مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۵۴-۶۱

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.37999.1953

چه وقت $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه پیوسته است؟

فروغ دلدار [۱]، شعبان قلندرزاده [۱] ×، مهرداد نامداری [۲]

(۱) دانشکده ریاضی، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۶

چکیده: نیم‌حلقه تعویض‌پذیر R را پیوسته می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:(۱) هر ایدآل غیر صفر I در یک جمعوند R اساسی باشد؛ (۲) هر ایدآلی از R را که با یک جمعوند آن یکریخت باشد به‌توان به‌عنوان یک جمعوند نیز در نظر گرفت. در این مقاله، بعد از بیان و اثبات چند گزاره در زمینه نیم‌حلقه‌های تعویض‌پذیر، تمرکز خود را روی نیم‌حلقه توابع پیوسته حقیقی نامنفی مقدار $C^+(X)$، گذاشته و فضای توپولوژی X را چنان مشخص می‌کنیم که $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه‌ی پیوسته باشد.

واژه‌های کلیدی: نیم‌حلقه بئر، عضو خودتوان ، عضو متمم‌پذیر ، نیم‌حلقه توابع پیوسته حقیقی نامنفی مقدار، نیم‌حلقه فون‌نیومن منظم.

رده‌بندی ریاضی: 16Y60, 13A15

۱ مقدمه

یک نیم‌حلقه شامل یک مجموعه‌ی R همراه با دو عمل دوتایی روی R، جمع $+$ و ضرب $.$، است به‌طوری‌که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. $(R,+)$ یک مونوئید آبلی با همانی ۰ باشد.

۲. $(R,.)$ یک مونوئید با عضو همانی ۱ باشد.

× نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: (F. Deldar) foroughdeldar@yahoo.com (Sh. Ghalandarzadeh) ghalandarzadeh@kntu.ac.ir
رایانامه: (M. Namdari) namdari@scu.ac.ir

۳. عمل ضرب از هر دو طرف روی عمل جمع توزیع‌پذیر باشد.

۴. برای هر $r \in R$ داشته باشیم $r0 = 0r = 0$.

۵. $1 \neq 0$.

در این مقاله، R یک نیم‌حلقه تعویض‌پذیر دلخواه، و $\mathrm{Ann}\,(A)$ پوچساز زیر مجموعه دلخواه A از نیم‌حلقه R است. مطابق [۴]، $a \in R$ را متمم‌پذیر گویند هرگاه $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a + b = 1$ و $ab = 0$. عنصر b را متمم a در R گفته، با $a^{\perp}$ نشان می‌دهند. لازم به ذکر است که اگر a عنصری متمم‌پذیر باشد، متمم آن یکتا است. در واقع اگر دو عضو b و c هر دو متمم‌های a باشند، آنگاه

$$b = (a + c)b = ab + cb = cb = cb + ca = c(a + b) = c.$$

مجموعه‌ی تمام عناصر متمم‌پذیر نیم‌حلقه R را با $Comp(R)$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه همواره ناتهی است به این دلیل که همیشه $0 \in Comp(R)$ و $0^{\perp} = 1$. عنصر $a \in R$ را خودتوان ضربی می‌گوییم هرگاه $a^2 = a$. مجموعه تمام عناصر خودتوان ضربی از نیم‌حلقه‌ی R را با $\mathrm{I}^{\times}(R)$ نشان داده و توجه می‌کنیم که هرگاه $a \in Comp(R)$ آنگاه $a = a1 = a(a+a^{\perp}) = a^2$. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که در هر نیم‌حلقه دلخواه هر عضو متمم‌پذیر یک خودتوان ضربی است و درواقع $Comp(R) \subseteq \mathrm{I}^{\times}(R)$. اما باید دقت داشته باشیم که ممکن است $Comp(R) \neq \mathrm{I}^{\times}(R)$. در ادامه مثالی در این باب ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۱. مجموعه $R = \{-\infty, 0, 1, 2, 3\}$ را در نظر می‌گیرید. عمل‌های جمع و ضرب را روی R بدین صورت تعریف می‌کنیم.

$$i \oplus h = \max\{i, h\}, \quad i \otimes h = \min\{i + h, 3\}.$$

به وضوح $< R, \oplus, \otimes >$ یک نیم‌حلقه بوده و $\mathrm{I}^{\times}(R) = \{-\infty, 0, 3\}$. به‌آسانی می‌توان نشان داد که $0_R = -\infty$ و $1_R = 0$. اما ۳ یک عضو متمم‌پذیر نیست و بنابراین $Comp(R) \neq \mathrm{I}^{\times}(R)$.

