضاست، اما عکس آن لزوماً برقرار نیست. مثال ۵.۲ در [۶] نشان می‌دهد که اگر M خانواده‌ی فرا پالایه‌های آزاد روی $\mathbb{Z}^+$ باشد، آنگاه $X = \mathbb{Z}^+ \bigcup M$ با توپولوژی فرا پالایه‌ای قوی که در مثال ۱۱۳ در [۷] معرفی‌شده است، R_{cl}- فضایی است که θ_{cl}-فضا نیست. به‌راحتی می‌توان دید که اگر $A \subseteq X$، آنگاه

$$cl\,A \subseteq cl_\theta\,A \subseteq cl_{\theta_{cl}}\,A \subseteq cls\,A.$$

گوییم فضای توپولوژی X فراهاسدورف است، هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، مجموعه‌ی بستبازی شامل x و فاقد y موجود باشد[۸]. مجموعه‌ی A در فضای توپولوژی X را فشرده‌ی ملایم در X گوییم، اگر هر پوشش آن با مجموعه‌های بستباز X دارای زیرپوششی متناهی باشد. فضای X را فشرده‌ی ملایم گوییم، هرگاه X فشرده‌ی ملایم در X باشد [۸].

در سرتاسر این مقاله نمادهای X، Y و Z فضاهای توپولوژی را نمایش می‌دهند.

نگاشت $f: X \to Y$ را به‌طور قوی θـ پیوسته (به‌طور قوی θ_{cl} ـ پیوسته، Rـ پیوسته، $R-\theta-$ پیوسته) گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$،

مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(cl\,U)\subseteq V$ ($f(cls\,U)\subseteq V$، $cl\,f(U)\subseteq V$، $cl_\theta\, f(U)\subseteq V$) [۲،۱،۶،۹].

در بخش ۲، ابتدا مفهوم $R-s$ - پیوستگی معرفی می‌شود. سپس به مقایسه‌ی این مفهوم و ارتباط آن با برخی دیگر از مفاهیم قوی پیوستگی موجود در منابع، با استفاده از مثال‌های گوناگون می‌پردازیم. در بخش ۳، پس از بیان گزاره‌های معادل با $R-s$ - پیوستگی به بررسی رفتار این نگاشت‌ها نسبت به تحدید دامنه، تحدید و توسیع بر دو ترکیب توابع می‌پردازیم. در بخش ۴، ویژگی‌های نمودارهای نگاشت‌های $R-s$ - پیوسته موردمطالعه قرار می‌گیرد.

۲- نگاشت‌های $R-s$ - پیوسته

این بخش را با معرفی نگاشت‌های $R-s$ - پیوسته آغاز می‌کنیم. سپس ارتباط میان این نوع پیوستگی با پیوستگی و صورت‌های قوی دیگر پیوستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نگاشت $f:X\to Y$ را $R-s$-پیوسته گوییم، اگر برای هر $x\in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $cls\,f(U)\subseteq V$.

گزاره ۱: هر نگاشت $R-s$ - پیوسته، به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $f:X\to Y$ یک نگاشت $R-s$ - پیوسته باشد؛ بنابراین f پیوسته است و درنتیجه تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بستباز در Y تحت f یک مجموعه‌ی بستباز در X است؛ بنابراین برای هر زیرمجموعه‌ی A در X داریم $f(cls\,A)\subseteq cls\,f(A)$ که نشان می‌دهد f به‌طور قوی θ_{cl}- پیوسته هست.■

نمودار زیر مکان $R-s$ - پیوستگی را در سلسله‌مراتب انواع دیگر شکل‌های قوی پیوستگی که در بخش ۱ معرفی گردیده است، نمایش می‌دهد.

