مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۲، ص ۳۴۰-۳۰۹

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2020.29434.1719

ارزیابی عملکرد و تعیین بازده به مقیاس در تحلیل‌پوششی داده‌های شبکه‌ای

هیلدا صالح[۱]*، فرهاد حسین‌زاده لطفی**، محسن رستمی مال خلیفه**، مرتضی شفیعی***

*گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

**گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

***گروه مدیریت صنعتی، دانشکده اقتصاد و مدیریت، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۳/۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۳/۳

چکیده: تحلیل‌پوششی داده‌ها به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای ارزیابی عملکرد واحدها تصمیم‌گیرنده متجانس با چند ورودی و چند خروجی مورداستفاده قرار می‌گیرد، ولی در بسیاری از مدل‌های تحلیل‌پوششی داده‌ها از روابط درون سازمانی چشم‌پوشی شده است و واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت یک جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شوند که با در اختیار داشتن ورودی¬های اولیه، خروجی¬های نهایی را تولید می‌کنند. ولی با توجه به اهمیت روابط درون سازمانی، در این مقاله واحد¬های چندمرحله‌ای با رویکردی جدید موردبررسی قرارگرفته‌اند. در ابتدا یک مجموعه امکان تولید جدید برای واحدهای دو مرحله-ای معرفی‌شده است و سپس مدلی جدید برای ارزیابی واحدهای دومرحله‌ای پیشنهاد گردیده است. درنهایت با توجه به اهمیت بازده به مقیاس در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی با استفاده از مجموعه امکان تولید معرفی‌شده برای شبکه‌های دومرحله‌ای، الگوریتمی جدید برای تعیین بازده به مقیاس در شبکه پیشنهاد شده است و الگوریتم پیشنهادی بر روی یک مثال کاربردی به‌کاررفته است.

واژه‌های کلیدی: ارزیابی عملکرد، بازده به مقیاس، تحلیل‌پوششی داده‌ها، تحلیل‌پوششی داده های شبکه‌ای.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۷M۴۰، ۹۰C۰۸

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: h.saleh@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

در طول تاریخ، بشر همواره درصدد بوده است که از امکانات و منابع موجود با توجه به محدودیت‌هایی که بر سر راه قرار دارد، حداکثر استفاده را ببرد. در این راستا ارزیابی عملکرد یکی از مسائل مهم و موردتوجه مدیران قلمداد می‌گردد. در حقیقت برای یک مدیر اطلاع از عملکرد واحدهای تحت نظارت خود، یکی از موضوعات مهم برای تصمیم‌گیری و اتخاذ استراتژی مناسب است. در دنیای امروز، پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد داده‌ها و تأثیر عوامل مختلف باعث می‌شوند که مدیران بدون برخورد علمی مناسب نتوانند از عملکرد واحدهای تحت نظارت خویش مطلع شوند؛ بنابراین لزوم استفاده از روش‌های علمی برای ارزیابی عملکرد احساس می‌شود.

یکی از معیارهای مناسب برای تعیین عملکرد واحدها، اندازه‌گیری کارایی است. به‌منظور ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری روش‌های متعددی تاکنون ارائه شده است. یکی از روش های مهم در این زمینه، تحلیل پوششی داده (DEA) است که ایده اولیه آن، توسط فارل در سال ۱۹۵۷ ارائه شد [۱]. پس‌ازآن در سال ۱۹۷۸ مدل CCR، توسط کوپر و همکاران معرفی شد و این مدل در حقیقت به‌عنوان شروعی برای تحلیل پوششی داده‌ها است [۲]. اگرچه مدل‌های اولیه ارائه شده در DEA به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای اندازه‌گیری کارایی می‌باشند و تاکنون مطالعات کاربردی متعددی در این زمینه انجام شده است از جمله [۳ و ۴] ولی در مدل‌های سنتی در تحلیل پوششی داده‌ها از روابط درون سازمانی چشم‌پوشی شده است و واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت یک جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین برای رفع این مشکل محققین بسیاری بر روی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای تمرکز نمودند. یکی از ابتدایی‌ترین روش‌ها در ارزیابی واحدهای چندمرحله‌ای توسط چن و ژو ارائه شد [۵]. در این مقاله اندازه کارایی هر مرحله، بر مجموعه امکان تولید آن مرحله تعریف می‌شود سپس دو مرحله به‌وسیله متغیرهای واسطه، به هم مربوط می‌شوند [۵]. کائو و هوانگ [۶] روش دیگری را با هدف تجزیه اندازه کارایی کلی فرایندهای دومرحله‌ای و ممکن ساختن مقایسه کارایی مراحل ۱ و ۲ ارائه نمودند. در رویکردی دیگر چن و همکاران [۷] بر اساس ترکیب محدب کارایی مراحل اول و دوم مدل خود را در شرایط بازده به مقیاس ثابت و متغیر بیان نمودند. در ادامه مدل ارائه شده توسط چن همکاران، به‌وسیله کک و همکاران [۸] برای فرایندهای چندمرحله‌ای با ساختارهای موازی تعمیم داده شد [۸]. همچنین تن و همکاران [۹] با استفاده از مدل SBM در تحلیل‌پوششی داده‌ها به ارزیابی عملکرد شبکه‌ها پرداختند. در تحقیقی دیگر که توسط یانگ و همکاران [۱۰] انجام شد آنان معتقدند که عملکرد همه اعضای زنجیره‌ی تأمین و همچنین رابطه میان اعضا بر روی عملکرد زنجیره مؤثر است؛ بنابراین آن‌ها یک زنجیره‌ی تأمین را مانند یک شبکه در نظر گرفتند و با پذیرش اصل بازده به مقیاس ثابت مجموعه امکان تولید جدیدی را برای شبکه‌های دومرحله‌ای ارائه نمودند. در ادامه پارادی [۱۱] از فرایندهای دومرحله‌ای برای بررسی عملکرد

شعب بانک‌های تجاری استفاده کرد. آمادو و همکاران [۱۲] به تلفیق شبکه و BSC پرداختند. چن و همکاران [۱۳] از شبکه برای ارزیابی زنجیره‌های تأمین استفاده نمودند.

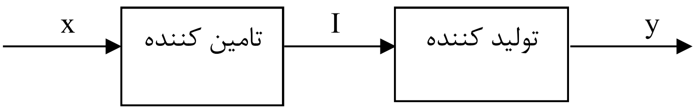
اگرچه تحلیل‌پوششی داده‌ها به‌عنوان تکنیکی کارآمد برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است ولی یکی دیگر از مفاهیم مهم در DEA مسئله بازده به مقیاس است. بازده به مقیاس ابزاری مهم در بسیاری از تصمیم‌گیری‌های اقتصادی است که می‌تواند اطلاعات مفیدی را در رابطه با اندازه بهینه یک واحد تصمیم‌گیری ارائه کند؛ بنابراین با توجه به اهمیت این موضوع مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شده است. یکی از مطالعات اولیه درزمینهٔ توسط بنکر و همکاران انجام شد. بنکر و همکاران [۱۴] با استفاده از مدل BCC روشی را برای تشخیص نوع بازده به مقیاس ارائه نمودند. در تحقیق دیگری بنکر و ترال [۱۵] روش دیگری را با استفاده از مدل CCR برای تشخیص بازده به مقیاس معرفی کردند. همچنین کرستنس و واندن [۱۶] با استفاده از مدل FDH روشی را به‌منظور تشخیص بازده به مقیاس ارائه نمودند. روش پیشنهادی آن‌ها توسط پودینوسکی [۱۷] بهبود داده شد. در ادامه، سلیمانی و رشادی [۱۸] با استفاده از چندجمله‌ای زمانی و مدل FDH بدون حل مدل¬های برنامه‌ریزی ریاضی موفق به تشخیص نوع بازده به مقیاس در واحدهای تحت بررسی شدند. همچنین سلیمانی و مصطفایی [۱۹] از طریق چندجمله‌ای زمانی بازه پایداری را برای حفظ طبقه‌بندی نوع بازده به مقیاس معرفی نمودند. سیوشی و گوتو [۲۰] تعیین نوع بازده به مقیاس در حضور خروجی‌های نامطلوب را موردمطالعه قرار دادند.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در بیشتر مطالعاتی که تاکنون برای تشخیص نوع بازده به مقیاس انجام گرفته است از تولیدات میانی و روابط میان قسمت‌های مختلف یک سازمان تحت بررسی چشم‌پوشی شده است؛ بنابراین کریونوژوکو و همکاران [۲۱] با استفاده از مدل‌های غیر شعاعی بازده به مقیاس برای واحدهای چندمرحله‌ای گسترش دادند. در ادامه ژانگ و یانگ [۲۲] بر روی ارتباط بین بازده به مقیاس شبکه و بازده به مقیاس فرایندهای درونی بحث نمودند.

بنابراین با توجه به اهمیت تعیین نوع بازده به مقیاس در واحدهای چندمرحله‌ای در این مقاله به بحث بازده به مقیاس در شبکه خواهیم پرداخت. برای این منظور در بخش ۲ در ابتدا به معرفی یک مجموعه امکان تولید جدید در شبکه بدون پذیرش اصل بازده به مقیاس ثابت می‌پردازیم سپس در بخش ۳، با استفاده از الگوریتم پیشنهادی به ارائه یک تعریف جدید برای تعیین بازده به مقیاس در شبکه می‌پردازیم و درنهایت در بخش ۴، الگوریتم پیشنهادی بر روی زنجیره‌ی تأمین در صنعت سیمان به کار گرفته می‌شود.

۲-ارزیابی عملکرد زنجیره‌های تأمین دو عضوی

فرض کنید n زنجیره‌ی تأمین دو عضـوی (تأمین‌کننده- تولیدکننده) همان‌طور که در شـکل ۱ نشان داده‌شده است، موجود باشد.



شکل (۱): زنجیره تأمین دو عضوی

همان‌طور که مشـاهده می‌کنید در j امین زنجیره، مرحله ۱ (تأمین‌کننده) ورودی اولیه $x_{pj}\,(p=1,...,P)$ را به‌منظور تولید خروجی میانی $i_{kj}(k=1,...,K)$، مصرف می‌کند. سپس در مرحله ۲ (تولیدکننده)، با مصـرف خروجی تولیدشـده در مرحله ۱، خروجی نهایی سـیسـتم $y_{qj}\,(q=1,...,Q)$ را تولید می‌کند.