آنچه در بالا بیان شد، به ما انگیزه تعریف کلاسی از نیم‌حلقه‌ها را داد که در آن‌ها هر خودتوان ضربی یک عضو متمم‌پذیر است.

تعریف ۲.۱. یک نیم‌حلقه R را یک $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$–نیم‌حلقه گویند هرگاه هر عنصر خودتوان ضربی از R متمم‌پذیر باشد، به‌عبارت دیگر $\mathrm{I}^{\times}(R) = Comp(R)$.

در زیر چند مثال ارائه می‌دهیم.

مثال ۳.۱. بدیهی است که حلقه‌ها، مثال‌هایی از $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$–نیم‌حلقه خواهند بود. همچنین، نیم‌حلقه‌هایی که همزمان پلین[†]، یوکد[‡] و ساده[§] باشند نیز $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$– نیم‌حلقه‌اند (برای اطلاعات بیش‌تر در رابطه با این نیم‌حلقه می‌توان به [۴] مراجعه کرد).

در ادامه نیم‌حلقه‌ی $C^+(X)$ که ایفاگر نقش مهمی در جبرتابعی می‌باشد را یادآوری می‌کنیم. لازم به ذکر است که جبر تابعی محل تلاقی جبرمجرد، توپولوژی عمومی، توپولوژی جبری و آنالیز تابعی است. فرض کنیم X یک فضای تیخونف باشد. مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته و نامنفی $f : X \to \mathbb{R}^+$، همراه با عمل‌های نقطه‌ای جمع و ضرب توابع نیم‌حلقه $C(X, \mathbb{R}^+) = C^+(X)$ را تولید می‌کند. (برای اطلاعات بیشتر در مورد این نیم‌حلقه، ما خواننده علاقه‌مند را به دیدن مقاله‌ی مروری [۹] دعوت می‌کنیم).

در زیر نشان می‌دهیم که $C^+(X)$ یک $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$–نیم‌حلقه است.

مثال ۴.۱. نیم‌حلقه $C^+(X)$ یک $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$– نیم‌حلقه است. برای اثبات این موضوع، فرض کنیم $g \in \mathrm{I}^{\times}(C^+(X))$. مجموعه‌ی صفر $Z(g) = \{x \in X : g(x) = 0\}$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که اگر $x \in Z(g)$ آنگاه $g(x) = 0$ و اگر $x \notin Z(g)$ آنگاه $g(x) = 1$. همچنین، $Z(g)$ یک مجموعه هم باز و هم بسته است. اکنون تابع $h : X \to \mathbb{R}^+$ را چنان تعریف می‌کنیم که در نقاط متعلق به $Z(g)$ برابر ۱ بوده و در بقیه نقاط ۰ باشد. به‌وضوح $h \in C^+(X)$. از آنجا که $g + h = 1$ و $gh = 0$، پس g یک عضو متمم‌پذیر از $C^+(X)$ است. این بدین معنا است که $C^+(X)$ یک $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$– نیم‌حلقه است.

در سال ۱۹۹۴، در دانشگاه ایالتی مسکو به سرپرستی پروفسور ای. ام. وجتوموف، مدرسه‌ای پژوهشی تحت عنوان "جبر تابعی و نظریه‌ی نیم‌حلقه‌ها" شروع به‌کار کرد. از آن زمان تحقیقات ارزنده‌ای روی نیم‌حلقه‌ی $C^+(X)$ به انجام رسیده است، که پیش‌تر یک نمونه از آن را اشاره کردیم. هدف این مقاله، تکمیل یک نتیجه دیگر از دستاوردهای این گروه در این راستا است. ما در این یادداشت قصد داریم مشخص کنیم که چه زمانی نیم‌حلقه‌ی $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه‌ی پیوسته است.