$R-s$ - پیوسته $\leftarrow$ $R-\theta$–پیوسته $\leftarrow$ R–پیوسته

$\downarrow$ $\downarrow$

به‌طور قوی θ_{cl}–پی وسته $\leftarrow$ به‌طور قوی θ–پیوسته

با مراجعه به مثال قبل از قضیه ۱.۲، مثال ۲.۳ و مثال ۱ به ترتیب در [۲،۱،۶] و همچنین مثال‌های زیر می‌توان دید که هیچ‌کدام از روابط موجود در نمودار بالا برگشت‌پذیر نیستند.

مثال ۱: هر نگاشت پیوسته حقیقی مقدار روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\theta - R-$ پیوسته است، اما $R-s-$ پیوسته نیست.

مثال ۲: نگاشت $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x$، به‌طور قوی θ_{cl}ـ پیوسته است، اما $R-s-$ پیوسته نیست.

قضیه ۱: برای فضای توپولوژی Y، گزاره‌های زیر معادل‌اند.

۱. فضای Y یک θ_{cl}ـ فضاست.

۲. هر نگاشت پیوسته از یک فضای توپولوژی X به Y یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.

اثبات: ۱ $\Leftarrow$ ۲ فرض کنیم $f:X\to Y$ پیوسته و V مجموعه‌ی بازی شامل $f(x)$ در Y باشد. چون Y یک θ_{cl}-فضاست، مجموعه‌ی باز W شامل $f(x)$ در Y وجود دارد که $f(x)\in W\subseteq clsW\subseteq V$. بنا به پیوستگی f، مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $f(U)\subseteq W$ و درنتیجه $clsf(U)\subseteq \mathrm{clsW}\subseteq \mathrm{V}$؛ بنابراین f نگاشتی $R-s-$ پیوسته است.

۲ $\Leftarrow$ ۱ بنا به فرض، نگاشت همانی $i:X\to X$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است. حال فرض کنیم $x\in X$ و V مجموعه‌ی بازی در X شامل $i(x)$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $cls\, i(U)\subseteq V$؛ یعنی، $cls\,U\subseteq V$ و درنتیجه V یک مجموعه‌ی θ_{cl}ـ باز هست.■

فضای توپولوژی X را به‌طور موضعی فشرده گوییم، اگر هر نقطه در X دارای یک‌پایه همسایگی شامل مجموعه‌های فشرده باشد [۱۰].

قضیه ۲: فرض کنیم X یک فضای به‌طور موضعی فشرده و فراهاسدورف، Y فراهاسدورف و $f:X\to Y$ پیوسته باشد. در این صورت f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x\in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $f(U)\subseteq V$. چون X به‌طور موضعی فشرده است، مجموعه‌ی باز W در X شامل x وجود دارد که $cl\,W$ فشرده است و $cl\,W\subseteq U$. حال ادعا می‌کنیم که اگر A یک مجموعه‌ی فشرده‌ی ملایم در فضای فراهاسدورف X باشد، آنگاه A مجموعه‌ای clـ بسته است. برای اثبات ادعا، فرض کنیم $x\notin A$. در این صورت برای هر $a\notin A$ مجموعه‌های بستباز U_a و V_a به ترتیب شامل a و x وجود دارند که $U_a\cap V_a=\phi$. حال خانواده‌ی $\{U_a | a\in A\}$ پوشش بستبازی برای A

است و چون A فشرده‌ی ملایم است، $a_1,...,a_n \in A$ وجود دارند که $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$. حال قرار می‌دهیم $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$. در این صورت V مجموعه‌ی بستبازی شامل x است که $V \cap A = \phi$؛ بنابراین A مجموعه‌ای clـ بسته است. حال بنا به این مطلب، $cl\, W$ یک مجموعه‌ی cl ـ بسته است و درنتیجه $cls\, W = cls\, cl\, W = cl\, W$؛ بنابراین. $f\,(cls\, W) \subseteq V$ چون $cls\, W$ فشرده و f پیوسته است، پس $f\,(cls\, W)$ فشرده است و ازآنجاکه Y فراهاسدورف است، $f\,(cls\, W)$ یک مجموعه‌ی cl ـ بسته است؛ بنابراین

$$cls\, f\,(W) \subseteq cls\, f\,(cls\, W) = f\,(cls\, W) \subseteq V.$$

درنتیجه f یک نگاشت $R-s-$پیوسته است.■

قضایای زیر شرایطی را بیان می‌کنند که تحت آن، یک نگاشت $R-\theta-$پیوسته و یا به‌طور قوی θ_{cl}ـ پیوسته، $R-s-$پیوسته باشد.

