مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۱۷۵-۱۸۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2022.38944.1973

زیرحلقه‌های ماکسیمال در دامنه‌های پروفر

البرز آذرنگ و محمدرضا علینقی‌زاده ×

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: امیدعلی شهنی کرم‌زاده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۱۱

چکیده: در این مقاله شرایطی را بررسی می‌کنیم که یک دامنه‌ی پروفر تحت آن، دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال باشد. هم‌چنین می‌خواهیم به بررسی انتقال ویژگی پروفر، بزوت و ... از یک دامنه به زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن و برعکس بپردازیم.

واژه‌های کلیدی: دامنه‌ی پروفر، دامنه‌ی بزوت، زیرحلقه‌ی ماکسیمال.

رده‌بندی ریاضی: 13B02, 13B21, 13B30,13A05,13A15,13A18

۱ مقدمه

زیرحلقه‌ی یکانی R از حلقه‌ی T را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه R با رابطه‌ی شمول در بین زیرحلقه‌های سره‌ی T ماکسیمال باشد. در این صورت T را توسیع حلقه‌ای مینیمال R نیز می‌نامند (به [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] نگاه شود). با استفاده از لم زورن، نمی‌توانیم وجود زیرحلقه‌ی ماکسیمال در یک حلقه‌ی دلخواه، برخلاف وجود ایدآل ماکسیمال در یک حلقه‌ی یکدار، را نتیجه بگیریم. در حقیقت، حلقه‌هایی وجود دارند که دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال نیستند. به‌عنوان مثال، بستار جبری هر میدان متناهی فاقد زیرحلقه‌ی ماکسیمال است، به تذکر ۱۳.۱ از مرجع [۵] را نگاه شود. برای دیدن مثال‌های کلی‌تر از حلقه‌هایی که فاقد زیرحلقه‌های ماکسیمال‌اند، می‌توان به مثال ۱۹.۳ از مرجع [۷] مراجعه کرد. در مراجع [۱]-[۹] نویسندگان، به بررسی وجود زیرحلقه‌های ماکسیمال در حلقه‌های تعویض‌پذیر پرداختند و به‌ویژه میدان‌ها و هم‌چنین حلقه‌های آرتینی را که دارای/فاقد زیرحلقه‌ی ماکسیمال‌اند، رده‌بندی کردند. هم‌چنین آن‌ها در [۹] به بررسی برخی شرایط جبری که بین حلقه و زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن منتقل می‌شود پرداختند. در این مقاله می‌خواهیم به بررسی وجود زیرحلقه‌ی ماکسیمال در دامنه‌های پروفر بپردازیم و هم‌چنین به انتقال ویژگی پروفر، بزوت و ... بین یک دامنه‌ی صحیح و زیرحلقه‌های ماکسیمال آن خواهیم پرداخت.

حال به بیان نمادگذاری‌های این مقاله خواهیم پرداخت. در این مقاله همه‌ی حلقه‌ها تعویض‌پذیر یکدارند و $۱ \neq ۰$. اگر R زیرحلقه‌ی T باشد، آن‌گاه $۱_R = ۱_T$ و می‌نویسیم $R \leq T$. هم‌چنین می‌نویسیم $R \lneq T$، هرگاه R زیرحلقه‌ی سره‌ی T باشد.

× نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: mohamad-alinaghi@stu.scu.ac.ir (M. Alinaghizadeh)، a_azarang@scu.ac.ir (A. Azarang)

مشخصه‌ی حلقه‌ی R را با $Char(R)$ نمایش می‌دهیم. اگر R دامنه‌ی صحیح باشد، آن‌گاه میدان کسرهای R را با $Q(R)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی ایدآل‌های اول حلقه‌ی R را با $Spec(R)$ و مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را با $Max(R)$ نمایش می‌دهیم. اگر R زیرحلقه‌ی T باشد و $P \in Spec(R)$، آن‌گاه یادآوری می‌کنیم که

$$R_P = \{\frac{r}{s} \mid \ r \in R, s \in R \setminus P\}$$
$$T_P = \{\frac{t}{s} \mid \ t \in T, s \in R \setminus P\}.$$