[†] Plane

[‡] Yoked

[§] Simple

۲ چه وقت $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه پیوسته است؟

این بخش را با یک لم درباره فضای توپولوژیکی ایدآل‌های اول یک نیم‌حلقه فاقد پوچ‌توان آغاز می‌کنیم. نیم‌حلقه‌ی R را فاقد پوچ‌توان (کاهیده) گوییم هرگاه شامل هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نباشد. قبل از بیان لم، ابتدا فضای توپولوژیکی ایدآل‌های اول یک نیم‌حلقه را یادآوری می‌کنیم. مجموعه $\mathrm{Spec}(R)$ که شامل تمام ایدآل‌های اول نیم‌حلقه‌ی R است، با توپولوژی استون-زاریسکی یک فضای توپولوژی است. مجموعه‌های باز در $\mathrm{Spec}(R)$ به صورت

$$D(J) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : J \nsubseteq P\}$$

بوده به‌طوری‌که J یک ایدآل دلخواه R است. در این صورت داریم:

۱. $D(I) \cap D(J) = D(IJ)$.

۲. $\bigcup_i D(J_i) = D(\sum_i J_i)$.

۳. $D(\circ) = \emptyset$.

۴. $D(R) = \mathrm{Spec}(R)$.

اکنون هرگاه برای هر $a \in R$ مجموعه $D(a) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) | a \notin P\}$ را تعریف کنیم آنگاه مجموعه‌های به شکل $D(a)$ به‌طوری‌که $a \in R$ باشد، می‌تواند تشکیل یک پایه برای این فضای توپولوژی بدهد. در این فضا مجموعه‌های بسته را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$V(J) = \mathrm{Spec}(R) \setminus D(J) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) | J \subseteq P\}.$$

لم ۱.۲. فرض کنیم I و J دو ایدآل از نیم‌حلقه‌ی فاقد پوچ‌توان R باشد. در این صورت $V(J) = \overline{D(I)}$ اگر و تنها اگر $\sqrt{J} = \mathrm{Ann}(I)$.

اثبات. در ابتدا ادعا می‌کنیم $V(\bigcap_{p\in D(I)} P) = \overline{D(I)}$. بدیهی است که $D(I) \subseteq V(\bigcap_{P\in D(I)} P)$. حال فرض کنیم برای یک ایدآل دلخواه K داریم $\overline{D(I)} = V(K) \subseteq V(\bigcap_{P\in D(I)} P)$. در این صورت برای هر ایدآل اول P که در $D(I)$ قرار دارد، $K \subseteq P$ و در نتیجه $K \subseteq \bigcap_{P\in D(I)} P$. بنابراین $V(\bigcap_{P\in D(I)} P) \subseteq V(K)$ و بدین ترتیب ادعای ما ثابت شد.
فرض کنیم $V(J) = \overline{D(I)}$. نشان می‌دهیم $\sqrt{J} \subseteq \mathrm{Ann}(I) \subseteq \bigcap_{p\in D(I)} P \subseteq \sqrt{J}$. توجه کنیم که هرگاه برای هر $P \in \mathrm{Spec}(R)$ داشته باشیم $I \nsubseteq P$، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $J \subseteq P$. بنابراین برای هر $P \in \mathrm{Spec}(R)$ داریم $IJ \subseteq P$. لازم به ذکر است که $\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{P\in \mathrm{Min}(R)} P$ (برای اطلاعات بیش‌تر می‌توان به [۶] مراجعه کرد). از آنجا که R فاقد پوچ‌توان است پس $IJ = \circ$. در نتیجه $J \subseteq \mathrm{Ann}(I)$ و چون $\mathrm{Ann}(I)$ یک ایدآل رادیکال است، داریم$\sqrt{J} \subseteq \mathrm{Ann}(I)$.
اکنون فرض کنیم $x \in \mathrm{Ann}(I)$. در این صورت برای هر ایدآل اول دلخواه P که در $D(I)$ باشد، $xI = \circ \subseteq P$. از آنجا که $I \nsubseteq P$، پس می‌توان برای هر $P \in D(I)$، عنصر x را متعلق به P در نظر بگیریم. بنابراین $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \bigcap_{p\in D(I)} P$. از آنجا که $V(J) = V(\bigcap_{P\in D(I)} P)$، داریم $\sqrt{J} = \bigcap_{P\in V(J)} P = \bigcap_{p\in V(\bigcap_{p\in D(I)} P)} P = \bigcap_{p\in D(I)} P$ و در نتیجه $\sqrt{J} = \mathrm{Ann}(I)$.
به‌عکس، فرض کنیم $\sqrt{J} = \mathrm{Ann}(I)$. در این صورت برای یک ایدآل L داریم $\sqrt{L} = \overline{D(I)}$. اینک مشابه مسیر اثبات در بند قبل نتیجه می‌گیریم $\sqrt{L} = \mathrm{Ann}(I)$ و لذا طبق فرض خواهیم داشت $\sqrt{J} = \sqrt{L}$. بنابراین $V(J) = V(L) = \overline{D(I)}$ و اثبات تمام است. □

نتیجه ۲.۲. فرض کنیم R یک نیم‌حلقه فاقد پوچ‌توان باشد. در این صورت برای هر ایدآل دلخواه I از R همواره $\overline{D(I)} = V(\mathrm{Ann}(I))$.