یک فضای توپولوژی را شدیداً ناهمبند گویند، اگر بستار هر مجموعه‌ی باز، در آن فضا باز باشد [۱۰].

قضیه ۳: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و Y یک فضای شدیداً ناهمبند باشد. در این صورت $f: X \to Y$ یک نگاشت $R-\theta-$پیوسته است اگر و تنها اگر f نگاشتی $R-s-$ پیوسته باشد.

اثبات: با توجه به این‌که در یک فضای شدیداً ناهمبند عملگرهای cls و cl_θ یکسان هستند، اثبات آسان است.■

گوییم $f: X \to Y$ یک نگاشت بستباز است، اگر تصویر هر مجموعه‌ی بستباز تحت f، بستباز باشد[۱۱]

قضیه ۴: فرض کنیم $f: X \to Y$ دوسویی و بستباز باشد. در این صورت f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است اگر و تنها اگر به‌طور قوی θ_{cl}ـ پیوسته باشد.

اثبات: بنا به گزاره ۱، هر نگاشت $R-s-$ پیوسته، به‌طور قوی θ_{cl}ـ پیوسته است.

برعکس، فرض کنیم f به‌طور قوی θ_{cl}ـ پیوسته باشد. با توجه به این‌که f یک نگاشت دوسویی و بستباز است، پس برای هر $A \subseteq X$ داریم $cls\, f\,(A) \subseteq f\,(cls\, A)$؛ بنابراین f یک نگاشت $R-s-$پیوسته است.■

قضیه ۵: فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی ملایم، Y یک فضای فراهاسدورف و $f:X\to Y$ به‌طور قوی θ_{cl}ـ پیوسته باشد. آنگاه f یک نگاشت $R-s-$پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $f(clsU)\subseteq V$. با روشی مشابه اثبات قضیه ۵.۱۷ قسمت (a) و قضیه ۷.۱۷ در [۱۰] می‌توان نشان داد که هر زیرمجموعه‌ی cl ـ بسته از یک فضای فشرده‌ی ملایم، یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی ملایم است و تصویر مستقیم هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی ملایم تحت یک تابع پیوسته، یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی ملایم است. با توجه به این نکات و این‌که $clsU$ یک زیرمجموعه‌ی cl ـ بسته‌ی X است، پس $clsU$ فشرده‌ی ملایم در X است و ازآنجاکه f پیوسته است، $f(clsU)$ در Y فشرده‌ی ملایم است. چون Y فراهاسدورف است، پس $f(clsU)$ یک زیرمجموعه‌ی cl ـ بسته‌ی Y است؛ بنابراین

$$cls\, f(U)\subseteq cls\, f(clsU)=f(clsU)\subseteq V$$

پس f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.

۳- ویژگی‌های اساسی

به‌سادگی می‌توان دید هرگاه $\mathfrak{F}$ پایه‌ی یک پالایه در X باشد، آنگاه $\{clsF : F\in\mathfrak{F}\}$ پایه‌ی یک پالایه در X است. این پایه را با $cls\mathfrak{F}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۶: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f:X\to Y$ معادل‌اند.