در سال‌های اخیر بسیاری از محققین به ارزیابی عملکرد زنجیره‌های تأمین با استفاده از تحلیل‌پوششی داده‌ها پرداختند ولی در بسیاری از این مطالعات تعریف واضحی از مجموعه امکان تولید برای ارزیابی زنجیره‌های تأمین ارائه نشده است. در تحقیقی که توسط یانگ و همکاران [۱۰] انجام شد آنان معتقدند که عملکرد همه اعضای زنجیره‌ی تأمین و همچنین رابطه میان اعضا بر روی عملکرد زنجیره مؤثر است؛ بنابراین آن‌ها یک زنجیره تأمین را مانند یک شبکه در نظر گرفتند و با پذیرش اصل بازده به مقیاس ثابت مجموعه امکان تولید زیر را برای زنجیره‌های تأمین دو عضوی ارائه نمودند.

$$T_{SC-SP}^{CRS}=\left\{(x_p,y_q)\left|\sum_{j=1}^{N}(\theta_{Sj}^{*}x_{pj})\lambda_j\le x_p\,(\forall p),\sum_{j=1}^{N}i_{kj}\lambda_j\ge i_k\,(\forall k),\right.\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{N}i_{kj}\lambda_j\le i_k\,(\forall k),\sum_{j=1}^{N}(\frac{y_{qj}}{\theta_{Mj}^{*}})\lambda_j\ge y_q\,(\forall q),\lambda_j\ge 0\;(\forall j)\right\}$$

به‌طوری‌که θ_{Sj}^{*}و θ_{Mj}^{*} به ترتیب کارایی مرحله ۱ (تأمین‌کننده) و مرحله ۲ (تولیدکننده) در یک زنجیره تأمین می‌باشند که توسط مدل CCR در ماهیت ورودی به دست می‌آیند؛ بنابراین به‌منظور به دست آوردن کارایی یک زنجیره تأمین مدل ۱ توسط یانگ و همکاران [۱۰] پیشنهاد شد:

$$\begin{aligned}
&\min\ \theta \\
&s.t \\
&\sum_{j=1}^{N}\lambda_j x_j^* \le \theta x_o, \\
&\sum_{j=1}^{N}\lambda_j y_j^* \ge y_o, \\
&(x_j^*, y_j^*) \in T_{sc-sp}, \\
&\lambda_j \ge 0\ (\forall j).
\end{aligned} \tag{1}$$

به‌طوری‌که: x_{pj}^* ، y_{qj}^* ، i_{kj}^* متغیرهایی هســتند که از تصـویر کردن زنجیره تأمین تحت ارزیابی بر روی مرز تولید شده توسط مجموعه امکان تولید T_{SC-SP}^{CRS}به دست می‌آیند؛ بنابراین با استفاده از تعریف T_{SC-SP}^{CRS} مدل (۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min\ \theta \\
&s.t \\
&\sum_{j=1}^{N} x_{pj}^* \lambda_j \le \theta x_{po}\,(\forall p), \quad \sum_{j=1}^{N} y_{qj}^* \lambda_j \ge y_{qo}\,(\forall q), \\
&\sum_{j=1}^{N} (\theta_{Sj}^* x_{pj})\lambda_j' \le x_{pj}^*\,(\forall p, j), \quad \sum_{j=1}^{N} i_{kj}\lambda_j' \ge i_{kj}^*\,(\forall k, j), \\
&\sum_{j=1}^{N} i_{kj}\lambda_j' \le i_{kj}^*\,(\forall k, j), \quad \sum_{j=1}^{N} (\varphi_{Mj}^* y_{qj})\lambda_j' \ge y_{qj}^*\,(\forall q, j), \\
&\lambda_j, \lambda_j' \ge 0\ (\forall j)
\end{aligned} \tag{2}$$

بنابراین بدیهی است که مدل (۲) یک مدل غیرخطی است.

اگرچه در روش ارائه شده توسط یانگ و همکاران برخلاف سایر مطالعات انجام شده در این زمینه یک مجموعه امکان تولید جدید برای شبکه‌های دومرحله‌ای بیان شده است و همچنین با استفاده از این روش به‌راحتی می‌توان برای هریک از اعضای زنجیره تأمین ناکارا، یک الگو ارائه کرد ولی مدل ارائه دارای نقاط ضعف متعددی است که در ذیل به آن‌ها اشاره می‌شود:

با توجه به این‌که مدل ارائه شده یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی است؛ بنابراین جواب به‌دست‌آمده از این مدل توسط الگوریتم‌های غیرخطی جواب بهینه موضعی است نه بهینه سراسری و الگوریتم‌های موجود برای حل مدل‌های غیرخطی معمولاً زمان‌بر می‌باشند؛ و همچنین این مدل برای تنها برای حالت بازده به مقیاس ثابت بیان شده است.

۲-۱- مدل پیشنهادی برای ارزیابی عملکرد زنجیره‌های تأمین دومرحله‌ای

همان‌طور که در بخش قبل مشاهده نمودید مدل (۲) دارای نقاط ضعف و قوت متعددی است. بنابراین در این بخش به‌منظور رفع نقاط ضعف مدل (۲)، به دنبال ارائه یک مجموعه امکان تولید جدید برای ساختارهای دومرحله‌ای از جمله زنجیره‌ی تأمین دو عضوی هستیم.

با پذیرش اصل بازده به مقیاس ثابت و بر اساس ایده مطرح شده توسط یانگ و همکاران [۱۰] مجموعه امکان تولید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$T_{SC}^{CRS}=\left\{(x_p,y_q)\left|\sum_{j=1}^{N}(\theta_{Sj}^{*}x_{pj})\lambda_j\le x_p(\forall p),\sum_{j=1}^{N}(\varphi_{Mj}^{*}y_{qj})\lambda_j\ge y_q(\forall q),\lambda_j\ge 0\ (\forall j)\right.\right\} \tag{۳}$$

به‌طوری‌که θ_{sj}^{*} و φ_{Mj}^{*} با استفاده از مدل CCR در ماهیت ورودی برای مرحرحله ۱ و ماهیت خروجی برای مرحرحله ۲ دست می‌آیند به‌طوری‌که همواره $\theta_{Sj}^{*}\le 1$ و $\varphi_{Mj}^{*}\ge 1$.

بنابراین به‌منظور محاسبه کارایی زنجیره تأمین با توجه به مجموعه امکان تولید معرفی‌شده مدل (۱) را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\theta_N^{*}=\min\ \theta_N\\&s.t.\\&(\theta_N x_o,y_o)\in T_{SC}^{CRS}\end{aligned} \tag{۴}$$

با استفاده از تعریف T_{SC}^{CRS} مدل (۴) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\min\ \theta\\&s.t\\&\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(\theta_{sj}^{*}x_{pj})\le\theta x_{po}(\forall p),\\&\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(\varphi_{Mj}^{*}y_{qj})\le y_{qo}(\forall q),\\&\lambda_j\ge 0\end{aligned} \tag{۵}$$

حال فرض کنید T_{BB}^{CRS}، مجموعه امکان تولید بدون در نظر گرفتن روابط میانی (جعبه سیاه) باشد بنابراین T_{BB}^{CRS} به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T_{BB}^{CRS}=\left\{(x_p,y_q)\left|\sum_{j=1}^{N}x_{pj}\lambda_j\le x_p(\forall p),\sum_{j=1}^{N}y_{qj}\lambda_j\ge y_q(\forall q),\lambda_j\ge 0\ (\forall j)\right.\right\} \tag{۶}$$

فرض کنید زنجیره‌ی تأمین بدون در نظر گرفتن تولیدات میانی تحت ارزیابی باشد بنابراین داریم:

$$\theta_{BB}^{*} = \min \ \theta_{BB}$$
$$s.t. \quad (\theta_{BB} x_o, y_o) \in T_{BB}^{CRS}$$

همچنین با توجه به این‌که همواره $\theta_{Sj}^{*} \leq ۱$ و $\varphi_{Mj}^{*} \geq ۱$ درنتیجه $\sum_j (\theta_{Sj}^{*} x_{pj}) \lambda_j \leq \sum_j x_{pj} \lambda_j \leq \theta x_{po} (\forall p)$ و $\sum_j (\varphi_{Mj}^{*} y_{qj}) \lambda_j \geq \sum_j y_{qj} \lambda_j \geq y_{qo} (\forall q)$ بنابراین قضیه ۱ را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱: $T_{BB}^{CRS} \subseteq T_{SC}^{CRS}$.

اینک فرض کنید زنجیره‌ی تأمین o تحت ارزیابی باشد بنابراین با توجه به قضیه ۱، $\theta_N^{*} \leq \theta_{BB}^{*}$. درنتیجه مدل (۵) ابزاری قوی‌تر از مدل CCR در شـــناســـایی واحدهای ناکارا در یک زنجیره تأمین است. اینک مدل (۸) را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\min \theta \\
&\sum_{j=۱}^{N} x_{pj}^{*} \lambda_j \leq \theta x_{po} (\forall p), \\
&\sum_{j=۱}^{N} y_{qj}^{*} \lambda_j \geq y_{qo} (\forall q), \\
&\sum_{j=۱}^{N} (\theta_{Sj}^{*} x_{pj}) \lambda_j^{'} \leq x_{pj}^{*} (\forall p, j) \\
&\sum_{j=۱}^{N} (\varphi_{Mj}^{*} y_{qj}) \lambda_j^{'} \geq y_{qj}^{*} (\forall q, j), \\
&\lambda_j, \lambda_j^{'} \geq ۰ \ (\forall j)
\end{aligned} \tag{۸}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید به‌راحتی می‌توان از هر جواب شدنی مدل (۲) به یک جواب شدنی برای مدل (۸) دست‌یافت و بالعکس؛ بنابراین لم ۱ به‌صورت زیر مطرح می‌شود.

لم ۱: جواب بهینه دو مدل (۲) و (۸) یکسان است.

اینک نامساوی $\sum_{j=۱}^{N} (\theta_{Sj}^{*} x_{pj}) \lambda_j^{'} \leq x_{pj}^{*} (\forall p, j)$ را در مدل (۸) در نظر بگیرید. با ضرب طرفین این نامساوی در λ_j و سپس با جمع n نامساوی به‌دست‌آمده بر روی اندیس j داریم:

$$\sum_{j=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{N} \theta_{Sj}^{*} x_{pj} \lambda_j^{'} \lambda_j \leq \sum_{j=۱}^{N} x_{pj}^{*} \lambda_j (\forall p, j) \tag{۹}$$

می‌دانیم که:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{pj}^{*}\lambda_j \leq \theta x_{po} (\forall p) \tag{۱۰}$$

بنابراین داریم: $\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\theta_{Sj}^{*}x_{pj}\lambda_j^{'}\lambda_j \leq \theta x_{po}(\forall p)$. همچنین به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi_{Mj}^{*}y_{qj}\lambda_j^{'}\lambda_j \geq y_{qo}(\forall q)$. بدیهی است که:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\theta_{Sj}^{*}x_{pj}\lambda_j^{'})\lambda_j = \sum_{j=1}^{n}\theta_{Sj}^{*}x_{pj}\lambda_j^{'}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right) (\forall p) \tag{۱۱}$$

و همچنین:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_{qj}}{\theta_{Mj}^{*}}\lambda_j^{'}\lambda_j = \sum_{j=1}^{N}\frac{y_{qj}}{\theta_{Mj}^{*}}y_{qj}\lambda_j^{'}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right) \quad (\forall q). \tag{۱۲}$$

بنابراین با تعریف $\mu_j = \lambda_j^{'}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\right)$ و جای گذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در مدل (۸)، داریم:

$$\begin{aligned}
&\min \theta \\
&s.t \\
&\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\theta_{Sj}^{*}x_{pj}) \leq \theta x_{po}(\forall p) \\
&\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\frac{y_{qj}}{\theta_{Mj}^{*}}y_{qj}) \geq y_{qo}(\forall q) \\
&\mu_j \geq 0 \ (\forall j)
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

می‌دانیم در مدل CCR، $\varphi_{Mj}^{*} = \frac{1}{\theta_{Mj}^{*}}$ بنابراین با استفاده از این خاصیت مدل (۱۳) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\min \theta \\
&s.t \\
&\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\theta_{Sj}^{*}x_{pj}) \leq \theta x_{po}(\forall p), \\
&\sum_{j=1}^{N}\mu_j(\varphi_{Mj}^{*}y_{qj}) \geq y_{qo}(\forall q), \\
&\mu_j \geq 0 \ (\forall j)
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

بر اساس فرایند گفته شده در بالا قضیه ۲ را بیان می‌کنیم:

قضیه ۲: مدل (۸) و (۱۴) جواب بهینه یکسان دارا می‌باشند.