اثبات. با توجه به لم ۱.۲ بدیهی است. □

قضیه ۳.۲. هرگاه Y یک نیم‌حلقه‌ی فاقد پوچ‌توان باشد، آن‌گاه زیرمجموعه Y از فضای $\mathrm{Spec}(R)$ هم باز و هم بسته است اگر و تنها اگر برای یک عضو متمم‌پذیر $e \in R$ داشته باشیم $Y = D(e)$.

اثبات. فرض کنیم Y یک مجموعه‌ی هم باز و هم بسته در $\mathrm{Spec}(R)$ باشد. این بدین معنا است که ایدآل‌های I و J وجود دارند به‌طوری‌که $Y = D(I)$ و $\mathrm{Spec}(R) \setminus Y = D(J)$. در نتیجه، داریم $I + J = R$ و $IJ = ۰$. پس برای $e \in I$ و $f \in J$ داریم $e + f = ۱$ و $ef = fe = ۱$. در نتیجه e و f خودتوان ضربی و متمم‌پذیر است، لذا $D(e) = D(I)$ و کار تمام است.
به‌عکس، هرگاه $e \in R$ یک عضو متمم‌پذیر باشد، آنگاه

$$D(e) \cup D(e^\perp) = D(e + e^\perp) = D(R) = \mathrm{Spec}(R),$$

و

$$D(e) \cap D(e^\perp) = D(ee^\perp) = D(\circ) = \emptyset.$$

و این نشان می‌دهد که $D(e)$ یک مجموعه هم باز و هم بسته در فضای $\mathrm{Spec}(R)$ است. □

حال شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن فضای ایدآل‌های اول یک C $\mathrm{I}^\times$–نیم‌حلقه فاقد پوچتوان، شدیدا ناهمبند شود. ابتدا چند مفهوم را برای راحتی خواننده یادآوری می‌کنیم. فضای توپولوژی X را شدیدا ناهمبند گوییم هرگاه بستار هر مجموعه باز در X هم باز و هم بسته باشد (برای آشنایی بیش‌تر می‌توان به منبع [۳] مراجعه کرد). نیم‌حلقه‌ی R را فون‌نیومن منظم (منظم ضربی [۴]) می‌نامیم اگر برای هر عنصر $a \in R$ عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $aba = a$. یک مثال از نیم‌حلقه‌های فون‌نیومن منظم، نیم‌حلقه‌های خودتوان ضربی است ($\mathrm{I}^\times(R) = R$). برای بررسی شرایطی که تحت آن‌ها یک نیم‌حلقه، فون‌نیومن منظم می‌شود می‌توان به منبع [۸] مراجعه کرد. نیم‌حلقه‌ی R را بئر گوییم هرگاه پوچساز هر زیرمجموعه از R توسط یک خودتوان ضربی تولید شود. همچنین، فرض کنیم I و J دو ایدآل از نیم‌حلقه R باشند، I را در J ایدآل اساسی گوییم هرگاه $I \subseteq J$ و هر ایدآل غیر صفر R که زیرمجموعه J نیز است با I اشتراک نابدیهی داشته باشد و در این صورت می‌نویسیم $I \leq_{es} J$. توجه می‌کنیم که I را یک ایدآل اساسی نامیم هرگاه I در R یک ایدآل اساسی باشد.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم R یک C $\mathrm{I}^\times$–نیم‌حلقه فاقد پوچتوان باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. هر ایدآل غیرصفر I در R در یک ایدآل اصلی تولیدشده توسط یک عضو خودتوان ضربی، اساسی است.

۲. فضای $\mathrm{Spec}(R)$ شدیدا ناهمبند است.