1. **نگاشت f، یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.**
2. **برای هر پایه پالایه‌ی $\mathfrak{F}$ در X، اگر $\mathfrak{F}\to x$، آنگاه $clsf(\mathfrak{F})\to f(x)$**
3. **برای هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $cls\, f(clsU)\subseteq V$.**
4. **برای هر مجموعه‌ی بسته مانند F در Y که $f(x)\notin F$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x و مجموعه‌ی cl ـ باز V در Y وجود دارد که $F\subseteq V$ و $f(clsU)\bigcap V=\varnothing$.**
5. **برای هر $x\in X$ و هر مجموعه‌ی بسته مانند F در Y که $f(x)\notin F$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x و مجموعه‌ی cl ـ باز V در Y وجود دارد که $F\subseteq V$ و $f(U)\bigcap V=\varnothing$.**

اثبات: (۱ $\Leftrightarrow$ ۲) بدیهی است.

(۱ $\Leftrightarrow$ ۳) فرض کنیم f یک نگاشت $s-R-$پیوسته و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $cls\, f(U) \subseteq V$ و ازآنجاکه f پیوسته است، $f(cls\, U) \subseteq cls\, f(U)$؛ بنابراین

$$cls\, f(cls\, U) \subseteq cls\, f(U) \subseteq V.$$

برعکس، بدیهی است.

(۳ $\Leftarrow$ ۴) فرض کنیم F در Y بسته باشد و $f(x) \notin F$. بنا به فرض، مجموعه‌ی باز U در X شامل f وجود دارد که $cls\, f(cls\, U) \subseteq Y \setminus F$. حال قرار می‌دهیم $V = Y \setminus cls\, f(cls\, U)$. در این صورت V مجموعه‌ی cl ـ بازی در Y است که $F \subseteq V$ و $f(cls\, U) \cap V = \varnothing$.

(۴ $\Leftarrow$ ۵) بدیهی است.

(۵ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم W مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. قرار می‌دهیم $F = Y \setminus W$. بنا به فرض، مجموعه‌ی باز U در X شامل x و مجموعه‌ی cl ـ باز V در Y وجود دارد که $f(U) \subseteq Y \setminus V \subseteq W$. چون $Y \setminus V$ یک مجموعه‌ی cl ـ بسته است، پس $cls\, f(U) \subseteq Y \setminus V \subseteq W$ و درنتیجه f یک نگاشت $s-R-$پیوسته است.■

گوییم مجموعه‌ی Y در فضای توپولوژی X یک cl ـ نشانده است، اگر هر مجموعه‌ی بستباز در Y به‌صورت اشتراک یک مجموعه‌ی بستباز در X با Y باشد[3]. لم زیر که در [12] بیان‌شده است، در اثبات قضیه بعد موردنیاز است.

لم ۱: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و Y یک زیرمجموعه‌ی cl ـ نشانده‌ی X باشد. در این صورت برای هر $A \subseteq Y$ داریم $cls_Y A = Y \cap cls_X A$.

قضیه ۷: گزاره‌های زیر برقرارند.

1. **اگر $f: X \to Y$ پیوسته و $g: Y \to Z$ یک نگاشت $s-R-$پیوسته باشد، آنگاه $g\, o\, f: X \to Z$ یک نگاشت $s-R-$پیوسته است؛ به‌ویژه ترکیب دو نگاشت $s-R-$ پیوسته، $s-R-$ پیوسته است.**
2. **اگر $f: X \to Y$ یک نگاشت $s-R-$ پیوسته و $g: Y \to Z$ پیوسته باشد به‌طوری‌که تصویر هر مجموعه‌ی $cl-$بسته تحت g، یک مجموعه‌ی $cl-$بسته است، آنگاه $g\, o\, f: X \to Z$ یک نگاشت $s-R-$ پیوسته است.**

۳. **فرض کنیم $f:X\to Y$ یک نگاشت پوشا و باز و $g:Y\to Z$ یک نگاشت باشد. اگر $g\,o\,f:X\to Z$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته باشد، آنگاه g یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.**

۴. **اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته و Z زیر فضایی از Y شامل $f(X)$ باشد، آنگاه $f:X\to Z$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.**