اثبات: فرض کنید $(\theta^*,\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}',\tilde{x}^*,\tilde{y}^*)$ و (θ^*,μ^*) به ترتیب جواب بهینه مدل (۸) و (۱۴) است؛ بنابراین با توجه به فرایند گفته شده $(\tilde{\theta},\lambda_j'\sum_j\lambda_j')$ یک جواب شدنی برای مدل (۱۴) است در نتیجه $(\theta^*\leq\tilde{\theta})$. از طرفی به‌راحتی می‌توان نشان داد که $(\theta,\lambda_j,\lambda_j',x_{pj}^*,y_{qj}^*)=(\theta^*,\circ,\mu_j^*,x_{pj},\circ)$ یک جواب شدنی برای مدل (۸) است بنابراین $\theta^*\geq\tilde{\theta}$. درنتیجه $\theta^*=\tilde{\theta}$. □

بنابراین با استفاده از قضیه ۲ و لم ۱ نتیجه می‌شود مدل (۲) و (۱۴) دارای جواب بهینه یکسان می‌باشند.

اینک برای بررسی روابط بین کارایی شبکه و کارایی هریک از مراحل قضیه ۳ را بیان می‌کنیم:

قضیه ۳: $\theta\leq\theta_{mt}^*\times\theta_{st}^*$.

اثبات: مدل (۱۳) را مجدد در نظر بگیرید.

با استفاده از تغییر متغیر $\bar{\mu}_t=\dfrac{\mu_t}{\theta_{mt}^*}$ مدل (۱۳) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&\min\theta\\&s.t\\&\sum_t(\bar{\mu}_t\theta_{mt}^*)(x_t\theta_{sj}^*)\leq\theta x_o,\\&\sum_t\bar{\mu}_t y_t\geq y_o,\\&\mu_t\geq\circ\end{aligned}\tag{۱۵}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&\min\theta\\&s.t\\&\sum_t\bar{\mu}_t x_t\leq\frac{\theta}{\theta_{mt}^*\theta_{sj}^*}x_o\\&\sum_t\bar{\mu}_t y_t\geq y_o,\\&\mu_t\geq\circ\end{aligned}\tag{۱۶}$$

اینک تعریف می‌کنیم: $\delta=\dfrac{\theta}{\theta_{mt}^*\theta_{st}^*}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
&\min \delta(\theta^*_{mt}\theta^*_{st}) \\
&s.t \\
&\sum_t \bar{\mu}_t x_t \le \delta x_o, \\
&\sum_t \bar{\mu}_t y_t \ge y_o, \\
&\mu_t \ge \circ.
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

با توجه به این‌که: $\circ \le \theta^*_{mt} \times \theta^*_{st}$ بنابراین: $\min \delta(\theta^*_{mt}\theta^*_{st}) = (\theta^*_{mt}\theta^*_{st}) \min \delta$ و همچنین $\delta = ۱$ و $\bar{\mu}_t = \begin{cases} ۱ & t = ۱ \\ \circ & t \ne \circ \end{cases}$ یک جواب شدنی برای مدل (۱۷) است؛ بنابراین در جواب بهینه $\delta \le ۱$. درنتیجه $۱ \le \frac{\theta}{\theta^*_{mt} \times \theta^*_{st}}$؛ بنابراین نتیجه می‌شود که: . $\theta \le \theta^*_{mt} \times \theta^*_{st}$ □

بنابراین با استفاده از قضیه ۳ می‌توان نتیجه گرفت: $\theta^* \le \theta^*_{st}$ و $\theta^* \le \theta^*_{mt}$ به‌عبارت‌دیگر کارایی زنجیره‌ی تأمین همواره از کارایی هر یک مراحل کمتر است.

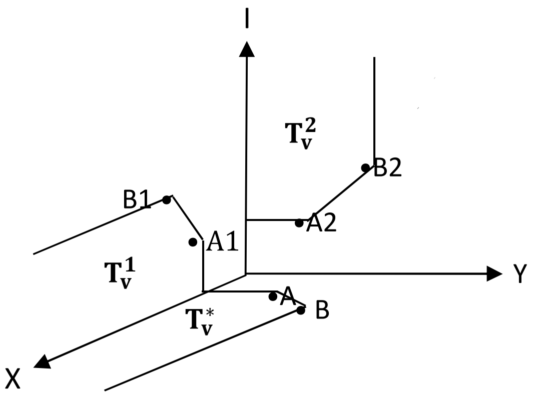
همان‌طور که مشاهده نمودید با استفاده از مطالب بیان شده، مدل (۱۴) را می‌توان به‌جای مدل (۲) به کار گرفت. بدیهی است که مدل (۲) غیرخطی است درصورتی‌که مدل (۱۴) خطی است. با توجه به این در مدل‌های غیرخطی برای به دست آوردن جواب بهینه معمولاً از الگوریتم‌های تقریبی و یا روش‌های هیورستیک استفاده می‌کنیم و جواب به‌دست‌آمده توسط این الگوریتم‌ها دارای خطای محاسباتی می‌باشند. اگرچه این خطا در مواجه با داده‌های کوچک قابل صرف‌نظر کردن است ولی در برخی از موارد به‌راحتی نمی‌توان از این خطا صرف‌نظر کرد. از طرفی الگوریتم-های موجود برای حل مدل‌های خطی معمولاً جواب بهینه موضعی را به دست می‌آورند. همچنین یکی از فاکتورهای مهم در فرایند مدل‌سازی تعداد قیود یک مدل است که یک فاکتور بحرانی در انجام محاسبات است بنابراین چنانچه تعداد DMUهای تحت ارزیابی و یا تعداد ورودی و خروجی واحدها زیاد باشند زمان و در نتیجه هزینه انجام محاسبات به‌شدت افزایش می‌یابند. بدیهی است تعداد قیود مدل (۱۴) کمتر از مدل (۲) هست. یکی دیگر از مزایای استفاده از مدل (۱۴) این است که برخلاف مدل (۲) به‌راحتی می‌توان آن را برای حالت VRS گسترش داد.

۲-۲- مجموعه امکان تولید با حذف اصل بازده به مقیاس ثابت

در این ق سمت بر ا ساس ایده مطرح شده در بخش ۱ و با حذف ا صل بازده به مقیاس ثابت از امکان تولید پیشـــنهادی در بخش ۲-۱ مجموعه امکان تولید زیر را برای تکنولوژی‌های با بازده به مقیاس متغیر معرفی می‌کنیم.

$$T_{SC}^{VRS} = \left\{ (x_p, y_q) \sum_{j=1}^{N} (\theta_{Sj}^{*} x_{pj}) \lambda_j \le x_p (\forall p) \; \middle| \; , \sum_{j=1}^{N} (\varphi_{Mj}^{*} y_{qj}) \lambda_j \ge y_q (\forall q), \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \lambda_j \ge 0 \; (\forall j) \right\} \quad (۱۸)$$

به‌طوری‌که θ_{sj}^{*} و φ_{Mj}^{*} با استفاده از مدل BCC در ماهیت ورودی برای مرحله۱ و در ماهیت خروجی برای مرحله۲ به دست می‌آیند. تعبیر هندسی T_{SC}^{VRS} در شکل۲ نشان داده شده است.



شکل (۲): تعبیر هندسی T_{SC}^{VRS}

نموداری که در سمت چپ قرار گرفته است نشان دهنده مجموعه امکان تولید در مرحله اول، نمودار سمت راست نشان دهنده مجموعه امکان تولید در مرحله دوم و نموداری که در پایین شکل قرار گرفته است نشان دهنده مجموعه امکان تولید شبکه بدون در نظر گرفتن اصل بازده به مقیاس ثابت است. با استفاده از تعریف T_{SC}^{VRS}، مدل (۱۹) به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} & \min \theta \\ & s.t \\ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\theta_{Sj}^{*} x_{pj}) \le \theta x_{po} (\forall p), \\ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (\varphi_{Mj}^{*} y_{qj}) \ge y_{qo} (\forall q), \\ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \ge 0 \; (\forall j). \end{aligned} \quad (۱۹)$$

دوگان مدل (۱۹) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\phi_N^* = \max \ & \sum_{q=1}^{Q} u_q y_{qo} + \omega_o \\
s.t. \quad & \sum_{p=1}^{P} v_p x_{po} = 1, \\
& \sum_{q=1}^{Q} u_q (\varphi_j^* y_{qj}) - \sum_{p=1}^{P} v_p (\theta_j^* x_{pj}) + \omega_o \le 0 \ (\forall j), \\
& u_q, v_p \ge 0 \ (\forall q, p).
\end{aligned} \tag{20}$$

همانند مدل‌های ارائه شـــده در ارزیابی واحدهای تک‌مرحله‌ای برای محاســـبه ناکارایی ترکیبی واحدهای تحت ارزیابی، فاز دوم مدل (۲۱) به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
\max \ & \sum_{p=1}^{P} s_p^- + \sum_{q=1}^{Q} s_q^+ \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{N} (\theta_{Sj}^* x_{pj}) \lambda_j + s_p^- = \phi_N^* x_{po} (\forall p), \\
& \sum_{j=1}^{N} (\varphi_{Mj}^* y_{qj}) \lambda_j - s_q^+ = y_{qo} (\forall q), \\
& \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \\
& \lambda_j \ge 0 \ (\forall j)
\end{aligned} \tag{21}$$

تعریف ۱: تصویر شبکه o به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{po} &= \phi_N^* x_{po} - s_p^{-*} (\forall p) \\
\hat{y}_{qo} &= y_{qo} + s_q^{+*} (\forall q)
\end{aligned}$$

به‌طوری‌که ϕ_N^*جواب بهینه مدل (۱۹) و s_p^{-*} و s_q^{+*} جواب بهینه مدل (۲۱) می‌باشند.

در ادامه قضیه ۴ را که تعمیمی از قضیه ۲.۳ در [۲۳] است را بیان می‌کنیم. همچنین ایده اثبات آن مشابه اثبات قضیه ۲.۳ در [۲۳] است.

قضیه ۴: تصویر شبکه o یعنی $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ کارا است.