۳. R یک نیم‌حلقه بئر است.

اثبات. $(۲) \Leftarrow (۱)$ فرض کنیم I یک ایدآل R باشد به‌طوری‌که در ایدآل اصلی eR، برای عضو خودتوان ضربی $e \in R$، اساسی می‌شود. هرگاه نشان دهیم $\overline{D(I)}$ باز است اثبات تمام است. برای این منظور ابتدا تساوی $\sqrt{e^\perp R} = e^\perp R = \mathrm{Ann}(e) = \mathrm{Ann}(I)$ را ثابت می کنیم. اولا با توجه به این‌که R یک نیم‌حلقه تعویض‌پذیر است، بدیهی است که $e^\perp R \subseteq \mathrm{Ann}(e)$. فرض کنیم $x \in \mathrm{Ann}(e)$. با توجه به این که e متمم‌پذیر است، $e^\perp \in R$ موجود است به‌طوری‌که $e + e^\perp = ۱$ و در نتیجه $x = ex + e^\perp x = e^\perp x$. بنابراین $x = e^\perp x \in e^\perp R$ و داریم $\mathrm{Ann}(e) = e^\perp R$. ثابت می‌کنیم $\sqrt{e^\perp R} \subseteq \mathrm{Ann}(e)$. گیریم $y \in \sqrt{e^\perp R}$، در این صورت برای یک عدد طبیعی n داریم $y^n \in e^\perp R$، پس $y^n e = \circ$ و لذا $(ye)^n = \circ$. اما چون R فاقد پوچتوان ناصفر است پس $ye = \circ$ و $\sqrt{e^\perp R} \subseteq \mathrm{Ann}(e)$. بنابراین $\mathrm{Ann}(e) = \sqrt{e^\perp R} = e^\perp R$. به‌وضوح $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \mathrm{Ann}(e)$. اکنون فرض کنیم $x \in \mathrm{Ann}(I)$. بدیهی است که $xe(I \oplus e^\perp R) = \circ$، پس داریم $xe = \circ$. در نتیجه $x \in e^\perp R$. این بدین معنی است که $\mathrm{Ann}(e) = \mathrm{Ann}(I)$ و بدین صورت اثبات تساوی مورد نظر کامل می‌شود.
حال به‌راحتی می‌توان اثبات کرد که $V(e^\perp R) = D(e)$. اکنون طبق نتیجه ۲.۲ و قضیه ۳.۲ مجموعه‌ی هم باز و هم بسته $V(e^\perp R)$ بستار $D(I)$ خواهد بود، یعنی $V(e^\perp R) = \overline{D(I)}$ و در نتیجه $\mathrm{Spec}(R)$ شدیدا ناهمبند است.
$(۱) \Leftarrow (۲)$ یک ایدآل دلخواه I از R را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $V(e^\perp R) = \overline{D(I)}$ به‌طوری‌که e یک عضو خودتوان ضربی از R باشد. طبق نتیجه ۲.۲، $\sqrt{e^\perp R} = \mathrm{Ann}(I)$ و چون $e^\perp I = \circ$، پس $I \subseteq eR$. ادعا می‌کنیم برای هر $\circ \neq x \in eR$ داریم $xI \neq \circ$. طبق برهان خلف، فرض کنیم $x \in eR$ وجود دارد به‌طوری‌که $xI = \circ$. پس $x \in \sqrt{e^\perp R}$ و در نتیجه عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $x^n \in e^\perp R$ و چون $x \in eR$، پس $x^n = \circ$ و این یک تناقض است. بنابراین $\circ \neq xI \subseteq xR \cap I$ برای هر $\circ \neq x \in eR$ برقرار است و I یک ایدآل اساسی در eR است.
$(۳) \Leftarrow (۱)$ فرض کنیم $X \subseteq R$ و $\circ \neq X$ و $I = XR$. طبق فرض، عنصر خودتوان ضربی $e \in R$ وجود دارد که $I \leq_{es} eR$، ادعا می‌کنیم $\mathrm{Ann}(eR) = \mathrm{Ann}(I)$. با اثبات مشابه قسمت بالا بدیهی است که $e^\perp R = \mathrm{Ann}(e) = \mathrm{Ann}(I)$ و این یعنی R یک نیم‌حلقه بئر است.
$(۱) \Leftarrow (۳)$ فرض کنیم I یک ایدآل R باشد. در این صورت برای یک عضو خودتوان ضربی $e \in R$ داریم $\mathrm{Ann}(I) = eR$. ادعا می‌کنیم $I \leq_{es} e^\perp R$. هرگاه I در $e^\perp R$ یک ایدآل اساسی نباشد در این صورت $\circ \neq J \leq e^\perp R$ وجود دارد که $I \cap J = \circ$ و

این نتیجه می‌دهد $IJ = \circ$ و $J \subseteq \mathrm{Ann}(I) = eR$ که این متناقض با فرض است.