۵. **اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته و Y یک زیر فضای clـ بسته و cl ـ نشانده‌ی Z باشد، آنگاه $f:X\to Z$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.**

۶. **اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته باشد و $A\subseteq X$، آنگاه $f|_A:A\to Y$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.**

۷. **اگر $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ پوشش بازی برای X باشد و هر نگاشت $f|_{U_\alpha}$، یک نگاشت $R-s-$ پیوسته باشد، آنگاه $f:X\to Y$ نیز $R-s-$ پیوسته است.**

اثبات: قسمت‌های ۱-۴ و ۶-۷ به‌راحتی قابل‌اثبات است. برای اثبات قسمت (۵)، فرض کنیم $x\in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Z شامل $f(x)$ باشد. در این صورت $V\bigcap Y$ مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ است. چون $f:X\to Y$ یک نگاشت $R-s-$پیوسته است، مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $cls_Y f(U)\subseteq V\bigcap Y$. حال بنا به لم ۱، $Y\bigcap cls_Z f(U)\subseteq V\bigcap Y$ و ازآنجاکه Y یک زیرمجموعه‌ی cl ـ بسته‌ی Zاست، $cls_Z f(U)\subseteq Y$ که نتیجه می‌دهد $cls_Z f(U)\subseteq V$. ■

مثال زیر نشان می‌دهد که قسمت ۵ در قضیه ۷ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۳: نگاشت همانی $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ یک نگاشت $R-s-$پیوسته است، اما $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ یک نگاشت $R-s-$پیوسته نیست.

قضیه ۸: فرض کنیم $\{f_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ خانواده‌ای از نگاشت‌ها باشد و نگاشت $f:\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to\prod_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha$ برای هر $(x_\alpha)\in\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ به‌صورت $f((x_\alpha))=(f_\alpha(x_\alpha))_\alpha$ تعریف‌شده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

۱. اگر هر f_α یک نگاشت $R-s-$پیوسته باشد، آنگاه f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.

۲. اگر برای هر $\alpha \in \Lambda$، فضای Y_α شدیداً ناهمبند و f یک نگاشت $R-s$ – پیوسته باشد، آنگاه هر f_α یک نگاشت $R-s$ – پیوسته است.

اثبات: اگر $A \subseteq X_\beta$ ، آنگاه $cls\pi_\beta^{-1}(A) \subseteq \pi_\beta^{-1}(clsA)$ و درصورتی‌که X_β شدیداً ناهمبند باشد، تساوی برقرار است[۱۲]. با استفاده از این مطلب، قضیه به‌راحتی اثبات می‌شود.

قضیه ۹: اگر $f: X \to Y$ یک نگاشت $R-s$ – پیوسته و پوشا باشد، آنگاه Y یک R_{cl}ـ فضاست. اگر علاوه بر آن، f باز باشد، آنگاه Y یک θ_{cl}ـ فضاست.

۴- نمودارهای نگاشت‌های $R-s$ – پیوسته

گوییم نمودار نگاشت $f: X \to Y$ که با $G(f)$ نشان داده می‌شود $(G(f) = \{(x, f(x)) | x \in X\})$ cl ـ بسته نسبت به Y است، اگر برای هر $(x, y) \notin G(f)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x و مجموعه‌ی بستباز V در Y شامل y موجود باشد که $(U \times V) \bigcap G(f) = \varnothing$. گوییم f دارای نمودار $cl-\theta_{cl}$ –بسته نسبت به X است، اگر برای هر $(x, y) \notin G(f)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x و مجموعه‌ی بستباز V در Y شامل y موجود باشد که $(cls U \times V) \bigcap G(f) = \varnothing$ و یا به‌عبارت‌دیگر، $f(cls U) \bigcap V = \varnothing$.

قضیه ۱۰: اگر $f: X \to Y$ یک نگاشت $R-s$ – پیوسته و Y یک $T_۱$ـ فضا باشد، آنگاه f دارای نمودار $cl-\theta_{cl}$ –بسته نسبت به X است.