اثبات: برای ارزیابی $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ مدل ۲۲ را به کار می‌گیریم.

$$
\begin{aligned}
&\min\ \hat{\theta} \\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{N}(\theta^{*}_{Sj}x_{pj})\hat{\lambda}_j+\hat{s}^{-}_{p}=\hat{\theta}\hat{x}_{po}\,(\forall p),\\
&\qquad \sum_{j=1}^{N}(\varphi^{*}_{Mj}y_{qj})\hat{\lambda}_j-\hat{s}^{+}_{q}=\hat{y}_{qo}\,(\forall q),\\
&\qquad \sum_{j=1}^{N}\hat{\lambda}_j=1,\\
&\qquad \lambda_j\geq 0\ (\forall j)
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

با استفاده از تعریف ۱ داریم:

$$
\sum_{j=1}^{N}(\theta^{*}_{Sj}x_{pj})\hat{\lambda}_j=(\hat{\theta}\phi^{*}_{N})x_{po}-(\hat{\theta}s^{-*}_{p}+\hat{s}^{-}_{p})\ (\forall p)
$$

$$
\sum_{j=1}^{N}(\varphi^{*}_{Mj}y_{qj})\hat{\lambda}_j=y_{qo}+(s^{+*}_{q}+\hat{s}^{+}_{q})\ (\forall q),
$$

اینک تعریف می‌کنیم: $\tilde{\theta}=\hat{\theta}\phi^{*}_{N}$، $\tilde{s}^{+}_{q}=s^{+*}_{q}+\hat{s}^{+}_{q}$ و $\tilde{s}^{-}_{p}=\hat{\theta}s^{-*}_{p}+\hat{s}^{-}_{p}$. بدیهی است که $(\hat{\lambda},\tilde{\theta},\tilde{s}^{-},\tilde{s}^{+})$ جواب شدنی مدل (۲۱) است. فرض کنید $\hat{\theta}<1$ در این صورت $\tilde{\theta}=\hat{\theta}\theta^{*}<\theta^{*}$ و این‌یک تناقض است؛ بنابراین $\hat{\theta}=1$ در نتیجه

$$
\sum_{p=1}^{P}\tilde{s}^{-}_{p}+\sum_{q=1}^{Q}\tilde{s}^{+}_{q}=\left(\sum_{p=1}^{P}\hat{s}^{-}_{p}+\sum_{q=1}^{Q}\hat{s}^{+}_{q}\right)+\left(\sum_{p=1}^{P}s^{-*}_{p}+\sum_{q=1}^{Q}s^{+*}_{q}\right).
$$

اگر $\sum_{p=1}^{P}\hat{s}^{-}_{p}+\sum_{q=1}^{Q}\hat{s}^{+}_{q}=0$ اثبات کامل است در غیر این صورت $\sum_{p=1}^{P}\tilde{s}^{-}_{p}+\sum_{q=1}^{Q}\tilde{s}^{+}_{q}>\sum_{p=1}^{P}s^{-*}_{p}+\sum_{q=1}^{Q}s^{+*}_{q}$ و این‌یک تناقض است. □

۲-۳- مقایسه نتایج مدل پیشنهادی و مدل یانگ و همکاران

در این قسمت برای مقایسه بهتر مدل پیشنهادی و مدل یانگ، مثال ارائه شده در مقاله یانگ و همکاران [۱۰] را با استفاده از مدل معرفی‌شده در این مقاله اجرا می‌کنیم.

مجموعه داده‌ها شامل ۱۷ شعبه بانک است که هر شعبه بانک به‌صورت یک فرآیند دومرحله‌ای در نظر گرفته شده است. در مرحله اول ۳ ورودی (تعداد کارکنان، میزان دارایی ثابت، هزینه عملیاتی) ا ستفاده می شود و ۲ خروجی اعتبارات و وام‌های بین‌بانکی تولید می شود. در مرحله دوم، دو خروجی تولید شده در مرحله ۱ به‌عنوان ورودی‌های این مرحله مصرف می‌شوند و

میزان اعتبارت به‌عنوان خروجی نهایی سیستم در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از ارزیابی با استفاده از مدل پیشنهادی در جدول ۱ نشان داده شده است. مشاهده شد که این نتایج و نتایج به‌دست‌آمده توسط مدل یانگ و همکاران یکسان است.

جدول (۱): مقایسه نتایج ارزیابی عملکرد با روش یانگ و روش پیشنهادی

شعبه	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
کارایی	۱	۰/۴۵۱	۰/۴۳۲	۰/۱۲۹۱	۰/۷۳۴۲	۰/۴۹۷۹	۰/۵۱۷۷	۰/۲۹۴۷	۰/۱۷۴۱
شعبه	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	
کارایی	۰/۲۱۴۶	۰/۲۵۷۸	۰/۳۱	۰/۱۲۸۵	۰/۳۳۶۳	۰/۱۶۲۱	۰/۱۹۶۳	۰/۰۸۲۷	

همان‌طور که مشاهده می‌کنید A_1 کارا است و سایر واحدها ناکارا می‌باشند و همچنین بدیهی است که A_{17} دارای ضعیف‌ترین عملکرد در بین سایر واحدها است.

۳- بازده به مقیاس در شبکه

بر اساس شرایط بازار، سیاست‌های اقتصادی و غیره، مدیران تمایل دارند تا تغییراتی در شبکه تحت مدیریت خود ایجاد کنند؛ بنابراین آن‌ها تمایل دارند که اطلاعاتی در رابطه با تغییرات نسبی خروجی در مقایسه با تغییرات نسبی ورودی داشته باشند. در چنین حالتی سؤالات متعددی برای مدیر ایجاد می‌شود. برای مثال:

- آیا تغییرات متناسب در ورودی‌های یک شبکه بیشتر/ کمتر از تغییرات متناسب در خروجی‌های شبکه است؟
- آیا تغییرات متناسب در اندازه بخش‌های درونی بر روی عملکرد شبکه تأثیرگذار است؟

برای پاسخگویی به سوالاتی مشابه سؤالات فوق نیازمند بحث پیرامون بازده به مقیاس در شبکه هستیم. بازده به مقیاس یکی از مسائل حیاتی در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی است؛ که می‌تواند اطلاعات مفیدی را در رابطه با اندازه بهینه واحد ارائه نماید؛ بنابراین در این بخش به بحث پیرامون بازده به مقیاس در شبکه می‌پردازیم.

فرض کنید n شبکه دومرحله‌ای وجود دارد همانند آنچه در شکل ۱ نشان داده شد در اختیار داریم. به‌طوری‌که هر شبکه در مرحله ۱ ورودی x را مصرف کرده و خروجی I را تولید می‌کند. سپس در محله بعد با استفاده از ورودی I، خروجی نهایی y را تولید می‌کند؛ بنابراین با استفاده

از تعریف بازده به مقیاس ارائه شده توسط تن [۲۴] و سلیمانی دامنه [۲۵]، بازده به مقیاس در شبکه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲: شبکه o بر روی مرز کارای T_{SC}^{VRS} قرار دارد در این صورت:

۱. o امین شبکه دارای بازده به مقیاس صعودی ا ست اگر و فقط اگر وجود دا شته با شد $\delta^* > ۰$ به‌طوری‌که:

$$\forall\ \delta\ ,\ ۰ < \delta \le \delta^* \ \Rightarrow ((۱+\delta)\,x_o,(۱+\delta)\,y_o) \in \operatorname{int} T_{SC}^{VRS}$$

۲. oامین شبکه دارای بازده به مقیاس نزولی است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $\delta^* > ۰$ به‌طوری‌که:

$$\forall\ \delta\ ,\ ۰ < \delta \le \delta^* \ \Rightarrow ((۱-\delta)\,x_o,(۱-\delta)\,y_o) \in \operatorname{int} T_{SC}^{VRS}$$

۳. o امین شبکه دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و فقط اگر یکی از ۴ حالت زیر برقرار باشد:

a) وجود داشته باشد $\delta^* > ۰$ به‌طوری‌که:

$$\forall\ \delta,\ ۰ < \delta \le \delta^* \Rightarrow ((۱+\delta)\,x_o,(۱+\delta)\,y_o) \in \partial T_{SC}^{VRS} \text{ و } ((۱-\delta)\,x_o,(۱-\delta)\,y_o) \in \partial T_{SC}^{VRS}$$

b) برای هر $\delta > ۰$ داشته باشیم:

$$((۱+\delta)\,x_o,(۱+\delta)\,y_o) \notin T_{SC}^{VRS} \text{ و } ((۱-\delta)\,x_o,(۱-\delta)\,y_o) \notin T_{SC}^{VRS}$$

c) $\delta^* > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

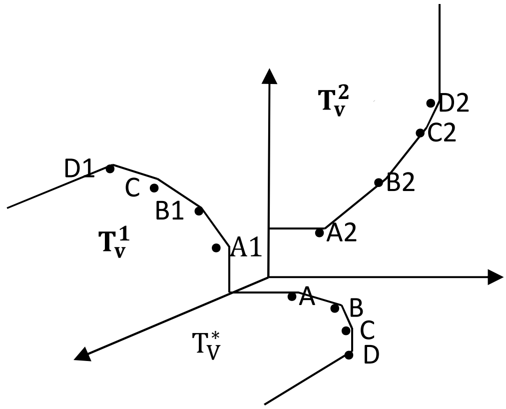
$$\forall\ \delta,\ ۰ < \delta \le \delta^* \Rightarrow ((۱+\delta)\,x_o,(۱+\delta)\,y_o) \in \partial T_{SC}^{VRS} \text{ و } ((۱-\delta)\,x_o,(۱-\delta)\,y_o) \notin T_{SC}^{VRS}$$

d) وجود داشته باشد $\delta^* > ۰$ به‌طوری‌که:

$$\forall\ \delta, ۰ < \delta \le \delta^* \Rightarrow ((۱-\delta)\,x_o,(۱-\delta)\,y_o) \in \partial T_{SC}^{VRS} \text{ و } ((۱+\delta)\,x_o,(۱+\delta)\,y_o) \notin T_{SC}^{VRS}$$

تعبیر هندسی تعریف ۲ در شکل ۳ نشان داده شده است.

در شکل ۳ نموداری که در سمت چپ قرار گرفته ا ست ن شان دهنده مجموعه امکان تولید در مرحله اول $(T_v^۱)$، نمودار سمت راست نشان دهنده مجموعه امکان تولید در مرحله دوم $(T_v^۲)$ و نموداری که در پایین شکل قرار گرفته ا ست ن شان دهنده مجموعه امکان تولید شبکه بدون در نظر گرفتن اصل بازده به مقیاس ثابت است. با استفاده از تعریف ۲، شبکه A دارای بازده به مقیاس صعودی، شبکه‌های D و C دارای بازده به مقیاس نزولی و شبکه B دارای بازده به مقیاس ثابت است.



شکل (۳): تعبیر هندسی بازده به مقیاس در شبکه

اینک قضیه ۵ را که تعمیمی از قضیه ۳ در [۲۴] و قضیه ۴ در [۲۵] است بیان می‌کنیم. همچنین لازم به توضیح است که ایده اثبات آن مشابه اثبات قضیه ۳ در [۲۴] و قضیه ۴ در [۲۵] است.

قضیه ۵: فرض کنید شبکه o بر روی مرز T_{SC}^{VRS} قرار دارد $\delta > ۰$ و $\beta > ۰$ ترتیب تغییرات متناسب در ورودی‌ها و خروجی‌های شبکه می‌باشند. در این صورت:

الف. شبکه o دارای بازده به مقیاس صعودی باشد اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $\frac{\beta}{\alpha} > ۱$.

ب. شبکه o دارای بازده به مقیاس نزولی باشد اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $\frac{\beta}{\alpha} < ۱$.

ج. شبکه o دارای بازده به مقیاس ثابت ا ست اگر و فقط اگر برای هر تغییر متنا سب دا شته باشیم $\frac{\beta}{\alpha} = ۱$.