□

در زیر شرایطی را بیان می‌کنیم که در آن‌ها فضای ایدآل‌های اول یک $I^{\times}C$– نیم‌حلقه هاسدروف است. برای دیدن بحث‌هایی درباره اصول جداسازی فضای ایدآل‌های اول یک نیم‌حلقه خواننده علاقه‌مند را به مطالعه منبع [۱] دعوت می‌کنیم. قضیه‌ی زیر نسخه‌ای از یک حقیقت در نظریه حلقه‌ها است، برای مثال می‌توان به [۵، یادداشت ص ۵] مراجعه کرد.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم R یک $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$– نیم‌حلقه فاقد پوچ‌توان باشد. شرایط زیر با هم معادل‌اند:

۱. R یک نیم‌حلقه فون‌نیومن منظم است.

۲. هر ایدآل متناهیا تولید شده از R اصلی بوده و توسط یک خودتوان ضربی تولید می‌شود.

۳. هر ایدآل اول R ماکسیمال است.

۴. $\mathrm{Spec}(R)$ یک فضای هاسدورف است.

اثبات. $(۲) \Rightarrow (۱)$ کافی است ثابت کنیم که هرگاه $I = (a,b)$ یک ایدآل دلخواه از R باشد به‌طوری‌که $a,b \in R$، آنگاه I یک ایدآل اصلی بوده و توسط یک خودتوان ضربی تولید می‌شود. از آنجا که R یک نیم‌حلقه فون‌نیومن منظم است بنابراین $x,y \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $a = axa$ و $b = byb$. بدیهی است که $ax, by \in I^{\times}(R)$. فرض کنیم $e = ax$ و $f = by$. قرار می‌دهیم $d = e + fe^{\perp}$. بدیهی است که $d \in I^{\times}(R)$. توجه می‌کنیم که $aed = ae = a$ و $bfd = bf = b$. بنابراین $(a,b) \subseteq (d)$. از طرف دیگر $d = ax + bye^{\perp}$ که نتیجه می‌دهد $(d) \subseteq (a,b)$، پس با قرار دادن $I = (d)$، اثبات تمام است.
$(۳) \Rightarrow (۲)$ فرض کنیم $P_۱ \subset P_۲$ ایدآل‌هایی اول از R باشند. عنصر خودتوان ضربی $e \in P_۲ \setminus P_۱$ را انتخاب می‌کنیم. از آنجا که $(e)(e^{\perp}) = \circ$، پس $(e^{\perp})P_۱ \subset P_۲$ و این تناقض است؛ زیرا در این صورت خواهیم داشت $۱ = e + e^{\perp} \in P_۲$.
$(۱) \Rightarrow (۳)$ فرض کنیم $a \in R$ و $a \notin U(R)$. با توجه به [۸، قضیه ۱ $((۴) \Leftrightarrow (۱۱))$]، عنصر $r \in R$ وجود دارد که $ra = \circ$ و $r + a$ وارون‌پذیراست. فرض کنیم $r + a = u$ که u وارون‌پذیر است. با ضرب a در طرفین داریم $ra + a^۲ = ua$. در نتیجه $a = a^۲u^{-۱}$ و کار تمام است. بنابراین R فون‌نیومن منظم است.

$(۴) \Leftrightarrow (۳)$ با توجه به [۱، گزاره ۳.۴] بدیهی است. □

با کمک قضیه ۵.۲ و [۶، گزاره ۳.۲] ، نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم R یک $\mathrm{I}^{\times}\,\mathrm{C}$–نیم‌حلقه فاقد پوچ‌توان باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. R یک نیم‌حلقه‌ی بئر و فون‌نیومن منظم است.

۲. $\mathrm{Spec}(R)$ شدیدا ناهمبند و هاسدورف است.

حال توجه خود را به حلقه توابع پیوسته حقیقی نامنفی مقدار جلب می‌کنیم. ابتدا لم زیررا بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که این لم، بیان دیگری از یک حقیقت در حلقه‌ی توابع پیوسته است (می‌توان به نتیجه ۱ و قضیه ۳ در [۷] مراجعه کرد).