اثبات: فرض کنیم $(x, y) \notin G(f)$. در این صورت $y \neq f(x)$ و چون Y یک $T_۱$ـ فضاست، مجموعه‌ی باز W در Y وجود دارد که $f(x) \in W$ و $y \notin W$. چون f یک نگاشت $R-s$ – پیوسته است، مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $cls\, f(U) \subseteq W$

. حال قرار می‌دهیم $C = Y \setminus cls\, f(U)$. در این صورت C مجموعه‌ی cl ـ بازی در Y شامل y است و درنتیجه مجموعه‌ی بستباز V در Y وجود دارد که $y \in V \subseteq C$. پس $cls\, f(U) \bigcap V = \varnothing$ و درنتیجه $f(cls U) \bigcap V = \varnothing$. ■

قضیه ۱۱: اگر $f: X \to Y$ دارای نمودار $cl-\theta_{cl}$ –بسته نسبت به X و فضای Y فشرده باشد، آنگاه f یک نگاشت $R-s$ – پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x \in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. در این صورت برای هر $y \in Y \setminus V$ ، $(x, y) \notin G(f)$. چون f نمودار $cl-\theta_{cl}$ –بسته نسبت به X دارد،

مجموعه‌ی باز U_y در X و مجموعه‌ی بستباز W_yدر Y وجود دارد که $x \in U_y$، $y \in W_y$ و $f(clsU_y) \bigcap W_y = \phi$؛ بنابراین $f(clsU_y) \subseteq Y \setminus W_y$ و درنتیجه $clsf(U_y) \subseteq clsf(clsU_y) \subseteq Y \setminus W_y$ که نشان می‌دهد $clsf(U_y) \bigcap W_y = \phi$. حال خانواده‌ی $\{W_y \,|\, y \in Y \setminus V\}$ پوشش بازی برای $Y \setminus V$ است که بنا به فشردگی $Y \setminus V$، تعداد متناهی $y_1, y_2, \cdots, y_n \in Y \setminus V$ وجود دارد که $Y \setminus V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$. حال قرار می‌دهیم $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. چون $cls\, f(U) \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}) = \varnothing$، پس $cls\, f(U) \subseteq V$ و درنتیجه f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.■

نتیجه ۱: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و Y یک T_1ـ فضای فشرده باشد. در این صورت $f: X \to Y$ یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است اگر و تنها اگر f دارای نمودار $-cl-\theta_{cl}$ بسته نسبت به X باشد.

نگاشت $f: X \to Y$ را به‌طور ضعیف θ_{cl}ـ پیوسته گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز Vدر Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(U) \subseteq clsV$.

در پایان این بخش شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آن، یک نگاشت به‌طور ضعیف θ_{cl}ـ پیوسته، $R-s-$ پیوسته باشد.

فضای توپولوژی X را sـ مرز فشرده‌ی ملایم گوییم، اگر دارای پایه‌ای از مجموعه‌های باز مانند β باشد به‌طوری‌که برای هر $B \in \beta$، مجموعه $clsB \setminus B$ فشرده‌ی ملایم در X است. بدیهی است که هر مجموعه‌ی فشرده، sـ مرز فشرده‌ی ملایم است، اما عکس آن لزوماً درست نیست؛ به‌عنوان‌مثال فضای اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی، فضای sـ مرز فشرده‌ی ملایمی است که فشرده نیست.

قضیه ۱۲: فرض کنیم $f: X \to Y$ به‌طور ضعیف θ_{cl}ـ پیوسته و دارای نمودار cl ـ بسته نسبت به Y باشد. اگر Y یک فضای sـ مرز فشرده‌ی ملایم باشد، آنگاه f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.