اثبات الف: فرض کنید $(\alpha x_o, \beta y_o) \in T_{SC}^{VRS}$ بنابراین $\sum_{j=۱}^{N} (\theta_{Sj}^* x_{pj}) \lambda_j \le \alpha x_{po} (\forall p)$ و $\sum_{j=۱}^{N} (\varphi_{Mj}^* y_{qj}) \lambda_j \ge \beta y_{qo} (\forall q)$. می‌دانیم که $\beta > \alpha$ بنابراین $\beta = \alpha + \delta_۱$ تعریف می‌کنیم $\alpha = ۱ + \delta$ و $\beta = (۱+\delta) + \delta_۱$ در نتیجه داریم:

$$\sum_{j=۱}^{N} (\varphi_{Mj}^* y_{qj}) \lambda_j \ge ((۱+\delta) + \delta_۱)\, y_{qo} > (۱+\delta)\, y_{qo} \ (\forall q)$$

لذا $((۱+\delta) x_o, (۱+\delta) y_o)) \in \operatorname{int} T_{SC}^{VRS}$. بنابراین بازده به مقیاس صعودی است. اینک فرض می‌کنیم که بازده به مقیاس صعودی است بنابراین $((۱+\delta) x_o, (۱+\delta) y_o)) \in \operatorname{int} T_{SC}^{VRS}$. لذا بر

اساس تعریف نقطه درونی وجود دارد $\delta_1 > 0$ به‌طوری‌که $((1+\delta)x_o, ((1+\delta)+\delta_1)y_o) \in T_{SC}^{VRS}$. بنابراین $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{((1+\delta)+\delta_1)}{(1+\delta)} > 1$.

اثبات ب: مشابه با برهان قسمت الف است.

اثبات ج: فرض کنید $\frac{\beta}{\alpha} = 1$ و بازده به مقیاس ثابت نیست. در این صورت شبکه o یا دارای بازده به مقیاس صعودی ا ست و یا دارای بازده به مقیاس نزولی ا ست. در این صورت بنا بر دو قسمت قبل $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ یا $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ و این یک تناقض است بنابراین بازده به مقیاس ثابت است.

حال فرض می‌کنیم شبکهo دارای بازده به مقیاس ثابت ا ست ولی $\frac{\beta}{\alpha} \neq 1$ بنابراین یا $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ یا $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ در نتیجه بنابر قسمت الف و ب بازده به مقیاس ثابت نیست؛ و این یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{\beta}{\alpha} = 1$. □

همچنین برای بررسی روابط بین بازده به مقیاس شبکه و بازده به مقیاس هریک از مراحل، قضیه ۶ بیان می‌شود:

قضیه ۶: شبکه دومرحله‌ای o را در نظر بگیرید:

الف. اگر مرحله ۱ و ۲ دارای بازده به مقیاس صعودی با شند در این صورت شبکه دارای بازده به مقیاس صعودی است.

ب. اگر مرحله ۱ و ۲ دارای بازده به مقیاس نزولی باشند در این صورت شبکه دارای بازده به مقیاس نزولی است.

ج. اگر مرحله ۱ و ۲ دارای بازده به مقیاس ثابت با شند در این صورت شبکه دارای بازده به مقیاس ثابت است.

اثبات الف. فرض کنید (x, z, y) به ترتیب ورودی اولیه، تولیدات میانی و خروجی نهایی شبکه باشند؛ و α, β, γ به ترتیب تغییرات متناسب در x، y و z باشند. با توجه به فرض، مرحله ۱ دارای بازده به مقیاس صعودی است لذا $\gamma/\alpha > 1$. بنابراین $\gamma > \delta$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\beta > \gamma$. در نتیجه $\beta > \alpha$ و $\beta/\alpha > 1$. لذا شبکه دارای بازده به مقیاس صعودی است.

اثبات ب. مشابه با اثبات قسمت الف است.

اثبات ج. مشابه با اثبات قسمت الف است. □

شـــکل ۳ را مجدداً در نظر بگیرید، همان‌طور که مشـــاهده می‌کنید $D_۱$ و $D_۲$ دارای بازده به مقیاس نزولی می‌با شند بنابر ق ضیه فوق شبکه D نیز دارای بازده به مقیاس نزولی ا ست. $B_۱$ و $B_۲$ دارای بازده به مقیاس ثابت می‌با شند بنابر ق ضیه فوق شبکه B نیز دارای بازده به مقیاس ثابت است.

تذکر ۱: توجه به این نکته ضروری است که عکس قضایای فوق لزوماً برقرار نیست به‌عنوان‌مثال در شکل ۳، شبکه A دارای بازده به مقیاس صعودی ا ست درحالی‌که مرحله ۱ دارای بازده به مقیاس صعودی و مرحله ۲ دارای بازده به مقیاس ثابت است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تعریف ۲ برای کاربردهای عملی مناسب نیست به‌منظور استفاده در کاربردهای عملی قضـــیه ۷ را که تعمیمی از قضـــیه ۳ در [۱۵] اســـت پیشـــنهاد می‌کنیم. همچنین ایده اثبات آن مشابه اثبات قضیه ۳ در [۱۵] است.

قضیه ۷: فرض کنید شبکه o بر روی مرز کارای T_{SC}^{VRS} قرار دارد و $(v^*,u^*,\omega_۰^*)$ جواب بهینه مدل (۲۰) است آنگاه:

۱. اگر در هر جواب بهینه $\omega_۰^* > ۰$ شبکه بازده به مقیاس صعودی دارد.

۲. اگر در هر جواب بهینه $\omega_۰^* < ۰$ شبکه بازده به مقیاس نزولی دارد.

۳. اگر حداقل در یکی از جواب‌های بهینه $\omega_۰^* = ۰$ شبکه بازده به مقیاس ثابت دارد.

اثبات قسمت ۱: فرض کنید شبکه o تحت ارزیابی است و $(v^*,u^*,\omega_۰^*)$ جواب بهینه حاصل از حل مدل (۲۰) است.

$$\sum_{q=۱}^{Q} u_q^*(\varphi_{mj}^* y_{qo}) - \sum_{p=۱}^{P} v_p^*(\theta_{sj}^* x_{po}) + \omega_۰^* = ۰ .$$

تعریف می‌کنیم:

$$z = \sum_{q=۱} u_q^*(\varphi_j^*(۱+\delta)\, y_{qo}) - \sum_{p=۱}^{P} v_p^*(\theta_j^*(۱+\delta)\, x_{po}) + \omega_۰^*$$

در نتیجه:

$$z = (۱+\delta)\left(\sum_{q=۱}^{Q} u_q^*(\varphi_j^* y_{qo}) - \sum_{p=۱}^{P} v_p^*(\theta_j^* x_{po}) + \omega_۰^* \right) - \delta\omega_۰^* = ۰ - \delta\omega_۰^* < ۰$$

بنابراین $((۱+\delta)\, x_o, (۱+\delta)\, y_o) \in \operatorname{int} T_{SC}^{VRS}$ و با اســتفاده از تعریف ۲ شــبکه o دارای بازده به مقیاس صعودی است.

اثبات قسمت ۲: مشابه برهان قسمت ۱ است.

اثبات قسمت ۳: با توجه به این‌که $(v^*,u^*,\omega_۰^*)$ جواب بهینه مدل (۲۰) و $\omega_۰^* = ۰$ بنابراین

$$\sum_{q=1}^{Q} u_q^*(\varphi_j^* y_{q0}) - \sum_{p=1}^{P} v_p^*(\theta_j^* x_{p0}) = 0.$$

در نتیجه شبکه o بر روی مرز مشترک T_C^* و T_V^* قرار دارد پس شبکه دارای بازده به مقیاس ثابت است. □

با استفاده از قضیه ۷ الگوریتم زیر را برای محاسبه بازده به مقیاس ارائه می‌کنیم.

الگوریتم ۱

۱. جواب بهینه مدل (۲۰) را به دست می‌آوریم.
۲. اگر $\omega_0^* = 0$ در این صورت شبکه بازده به مقیاس ثابت دارد.
۳. اگر $\omega_0^* > 0$ در این صورت مدل ۲۳ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\min\ \omega_0 \\ &s.t.\quad \sum_{p=1}^{P} v_p x_{p0} = 1, \\ &\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_q(y_{q0}) - \sum_{p=1}^{P} v_p(x_{p0}) + \omega_0 = 0, \\ &\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_0(\varphi_{mj}^* y_{qj}) - \sum_{p=1}^{P} v_p^*(\theta_{sj}^* x_{pj}) + \omega_0 \le 0,\ \mathrm{j=1,\ldots,n},\ j \ne 0 \\ &\qquad u_q, p_r \ge 0\ (\forall q, r), \omega_0 \ge 0. \end{aligned} \tag{۲۳}$$

اگر جواب بهینه مدل (۲۳) برابر صفر باشد بازده به مقیاس ثابت است، در غیر این صورت بازده به مقیاس صعودی است.

۴. اگر $\omega_0^* > 0$ در این صورت مدل ۲۴ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\max\ \omega_0 \\ &s.t.\quad \sum_{p=1}^{P} v_p x_{p0} = 1, \\ &\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_q(y_{q0}) - \sum_{p=1}^{P} v_p(x_{p0}) + \omega_0 = 0, \\ &\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_0(\varphi_{mj}^* y_{qj}) - \sum_{p=1}^{P} v_p^*(\theta_{sj}^* x_{pj}) + \omega \le 0,\ \mathrm{j=1,\ldots,n},\ j \ne 0 \\ &\qquad u_q, p_r \ge 0\ (\forall q, r), \omega_0 \le 0. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

اگر جواب بهینه مدل (۲۴) برابر صفر با شد در این صورت بازده به مقیاس ثابت ا ست، در غیر این صورت بازده به مقیاس نزولی است.

در بحث فوق ما فرض کرده‌ایم که شـــبکه کارا اســـت. ولی در این قســـمت این فرض را حذف می‌کنیم با استفاده از تعریف ۱ و قضیه ۳، الگوریتم ۲ را برای تعیین بازده به مقیاس در شبکه ناکارا ارائه می‌کنیم.

الگوریتم ۲

۱. با استفاده از حل مدل (۲۱)، $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ را به دست می‌آوریم.
۲. فرض کنید $(v^*, u^*, \omega_{\circ}^*)$ جواب بهینه حاصل ارزیابی $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ با استفاده از مدل (۲۰) است.
۳. اگر $\omega_{\circ}^* = \circ$ در این صورت شبکه بازده به مقیاس ثابت دارد.
۴. اگر $\omega_{\circ}^* > \circ$ در این صورت مدل ۲۵ را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&\min\ \omega_{\circ}\\
&s.t.\quad \sum_{p=1}^{P} v_p \hat{x}_{p\circ} = 1,\\
&\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_{\circ}(\hat{y}_{q\circ}) - \sum_{p=1}^{P} v_p(\hat{x}_{p\circ})\omega_{\circ} = \circ\\
&\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_{\circ}(\varphi_j^* y_{qj}) - \sum_{p=1}^{P} v_p(\theta_j^* x_{pj}) + \omega_{\circ} \le \circ,\ \mathrm{j}=1,\dots,\mathrm{n},\ j \ne \circ\\
&\qquad u_q, p_r \ge \circ\ (\forall q, r), \omega_{\circ} \ge \circ
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

اگر جواب بهینه مدل (۲۵) برابر صفر باشد بازده به مقیاس ثابت است در غیر این صورت بازده به مقیاس صعودی است.

۵. اگر $\omega_{\circ}^* < \circ$ در این صورت مدل ۲۶ را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max\ \omega_{\circ}\\
&s.t.\quad \sum_{p=1}^{P} v_p \hat{x}_{p\circ} = 1,\\
&\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_{\circ}(\hat{y}_{q\circ}) - \sum_{p=1}^{P} v_p(\hat{x}_{p\circ}) + \omega_{\circ} = \circ\\
&\qquad \sum_{q=1}^{Q} u_{\circ}(\varphi_j^* y_{qj}) - \sum_{p=1}^{P} v_p(\theta_j^* x_{pj}) + \omega_{\circ} \le \circ,\ j=1,\dots,n,\ j \ne \circ,\\
&\qquad u_q, p_r \ge \circ\ (\forall q, r), \omega_{\circ} \le \circ.
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

اگر جواب بهینه مدل (۲۶) برابر صفر باشد بازده به مقیاس ثابت است در غیر این صورت بازده به مقیاس نزولی است.