لم ۷.۲. فضای توپولوژی X شدیدا ناهمبند است اگر و تنها اگر $\mathrm{Spec}(C^{+}(X))$ شدیدا ناهمبند باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم X شدیدا ناهمبند بوده و I ایدآلی از $C^{+}(X)$ باشد. برای هر $f \in I$ قرار می‌دهیم:

$$U_f = \{x \in X : f(x) \neq \circ\}.$$

فرض کنیم $U = \bigcup_{f \in I} U_f$. بدیهی است که U یک مجموعه باز از X است. با توجه به این‌که برای هر $x \in U$، تابع $f \in I$ موجود است که $f(x) \neq \circ$، لذا برای هر $g \in Ann(I)$ داریم $g(x) = \circ$. بنابراین

$$Ann(I) = \{g \in C^{+}(X) : g(\overline{U}) = \circ\}.$$

حال تابع $\chi_{\overline{U}} : X \to \mathbb{R}^{+}$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\chi_{\overline{U}} = \begin{cases} ۱ & x \in \overline{U} \\ ۰ & x \notin \overline{U} \end{cases}$$

چون X شدیدا ناهمبند است، لذا $\overline{U}$ یک مجموعه باز بوده و بنابراین $\chi_{\overline{U}}$ پیوسته است. پس $\chi_{\overline{U}}$ یک تابع خودتوان ضربی است و به‌راحتی می‌توان نشان داد که $I = <\chi_{\overline{U}}>$ (لازم به ذکر است که $\chi_{\overline{U}}$ یک تابع پیوسته حقیقی نامنفی مقدار است). حال با توجه به‌این‌که $\chi_{\overline{U}}$ خودتوان ضربی است، پس با کمک قضیه ۴.۲ می‌توان نتیجه گرفت که $\mathrm{Spec}(C^+(X))$ شدیدا ناهمبند است. به‌عکس، فرض کنیم $\mathrm{Spec}(C^+(X))$ یک فضای توپولوژی شدیدا ناهمبند باشد. در نتیجه فضای ایدآل‌های ماکسیمال $C^+(X)$ یا همان $\mathrm{Max}(C^+(X))$ شدیدا ناهمبند است. از طرفی با توجه به [۹، گزاره ۲.۳] می‌دانیم که $\mathrm{Max}(C^+(X)) \cong \beta X$. پس فضای توپولوژی βX شدیدا ناهمبند بوده و از آن می‌توان نتیجه گرفت که X نیز شدیدا ناهمبند است (برای آشنایی بیش‌تر با فضای توپولوژی βX می‌توان به [۳] مراجعه کرد).

$\square$

با بیان نتیجه زیر مقاله را به پایان می‌رسانیم. قبل از آن، اجازه دهید یادآوری کنیم که فضای توپولوژی تیخونف X را یک P–فضا نامیم هرگاه هر ایدآل اول $C^+(X)$ یک ایدآل ماکسیمال باشد. از منظر توپولوژی این تعریف معادل این است که برای هر $f \in C^+(X)$، مجموعه صفر آن یعنی $Z(f)$یک مجموعه باز باشد. همچنین نیم‌حلقه تعویض‌پذیر R را پیوسته می‌گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند: (۱) هر ایدآل غیر صفر I در یک جمعوند R، اساسی باشد (۲) هر ایدآل از R را که با یک جمعوند آن یکریخت است، به‌توان به‌عنوان یک جمعوند R نیز در نظر گرفت. (لازم به ذکر است که نتیجه‌ی زیر بیان دیگری از [۲، قضیه ۴.۲]، در حلقه ی توابع پیوسته است).

نتیجه ۸.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه‌ی پیوسته است.

۲. $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه‌ی بئر و فون‌نیومن منظم است.