اثبات: فرض کنیم $x \in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. چون Y یک فضای sـ مرز فشرده‌ی ملایم است، مجموعه‌ی باز W در Y وجود دارد که $f(x) \in W \subseteq V$ و $clsW \setminus W$ فشرده‌ی ملایم در Y است. چون f به‌طور ضعیف θ_{cl}ـ پیوسته است، مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $f(U) \subseteq clsW$. حال برای هر $y \in clsW \setminus W$ داریم $(x, y) \notin G(f)$ ∘ ازآنجاکه f نمودار cl ـ بسته نسبت به Y

دارد، مجموعه‌ی باز A_y در X شامل x و مجموعه‌ی بستباز B_y در Y شامل y وجود دارد که $f(A_y)\bigcap B_y=\varnothing$. چون B_y بستباز است، پس $cls\, f(A_y)\bigcap B_y=\varnothing$. حال خانواده‌ی $\{B_y \mid y\in cls W\setminus W\}$ پوشش بستبازی برای مجموعه‌ی $cls W\setminus W$ است و چون این مجموعه فشرده‌ی ملایم در Y است، $y_1, y_2, \cdots, y_n \in cls W\setminus W$ وجود دارند که $cls W\setminus W\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}$. حال قرار می‌دهیم $U_x=U\bigcap(\bigcap_{i=1}^{n} A_{y_i})$. در این صورت U_x مجموعه‌ی بازی شامل x است. همچنین

$$\begin{aligned} cls\, f(U_x)\bigcap(cls W\setminus W) &\subseteq cls\, f(U_x)\bigcap(\bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}) \\ &\subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} cls\, f(A_{y_i})\right)\bigcap(\bigcup_{i=1}^{n} B_{y_i}) \\ &=\varnothing \end{aligned}$$

از طرفی $cls\, f(U_X)\subseteq cls\, f(U)\subseteq cls W$ و درنتیجه $cls\, f(U_x)\subseteq W$؛ یعنی، f یک نگاشت $R-s-$ پیوسته است.■

منابع

[1] Konstadilaki-Savvopoulou, Ch. and Jankovik, D. (1992). R-continuous functions, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, **15**, 57-64.

[2] Baker, C. W. (1994). θ-R-continuous functions, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* **17**(1), 73-78.

[3] Tyagi, B. K., Kohli, J. K. and Singh, D. (2013). R_{cl}-super continuous functions, *Demonstratio Math.*, **46**(1), 229-244.

[4] Velicko, N.V. (1968). H-closed topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* **78**(2),103-118.

[5] Singh, D. (2007). cl-supercontinuous functions, *Applied Gen. Top.*, **8**(2), 293-300.

[6] Etebar, M., Strongly θ_{cl}-continuous functions, to appear.

[7] Steen, L. A. and Seebach, J. A. Jr. (1978). *Counterexamples in Topology,* Springer Verlag, New York.

[8] Staum, R. (1974). The algebra of bounded continuous functions into a nonarchimedean field, *Pac. J. Math.* **50**(1),169-185.

[9] Noiri, T. (1980). On δ-continuous functions, *Jour of the Korean Math. Soc.* **16**(2),161-166.

[10] Willard, S. (1970). *General Topology*, Addison-wesley Publishing Company, Inc.

[11] Sostak, A. (1976). *On a class of topological space containing all bicompact and connected spaces*, General Topology and its Relation to Modern Analysis and Algebra IV: Proceedings of the 4th Prague Topological Symposium, Part B, 445-451.

[12] Etebar, M. (2018). Relations between $\theta_{cl}-$ continuity and continuity, *JP J.Geom.Topol.*, **21**(4), 317-325.

s-R-Continuous Functions

Masoumeh Etebar

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

A new class of continuous functions, namely $s-R-$continuous functions, is introduced. The relations of $s-R-$continuity with continuity and other variants of continuity are discussed. Properties of $s-R-$continuous functions are studied.

Keywords: $\theta-$open set, $\theta_{cl}-$open set, $R-$continuous function, $\theta-R-$continuous function, $s-R-$continuous function.

Mathematics Subject Classification (2010): 54C08, 54C05.