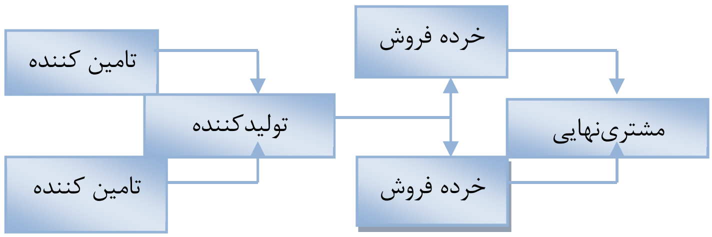
۴- مطالعه کاربردی

در این بخش مدل طراحی‌شــده را در دنیای واقعی برای ارزیابی کارایی و تعیین بازده به مقیاس چندین زنجیره‌ی تأمین در صــنعت بکار می‌بریم. برای این منظور از تولیدکنندگان ســیمان که در استان فارس در سال ۱۳۹۵ فعالیت داشتند، استفاده شد. با مطالعه دقیق‌تر صنعت انتخابی ۲۰ محصول مجزا همراه با زنجیره‌های تأمین جداگانه شناسایی شدند. سپس از مدل طراحی شده برای تعیین بازده به مقیاس این ۲۰ زنجیره‌ی تأمین استفاده شد.

برای ارزیابی کارایی و عملکرد زنجیره تأمین و تعیین بازده به مقیاس شــبکه نیاز اســت که مراحلی گام‌به‌گام طی شود تا مدل تحلیل‌پوششی داده‌ها استفاده و حل گردد. مراحل تعیین بازده به مقیاس زنجیره‌ی تأمین را می‌توان به چند بخش متفاوت تقســیم کرد. در مرحله اول باید ساختار و شکل زنجیره‌ی تأمین موردنظر شناسایی شود و سپس در مرحله دوم شاخص‌های مناسب در ارزیابی کارایی زنجیره‌ی تأمین شناخته شود. برای این هدف ابتدا تمامی شاخص‌های مهم در ارزیابی کارایی و عملکرد زنجیره‌ی تأمین لیست گردید ازآنجایی‌که شاخص‌های ارزیابی از هر صــنعت به صــنعت دیگر، ممکن اســت متفاوت باشــد، لذا در این قســمت با توجه به نظر کارشناسان و متخصصان صنعت موردنظر شاخص‌های مناسب و مهم از این لیست انتخاب گردید. در مرحله بعد مدل تحلیل‌پوششی داده‌های شبکه‌ای برای تعیین بازده به مقیاس شبکه طراحی شده، مورداستفاده قرار گرفت. اینک هر یک از مراحل به‌طور دقیق توضیح داده می‌شود.

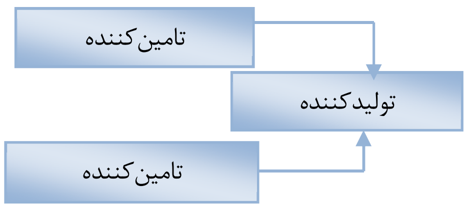
مرحله اول: تعیین ساختار شبکه زنجیره‌ی تأمین

در ابتدای کار باید ساختار و شکل زنجیره‌ی تأمین انتخابی با دقت ترسیم شود. صنعت انتخابی در این مقاله صنعت سیمان است. ماهیت فاسدشدنی سیمان باعث می‌شود که ارزیابی کارایی و تعیین بازده به مقیاس آن بســیار مهم باشــد. به‌منظور توســعه یک مدل برای ارزیابی عملکرد زنجیره تأمین سیمان، چارچوب مفهومی زیر و روابط میان اعضای زنجیره تأمین در نظر گرفته می‌شــود. چارچوب زنجیره‌ی تأمین ســیمان را می‌توان به چهار ســطح، یعنی، تأمین‌کنندگان، تولیدکننده و / یا سازنده، خرده‌فروش / توزیع‌کننده و مشتریان نهایی تقسیم می شود. زنجیره تأمین سیمان و روابط آن در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل (۴): ساختار زنجیره موردمطالعه

در این مقاله ما یک ساختار دو بخشی برای زنجیره‌ی تأمین در نظر می‌گیریم این ساختار در شکل ۵ آمده است.



شکل (۵): ساختار دومرحله‌ای زنجیره تأمین موردمطالعه

مرحله دوم: تعیین ورودی‌ها و خروجی‌های زنجیره تأمین موردمطالعه

قبل از بحث و بررسی در خصوص انتخاب و تعیین شاخص‌ها یک بررسی کلی در سیستم‌های ارزیابی کارایی و عملکرد زنجیره تأمین محصولات سیمانی انجام خواهد شد. سپس بر اساس نتیجه‌گیری‌های به‌عمل‌آمده در این خصوص شاخص‌های مهم و با اولویت در این زمینه انتخاب خواهند شد.

در سال‌های اخیر صنعت سیمان در جهان با تغییرات زیادی مواجه شده است که عمده‌ترین آن‌ها جهانی شدن بازارها، تغییرات تکنولوژی، کوتاه‌تر شدن عمر محصولات و متنوع شدن درخواست‌ها و نیاز مشتریان هست. به علت تغییرات ایجاد شده در بازار و مزایای ذکر شده، در سال‌های اخیر به ایجاد زنجیره‌ی تأمین در صنایع ساختمانی و بهبود سیستم‌های مختلف اجرایی در این‌گونه زنجیره‌ها توجه زیادی شده است. کالاهای با عمر متوسط و بخصوص صنایع ساختمانی مواردی هستند که بیشترین چالش‌ها را برای مدیریت زنجیره‌ی تأمین به وجود می‌آورند. این چالش‌ها عمدتاً به علت تنوع در تعداد این کالاها، نیازهای خاص برای ردیابی و پیگیری جریان کالا در طی زنجیره‌ی تأمین، عمر متوسط محصولات در زنجیره‌ی تأمین بروز

می‌کنند. به‌علاوه، حجم بالای کالاهایی که در طول زنجیره‌ی تأمین جابجا می‌شوند، تصمیم‌گیری در خصوص فرآیندهایی با بالاترین بازدهی را یک الزام می‌سازد؛ بنابراین، مدیریت زنجیره تأمین کارآمد در خصوص کالاهای با عمر متوسط و به‌ویژه صنایع ساختمانی بالاترین درجه اهمیت را به خود اختصاص می‌دهد. با توجه به موارد فوق، بدیهی است که داشتن یک سیستم ارزیابی کارایی و عملکرد زنجیره تأمین صنایع ساختمانی می‌تواند به حل چالش‌ها و مشکلات مدیریت زنجیره تأمین کمک‌های شایانی کند.

یکی از هدف‌های اصلی هر بنگاه تجاری کسب درآمد است. در گروه شاخص‌های مالی نحوه فعالیت‌های مالی زنجیره با شاخص‌هایی مانند میزان سود، هزینه‌های بالاسری و ... موردسنجش قرار می‌گیرند. همچنین یکی از اصول امروزی در تجارت، رضایت مشتریان است که به این مقوله نیز درگرو سرویس‌دهی به مشتری در قالب شاخص‌هایی مانند زمان پاسخ‌دهی به مشتری، تعداد شکایات و ... پرداخته می‌شود. گروه شاخص‌های کارایی نیز به استفاده درست و بهینه از منابع سازمان اشاره دارد. یکی دیگر از نکات مهم در محیط رقابتی امروز، انعطاف‌پذیری یک شرکت و زنجیره تأمین آن است. زنجیره‌های امروزی باید ازنظر حجم، ترکیب تولید و ... به صورت منعطف عمل نمایند. این موضوع به‌وسیله شاخص‌های انعطاف‌پذیری مورد سنجش قرارگرفته است.

شاخص‌های انعطاف‌پذیری ازجمله شاخص‌هایی هستند که در تحقیقات توجه کافی به آن‌ها نشده است. گفتنی است که از خصوصیات دیگری که در زنجیره تأمین صنایع ساختمانی باید به آن اشاره کرد، بحث کیفیت است که می‌توان آن را جزء فرآیندهای کسب‌وکار داخلی سازمان در نظر گرفت. قابل‌ذکر است که این کیفیت به دودسته کیفیت محصولات و کیفیت فرآیندهای تولید تقسیم می‌شود که در اینجا هر دو مقوله در نظر گرفته شده است. هرچند که در تحقیقات قبلی موردتوجه زیادی قرار نگرفته‌اند. با توجه با اصول اساسی زنجیره تأمین، هماهنگی و وجود روابط بین حلقه‌های ارزیابی کنترل زنجیره تأمین صنایع ساختمانی بسیار مهم و ضروری است که در این مقاله به‌دقت مورد تحلیل قرار می‌گیرد. قابل‌ذکر است که این ۵ دسته کلی را می‌توان به زیر معیارها و شاخص‌های جزئی‌تری تقسیم کرد. با بررسی‌های به‌عمل‌آمده در هر دسته شاخص‌ها و سنجه‌های زیر (جدول ۲) شناسایی شد.

قابل‌ذکر است که جدول ۲ بر اساس ادبیات و پیشینه تحقیق در ارزیابی کارایی و عملکرد زنجیره تأمین شکل‌گرفته است. در نگاه اول آنچه در خصوص این جدول و سنجه‌ها و معیارهای ارزیابی کارایی زنجیره تأمین صنایع ساختمانی می‌توان گفت این است که سنجه‌های ارزیابی در این زمینه با کلیت سنجه‌های ارزیابی در زنجیره تأمین در صنایع دیگر تفاوت بارزی ندارد، ولی ممکن است که در این صنعت اهمیت یک یا چند سنجه در ارزیابی مهم‌تر از صنایع دیگر باشد.