۳. X یک P–فضای شدیدا ناهمبند است.

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱) طبق قضیه ۴.۲، $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه بئر است. ادعا می‌کنیم $C^+(X)$ فون‌نیومن منظم است. برای این منظور با توجه به [۸، قضیه ۱] ، کافی است نشان دهیم هر ایدآل اصلی آن یک جمعوند است. فرض کنیم $f \in C^+(X)$. با توجه به ویژگی بئر بودن، خودتوان ضربی مانند e وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{Ann}(f) = eC^+(X)$. بنابراین داریم $\mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ann}(e^\perp)$. در نتیجه $fC^+(X) \cong e^\perp C^+(X)$ و این بدین معنی است که $<f>$ یک جمعوند از $C^+(X)$ است.
(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم I ایدآلی از $C^+(X)$ باشد. با توجه به فرض بئر بودن، می‌توان نتیجه گرفت که خودتوان ضربی مانند e وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(e)$. با توجه به‌این‌که نیم‌حلقه $C^+(X)$ فاقد پوچ‌توان است، پس I در (e) اساسی است. حال فرض کنیم I و J دو ایدآل از $C^+(X)$ باشند که $J \cong I$ و J یک جمعوند باشد. بدیهی است که خودتوان ضربی مانند e' وجود دارد به‌طوری‌که $J = (e')$. در نتیجه $I \cong (e')$. حال یکریختی $\varphi : I \to (e')$ را در نظر می‌گیریم. اکنون $x \in I$ را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\varphi(x) = e'$. با توجه به ویژگی فون‌نیومن منظم بودن، می‌توان نتیجه گرفت که خودتوان ضربی مانند $y \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = yx$. بنابراین $ye' = e' \in I$ و کار تمام است.
(۳) $\Leftrightarrow$ (۲) با کمک نتیجه ۶.۲ و لم ۷.۲ بدیهی است.

$\square$

حال طبق تمرین 12H از [۳] و با استفاده از نتیجه ۸.۲ می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی با عدد اصلی اندازه‌ناپذیر باشد. آن‌گاه $C^+(X)$ یک نیم‌حلقه پیوسته است اگر و تنها اگر X یک فضای گسسته باشد.

سپاس‌گزاری. نویسندگان از داوران محترم این مقاله، به خاطر پیشنهادات ارزشمندشان که در غنی‌تر شدن محتوای این مقاله نقشی شایسته داشته است، تشکر و قدردانی می‌نمایند. همچنین نویسنده سوم از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه(SCU.MM۱۴۰۰٫۳۹۳) در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نماید.

فهرست منابع

[1] A. Peña, L. M. Ruza and J. Vielma, Separation axioms and the prime spectrum of commutative semirings, Revista Notas de Matemática **5**(2) (2009) 82-66.

[2] F. Azarpanah, and O. A. S. Karamzadeh, Algebraic characterizations of some disconnected spaces, Ital. J. Pure Appl. Math. **12** (2002) 168-155.

[3] L. Gillman and M. Jerison, Rings of Continuous Functions, The University Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

[4] J. S. Golan, Semirings and Their Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[5] J. A. Huckaba, COMMUTATIVE RINGS WITH ZERO DIVISORS, MONOGRAPHS AND TEXTBOOKS IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS, 117. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[6] P. Nasehpour, Pseudocomplementation and minimal prime ideals in semirings, Algebra Univers. **79** (2018) 5-1.

[7] S. B. Niefield and K.I. Rosenthal, A note on the algebraic De Morgan's law, Cahiers Topologie Geom. Differentielle Categ. **26** (1985) 120-115.

[8] H. Subramanian, Von Neumann regularity in semirings, Math. Nachr. **45** (1970) 79-73.

[9] E. M. Vechtomov, A. V. Mikhalev and V. V. Sidorov, Semirings of continuous functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **237** (2019) 244-191.

When is $C^+(X)$ a continuous semiring?

F. Deldar[1], **Sh. Ghalandarzadeh**[1, ¶], **M. Namdari**[2]

(1) Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
(2) Faculty of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

Communicated by: Fariborz Azarpanah

Received: 2021/8/8 Accepted: 2022/1/26

Abstract: A commutative semiring R is called *continuous* if it satisfies the following conditions: (1) Every nonzero ideal is essential in a direct summand of R. (2) Every ideal that is isomorphic to a direct summand of R is itself is direct summand. In this paper, after proving some results in commutative semirings, we focus on the semiring $C^+(X)$ of all continuous nonnegative real-valued functions on a space X with the positive operations, and then we characterize the space X, such that $C^+(X)$ is a continuous semiring.

Keywords: Baer semiring, complemented element, idempotent, semiring of continuous functions, von Neumann regular.

Mathematics Subject Classification (2010): 16Y60, 13A15.

¶ **Corresponding author:** ghalandarzadeh@kntu.ac.ir