جدول (۲): بخشی از سنجه‌های استفاده شده در ادبیات ارزیابی عملکرد زنجیره تأمین صنایع ساختمانی

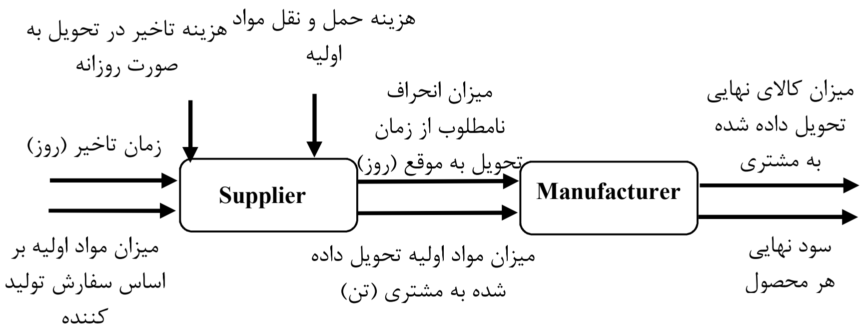
ارتباط با مشتری و بازار	کیفیت و ایمنی	انعطاف‌پذیری	کارایی	مالی
۱-تحویل درست و به‌موقع ۲-تعداد نمایندگی ۳-تعداد شکایات ۴-سهم بازار ۵-رضایت مشتری ۶-وفاداری مشتری ۷-مطرح بودن نام تجاری ۸-زمان پاسخ به مشتری ۹-حضور در نمایشگاه‌ها	۱-میزان برگشت محصول ۲-آزمایش مواد اولیه ۳-شرایط حمل ۴-دما و حرارت مکان ۵-کیفیت بسته‌بندی ۶-آزمایش محصول نهایی ۷-بهداشت محیط ۸-امکان پیگیری گواهی‌نامه‌های بهداشت ۹-بسته‌بندی ۱۰-مواد شیمیایی	۱-بسته‌بندی ۲-زمان تحویل ۳-پاسخ به مشتری ۴-تحویل اضطراری ۵-مکان تحویل ۶-تناوب تحویل ۷-میزان تولید ۸-ترکیب تولید ۹-مراحل عملیات ۱۰-فرمول تولید	۱-میزان مصرف آب ۲-میزان مصرف انرژی ۳-میزان موجودی ۴-تعداد خوابیدن دستگاه‌ها ۵-تعداد روزهای انبارش ۶-فروش ازدست‌رفته ۷-استفاده از ضایعات ۸-میزان تولید ۹-زمان تولید ۱۰-میزان مصرف سوخت ۱۱-میزان پر شدن ماشین ۱۲-زمان برگشت سرمایه ۱۳-تنوع / زمان ۱۴-نرخ تکمیل سفارش ۱۵-کارایی سیکل ۱۶-برنامه توزیع ۱۷-تکنولوژی جدید ۱۸-زمان تولید محصول جدید	۱-سود ۲-میزان فروش ۳-هزینه‌های پرسنلی ۴-هزینه‌های بالاسری ۵-هزینه‌های حمل‌ونقل ۶-هزینه تولید ۷-هزینه نگه‌داری ۸-بازگشت سرمایه ۹-میزان صادرات

البته قابل‌ذکر است که تعداد شاخص و معیارها بسیار زیاد است، لذا در ابتدا لازم است که یک غربال‌سازی اولیه در خصوص انتخاب معیارها انجام شود. برای غربال‌سازی اولیه ازنظر متخصصان و کارشناسان صنایع ساختمانی استفاده می‌شود. بدین ترتیب شاخص‌های زیر در ارزیابی کارایی و عملکرد زنجیره تأمین صنایع ساختمانی انتخاب گردید.

۱) زمان تأخیر
۲) میزان مواد اولیه بر اساس سفارش تولیدکننده
۳) هزینه تأخیر در تحویل به‌صورت روزانه
۴) هزینه حمل‌ونقل مواد اولیه
۵) میزان انحراف نامطلوب از زمان تحویل به‌موقع
۶) میزان مواد اولیه تحویل داده شده به تولیدکننده
۷) میزان کالای نهایی تحویل داده شده به مشتری

۸) سود نهایی هر محصول

همان‌طور که مشخص است برخی از این شاخص‌ها ورودی تأمین‌کننده و برخی واسطه و برخی نیز خروجی نهایی ه ستند. با ا ستفاده ازنظرت متخ ص صان روابط بین این شاخص‌ها به صورت شکل ۶ تحلیل گردید.



شکل (۶): شاخص‌ها در زنجیره صنعت سیمانی

با توجه به نمادگذاری‌های مطرح شده در بخش قبل داریم:

x_{1j} = زمان تأخیر (روز)، x_{2j}=میزان مواد اولیه بر اساس سفارش تولیدکننده، x_{3j}=هزینه تأخیر در تحویل به‌صورت روزانه و x_{4j}=هزینه حمل‌ونقل مواد اولیه.

i_{1j}=میزان انحراف نامطلوب از زمان تحویل به‌موقع (روز) و i_{2j}=میزان مواد اولیه تحویل داده شده به مشتری (تن).

y_{1j}=میزان کالای تحویل داده شده به مشتری و y_{2j}=سود نهایی هر محصول.

مرحله سوم: استفاده از مدل تحلیل‌پوششی داده‌ها

با توجه به ورودی و خروجی‌های مشخص شده برای هر زنجیره تأمین ابتدا با استفاده از مدل (۲۱) کارایی هر زنجیره را به دست می‌آوریم. نتایج در جدول ۳ نشان داده شده است.

برای درک بهتر نتایج به‌دست‌آمده، کارایی‌های به‌دست‌آمده را بر روی شکل ۷ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در مرحله ۱، ۱۰ واحد کارا وجود دارد به‌عبارت‌دیگر ۵۰ درصد از واحدها در این مرحله، عملکرد رضایت‌بخشی را دارا می‌باشند. همچنین زنجیره تأمین ۱۰ در این مرحله دارای ضعیف‌ترین عملکرد است. مجدداً شکل ۷ را در نظر بگیرید، بدیهی است که DMU1 دارای ضعیف‌ترین عملکرد در مرحله ۲ است و پس‌ازآن واحدهای ۱۱ و ۲ به ترتیب دارای ضعیف‌ترین عملکرد می‌باشند. برخلاف واحدهای ۱ و ۲ و ۱۱ که دارای عملکرد نامطلوبی در این

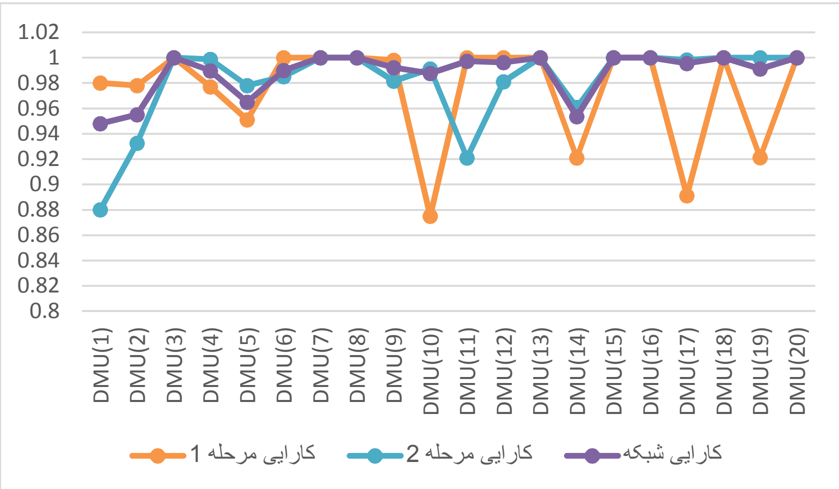
مرحله می‌باشند واحدهای ۳، ۷، ۸، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹ و ۲۰ کارا می‌باشند. به‌عبارت‌دیگر ۹ واحد کارا یا ۴۵ درصد واحدها در این مرحله کارا عمل می‌نموده‌اند.

جدول (۳): کارایی زنجیره‌های تأمین

So_2	So_1	Si_4	Si_3	Si_2	Si_1	کارایی کلی	θ_j^*	$\frac{1}{\varphi_j^*}$	φ_j^*	DMUs
۱/۴۰E+۰۴	۷/۳۰E+۰۳	۰	۰	۰	۲/۷۷۱۶	۰/۹۴۸	۰/۹۸	۰/۸۸۰۱	۱/۱۳۶۲	DMU۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۵۵۱	۰/۹۷۸	۰/۹۳۲۶	۱/۰۷۲۲	DMU۲
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU۳
۱/۸۰E+۰۴	۸/۶۰E+۰۳	۰	۰	۲/۶۰E+۰۳	۳/۶۴۳۶	۰/۹۸۹۷	۰/۹۷۷	۰/۹۹۸۷	۱/۰۰۱۳	DMU۴
۱/۰۰E+۰۴	۰	۰	۰	۴/۵۰E+۰۳	۰	۰/۹۶۵	۰/۹۵۱	۰/۹۷۸۲	۱/۰۲۲۲	DMU۵
۱/۴۰E+۰۴	۱/۱۰E+۰۴	۰	۲/۱۰E+۰۲	۴/۸۰E+۰۲	۰	۰/۹۹	۱	۰/۹۸۵۱	۱/۰۱۵۱	DMU۶
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU۷
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU۸
۲/۱۰E+۰۲	۰	۰	۰	۰	۰/۶۱۹	۰/۹۹۲۳	۰/۹۹۷۹	۰/۹۸۱۷	۱/۰۱۸۶	DMU۹
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۸۷۶	۰/۸۷۵	۰/۹۹۱۲	۱/۰۰۸۸	DMU۱۰
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۹۷۳	۱	۰/۹۲۱	۱/۰۸۵۷	DMU۱۱
۹/۳۰E+۰۳	۷/۰۰E+۰۳	۰	۰	۰	۲/۹۴۳۴	۰/۹۹۶۲	۱	۰/۹۸۱۲	۱/۰۱۹۱	DMU ۱۲
۲.۰۰E+۰۴	۶.۷۰E+۰۳	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU ۱۳
۲/۵۰E+۰۳	۵/۳۰E+۰۳	۰	۰	۵/۶۰E+۰۳	۴/۸۲۸۸	۰/۹۵۳۵	۰/۹۲۱	۰/۹۶۱	۱/۰۴۰۵	DMU۱۴
۸/۶۰E+۰۳	۳/۳۰E+۰۳	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU۱۵
۱/۹۰E+۰۴	۴/۷۰E+۰۳	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU ۱۶
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۹۹۵۶	۰/۸۹۱۲	۰/۹۹۸۳	۱/۰۰۱	DMU ۱۷
۵/۵۰E+۰۳	۱/۵۰E+۰۳	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU ۱۸
۱/۴۰E+۰۴	۰	۰	۰	۲/۰۰E+۰۳	۷/۸۶۱	۰/۹۹۱۳	۰/۹۲۱۲	۱	۱	DMU۱۹
۵/۶۰E+۰۳	۱/۷۰E+۰۳	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	DMU ۲۰

همچنین با استفاده نتایج به‌دست‌آمده مشاهده می‌شود که تنها ۸ زنجیره تأمین و به‌عبارت‌دیگر ۴۰ درصد واحدها، کارای کلی می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در هریک از زنجیره‌های تأمین کارا، مراحل۱ و ۲ نیز کارا می‌باشند؛ و همچنین زنجیره‌ی تأمین ۱، دارای ضعیف‌ترین

عملکرد است. همان‌طور که از روی شکل نیز مشخص است، مرحله ۲ در این زنجیره نیز ضعیف-ترین عملکرد را در بین سایر واحدها دارا است؛ بنابراین برای بهبود عملکرد در این زنجیره باید عملکرد مرحله ۲ بیش‌ازپیش موردتوجه قرار گیرد. همچنین در زنجیره‌های ۱۷ و ۱۹، اگرچه مرحله ۱ در این دو زنجیره در میان سایر واحدها دارای عملکرد ضعیفی است ولی با توجه به عملکرد مطلوب مرحله ۲، عملکرد کلی زنجیره نیز بهبودیافته است و نمره کارایی کل این دو زنجیره افزایش‌یافته است؛ بنابراین در جهت رسیدن به عملکردی بهتر، مدیران این دو زنجیره باید عملکرد مرحله ۱ را بهبود بخشند. به همین ترتیب می‌توان عملکرد سایر واحدها را نیز مورد تجزیه‌وتحلیل قرار داد.



شکل (۷): کارایی مراحل زنجیره‌تامین

درنهایت در مرحله آخر با استفاده از الگوریتم ۲، نوع بازده به مقیاس را در هریک از زنجیره‌های تأمین مشخص می‌کنیم. نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۴ بیان شده است.

لازم به توضیح است که Inc، Dec و Cons به ترتیب نشان‌دهنده بازده به مقیاس صعودی، نزولی و ثابت می‌باشند.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در مرحله ۱، ۱۴ واحد دارای بازده به مقیاس صعودی و ۶ واحد دارای بازده به مقیاس ثابت است. به‌عبارت‌دیگر ۷۰ درصد واحدها دارای بازده به مقیاس صعودی و ۳۰ واحد دارای بازده به مقیاس ثابت هستند. همچنین در مرحله ۲، ۱۲ واحد دارای بازده به مقیاس ثابت و ۷ واحد دارای بازده به مقیاس ثابت و ۱ واحد دارای نزولی هستند. به همین ترتیب بدیهی است که ۱۰ واحد دارای بازده به مقیاس صعودی و ۷ واحد دارای بازده به مقیاس ثابت و

۳ واحد دارای بازده به مقیاس نزولی است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در زنجیره تأمین ۱، ۴، ۶، ۹، ۱۶، ۱۸، ۱۹ مرحله ۱ و ۲ دارای بازده به مقیاس صعودی می‌باشند و همچنین کل زنجیره تأمین نیز دارای بازده به مقیاس صعودی است. به همین ترتیب در زنجیره تأمین ۳ و ۸ مراحل ۱ و ۲ دارای بازده به مقیاس ثابت هستند و همچنین کل زنجیره تأمین ۳ و ۸ نیز دارای بازده به مقیاس ثابت هستند؛ که این موضوع تأییدکننده قضیه ۵ نیز است.

جدول (۴): بازده به مقیاس زنجیره‌های تأمین

DMUs	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مرحله ۱	Inc	Inc	Cons	Inc	Inc	Inc	Cons	Cons	Inc	Cons
مرحله ۲	Inc	Inc	Cons	Inc	Cons	Inc	Inc	Cons	Inc	Inc
زنجیره تأمین	Inc	Cons	Cons	Inc	Dec	Inc	Cons	Cons	Inc	Cons
DMUs	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
مرحله۱	Cons	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	Cons	Inc	Inc	Inc
مرحله ۲	Inc	Cons	Cons	Dec	Cons	Inc	Inc	Inc	Inc	Cons
زنجیره تأمین	Dec	Inc	Inc	Cons	Inc	Inc	Cons	Inc	Inc	Dec

۴- نتیجه‌گیری

بر اساس شرایط بازار، سیاست‌های اقتصادی و... مدیران تمایل دارند تا تغییراتی در شبکه تحت مدیریت خود ایجاد کنند؛ بنابراین آن‌ها تمایل دارند که اطلاعاتی در رابطه با تغییرات نسبی خروجی در مقایسه با تغییرات نسبی ورودی داشته باشند. در حقیقت آن‌ها به دنبال پاسخ به این سؤال می‌باشند که آیا تغییرات متناسب در ورودی‌های یک شبکه بیشتر/ کمتر از تغییرات متناسب در خروجی‌های شبکه است؟ و همچنین آیا تغییرات متناسب در اندازه بخش‌های درونی بر روی عملکرد شبکه تأثیرگذار است؟ برای پاسخ‌گویی به این سؤالات نیازمند بحث پیرامون بازده به مقیاس در شبکه هستیم.

این مقاله از دو بخش تشکیل شده است در بخش اول مدلی جدید برای ارزیابی عملکرد واحدهای دومرحله‌ای ارائه شد. این مدل بر پایه مدل ارائه شده توسط یانگ و همکاران ارائه شده است. اگرچه در روش ارائه شده توسط یانگ و همکاران برخلاف سایر مطالعات انجام شده در این زمینه یک مجموعه امکان تولید جدید برای شبکه‌های دومرحله‌ای بیان شده است و همچنین با استفاده از این روش به‌راحتی می‌توان برای هریک از اعضای زنجیره تأمین ناکارا یک الگو ارائه کرد. ولی با توجه به این‌که مدل ارائه شده یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی است بنابراین جواب به‌دست‌آمده از این مدل توسط الگوریتم‌های غیرخطی جواب بهینه موضعی است نه بهینه

سراسری. به‌عبارت‌دیگر با توجه به این‌که در مدل‌های غیرخطی برای به دست آوردن جواب بهینه معمولاً از الگوریتم‌های تقریبی و یا روش‌های هیورستیک استفاده می‌کنیم و جواب به‌دست‌آمده توسط این الگوریتم‌ها دارای خطای محاسباتی می‌باشند. اگرچه این خطا در مواجه با داده‌های کوچک قابل صرف‌نظر کردن است ولی در برخی از موارد به‌راحتی نمی‌توان از این خطا صرف‌نظر کرد. از طرفی الگوریتم‌های موجود برای حل مدل‌های خطی معمولاً جواب بهینه موضعی را به دست می‌آورند و همچنین الگوریتم‌های موجود برای حل مدل‌های غیرخطی معمولاً زمان‌بر می‌باشند. در نتیجه هزینه انجام محاسبات را به‌شدت افزایش می‌یابد؛ بنابراین با حفظ نقاط قوت مدل مذکور در این مقاله مدل جدیدی را برای هر دو حالت CRS و VRS برای محاسبه کارایی شبکه ارائه نمودیم که خطی است؛ و ازنظر محاسباتی بسیار به‌صرفه‌تر از مدل مذکور است.

در بخش دوم الگوریتمی جدید برای تعیین بازده به مقیاس در شبکه مطرح شده است؛ و رابطه میان بازده به مقیاس شبکه و بازده به مقیاس زیر فرایندها با ارائه چند قضیه موردبررسی قرار گرفته است. سپس الگوریتم ارائه شده برای تعیین بازده به مقیاس واحدهای ناکارا تعمیم داده شده است. اگرچه الگوریتم ارائه شده الگوریتمی قوی برای تعیین بازده به مقیاس در واحدهای دومرحله‌ای است ولی برای مطالعات آتی می‌توان این الگوریتم را برای شبکه‌های چندمرحله‌ای در حالت موازی و سری گسترش داد. درنهایت الگوریتم ارائه شده بر روی یک نمونه واقعی به کار گرفته شده است و نتایج به‌دست‌آمده با مطالب و قضایای بیان شده منطبق است.

منابع

[1] Farrell, M. J. (1957). The Measurement of productive efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, A CXX, Part **3**, 253-290.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.

[۳] انواری رستمی، علی‌اصغر؛ کلاته رحمانی، راحله؛ آقایی، محمدعلی؛ آذر، عادل (۱۳۹۲). اجرای حسابرسی عملیاتی با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده یکپارچه: مدرکی از صنعت بیمه ایران، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۳، شماره ۲، ص ۲۱-۴۳.

[۴] باتمیز، آیدا; حسین‌زاده سلجوقی، فرانک; ثانوی، علی اکبر (۱۳۹۵). روشی جدید در تعیین ورشکستگی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری مجموعه‌های راف فازی. مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۶، شماره ۱، ص ۱-۲۲.

[5] Chen,Y. and Zhu, J. (2004). Measuring information technology’s indirect impact on firm performance, *Information Technology and Management Journal*, **5**, 9–22.

[6] Kao, C. and Hwang, S.N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan, *European Journal of Operational Research*, **185**, 418–429.

[7] Chen, Y. and Cook, W.D. and Li, N. and Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA, *European Journal of Operational Research*, **196**, 1170–1176.

[8] Cook, W. and Zhu, J. and Bi, G. and Yang, F. (2010). Network DEA: Additive efficiency decomposition, *European Journal of Operational Research*, **207**, 1122-1129.

[9] Tone, K. and Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slack-based measure approach, *European Journal of Operational Research*, **197**, 243-252.

[10] Yang, F. and Wu, D. and Liang, L. and Bi, G. and Wu, D. D. (2011). Supply chain DEA: production possibility set and performance evaluation model. *Annals of operations research*, **185**, 195-211.

[11] Paradi, J. C. and Routt, S. and Zhu, H. (2011). Two-stage evaluation of bank branch efficiency using data envelopment analysis, *Omega*, **39**, 99-109.

[12] Amado, C. and Santos, S. and Marques, P. (2012). Integrating the Data Envelopment Analysis and the balanced scorecard approaches for enhanced performance assessment, *Omega*, **40**, 390-403

[13] Chen, C. and Hong, Y. (2011). Network model for supply chain performance evaluation, *European Journal of Operational Research*, **213**, 147-155.

[14] Banker, R.D. and Charnes, A. and Cooper, W.W. (1984). Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis, *Management Science*, **30**, 1078–1092.

[15] Banker, R.D. and Thrall, R.M. (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, **62**, 74–84.

[16] Kerstens, K. and Vanden Eeckaut, P. (1999). Estimating returns to scale using non-parametric deterministic technologies: A new method based on goodness-of-fit, *European Journal of Operational Research*, **113**, 206-214.

[17] Podinovski, V.V. (2004). On the linearization of reference technologies for testing Return to scale in FDH models, *European Journal of Operational Research*, **152**, 800–802.

[18] Soleimani-damaneh, M. and Reshadi, M. (2007). A polynomial-time algorithm to estimate returns to scale in FDH models, *Computers and Operations Research*, **34**, 2168–2176.

[19] Soleimani-damaneh, M. and Mostafaee, M. (2009). Stability of the classification of returns to scale in FDH models, *European Journal of Operational Research*, **196**, 1223–1228.

[20] Sueyoshi, T. and Goto, M. (2012). Returns to Scale, Damages to Scale, Marginal Rate of Transformation and Rate of Substitution in DEA Environmental Assessment, Energy Economics, **34**, 905–917.

[21] Krivonozhko, V. E. and Føsund, F. R. and Lychev, A.V. (2014). Returns-to-scale properties in DEA models: The fundamental role of interior points, European Journal of Operational Research, **232**, 644–670.

[22] Zhang, Q. and Yang, Zh. (2015). Returns to scale of two-stage production process, Computers & Industrial Engineering. **90**, 259–268.

[23] Cooper, W.W and L.M. Seiford, L.M and Tone, K. (1999). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models*, Applications, References and DEA-Solver Software. Kluwer Academic Publishers, P. 48.

[24] Tone, K. (2001). On returns to scale under weight restrictions in data envelopment analysis, *Journal of Productivity Analysis*. **16**, 31–47.

[25] Soleimani-damaneh, M. (2012). On a basic definition of returns to scale. *Operations Research Letters*, **40**,144–147.

JAMM,
DOI: 10.22055/JAMM.2020.29434.1719

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Performance Evaluation and Specifying of Return to Scale in Network DEA

Hilda Saleh[*], Farhad Hosseinzadeh Lotfi[**], Mohsen Rostamy-Malkhalifeh[**], Morteza Shafiee[***]

[*]Department of Mathematics, Faculty of Science, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

[**]Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University Tehran, Iran

[***]Department of Industrial Management, Economic and Management Faculty, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran

Received: May 25 2019 Accepted for publication: May 23 2020
Corresponding author: h.saleh@iauctb.ac.ir

Abstract

Although Data Envelopment Analysis (DEA) is a powerful technique for evaluation of decision-making units with multiple inputs and outputs, internal activities are neglected and each unit treats as a "black box" by considering only initial inputs and outputs (in the basic DEA models). In this paper, a network DEA model for multi-stage units, as a tool for considering the internal relations, is designed. First, a new production possibility set for two-stage units is defined. Then, a method for evaluation of two-stage units is introduced. Since one of the most important issues in economical decisions is RTS, a new algorithm for determining the RTS of in two-stage units was presented by using of the new PPS, and then the proposed algorithm on the empirical study was applied and the final results were analyzed.

Keywords: Performance Evaluation, Return to Scale, DEA, Network DEA.

Mathematics Subject Classification (2010): 90C08, 97M40