مجموعه‌ی تمام عضوهای وارون‌پذیرحلقه‌ی R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم. دامنه‌ی صحیح R را موضعی گوییم، هرگاه فقط یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد. دامنه‌ی صحیح R را نیم‌موضعی گوییم، هرگاه تعداد ایدآل‌های ماکسیمال آن متناهی باشد. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد، در این صورت T را زبرحلقه‌ی R [†] گوییم، هرگاه $R \leq T \leq Q(R)$. بعد کرول حلقه R را با $\dim(R)$ نمایش می‌دهیم. اگر R یک مجموعه باشد، آن‌گاه عدد اصلی R را با $|R|$ نمایش می‌دهیم. هرگاه R یک حلقه و $a_۱, a_۲, ..., a_n$ اعضایی از آن باشند، در این صورت $(a_۱, a_۲, ..., a_n)$ نشان‌دهنده‌ی ایدآل تولیدشده توسط $a_۱, a_۲, ..., a_n$ است. دو عضو a و b از حلقه‌ی R را شریک (یا وابسته) می‌نامیم، هرگاه $(a) = (b)$. نماد یکریختی حلقه‌ای را با $\simeq$ نمایش می‌دهیم. $\mathbb{Z}$ نشان‌دهنده‌ی اعداد صحیح و $\mathbb{Z}_p$ میدان p عضوی برای عدد اول p است. اگر R یک دامنه‌ی صحیح باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $Z = \{n۱_R \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ زیرحلقه‌ی اول R نامیده می‌شود. اگر $Char(R) = ۰$، آن‌گاه $Z \simeq \mathbb{Z}$ و اگر $Char(R) = p$، آن‌گاه $Z \simeq \mathbb{Z}_p$. هرگاه $R \leq T$ و $\alpha \in T$، آن‌گاه زیرحلقه‌ی تولیدشده توسط R و α برابر است با کوچک‌ترین زیرحلقه‌ی T که شامل R و α است، که آن را با $R[\alpha]$ نشان می‌دهیم و در واقع $R[\alpha] = \{f(\alpha)|f(x) \in R[x]\}$. توجه کنیم که $R \leq R[\alpha] \leq T$. مجموعه‌ی تمام عناصر تحویل‌ناپذیر، در حد شراکت، دامنه‌ی صحیح R را با $Irr(R)$ نمایش می‌دهیم. دامنه‌ی صحیح V با میدان کسرهای K را یک دامنه‌ی ارزیاب می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in K$ داشته باشیم $x \in V$ یا $x^{-۱} \in V$. یک دامنه‌ی صحیح را پروفر می‌نامیم، هرگاه هر ایدآل متناهی‌مولد آن معکوس‌پذیر باشد. یک دامنه‌ی پروفر نوتری را دامنه‌ی ددکیند می‌نامیم. یک دامنه‌ی صحیح را دامنه‌ی بزوت می‌نامیم، هرگاه هر ایدآل متناهی‌مولد آن اصلی باشد. برای دیدن ارتباط این دامنه‌ها با هم و ویژگی‌های آن‌ها به [۱۷] مراجعه شود.

حال به بیان خلاصه‌ای از نتایج این مقاله می‌پردازیم. در بخش ۲ به بررسی وجود زیرحلقه‌ی ماکسیمال در دامنه‌های پروفر می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که اگر R دامنه‌ی پروفر باشد و ایدآل‌های اول مقایسه‌ناپذیر P و Q از R موجود باشند به‌طوری که $R/P \simeq R/Q$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. نشان می‌دهیم که اگر I مجموعه‌ی تمام عناصر اول، در حد شراکت، از دامنه‌ی پروفر R باشد و $|I| > ۲^{\aleph_۰}$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. همچنین اگر p یک عنصر اول از دامنه‌ی پروفر R باشد به‌طوری که $|R/(p)| \geq ۲^{\aleph_۰}$ یا $Char(R/(p)) = ۰$، آن‌گاه ثابت می‌کنیم که R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. در بخش ۳ به بررسی انتقال ویژگی پروفر، بزوت و ... بین یک دامنه‌ی صحیح و زیرحلقه‌های ماکسیمال آن می‌پردازیم و نشان می‌دهیم برای هر دامنه‌ی صحیح T که میدان نباشد، اگر T دارای یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال پروفر (بزوت) باشد، آن‌گاه T نیز پروفر (بزوت) است. همچنین اگر T دامنه‌ی پروفر و R زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن باشد به‌طوری که R در T بسته‌ی صحیح باشد و به‌ازای هر ایدآل اول P از R، T_P دامنه‌ی موضعی باشد، آن‌گاه R دامنه‌ی پروفر است. درحالت خاص اگر T دامنه‌ی ارزیاب و R زیرحلقه‌ی ماکسیمال بسته‌ی صحیح از آن باشد، آن‌گاه نشان می‌دهیم R دامنه‌ی پروفر است. همچنین نشان می‌دهیم برای هر دامنه‌ی صحیح T که میدان نباشد، اگر R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال پروفر از T باشد، آن‌گاه زیرمجموعه‌ی I از $Spec(R)$ موجود است به‌طوری که $T = \bigcap_{P \in I} R_P$.

۲ دامنه‌ی پروفر و زیرحلقه‌ی ماکسیمال

این بخش را با تعریف زیر، شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. اگر T یک حلقه باشد، آن‌گاه R را زیرحلقه‌ی ماکسیمال T گوییم، هرگاه $R \lneq T$ و اگر S زیرحلقه‌ای از T شامل R باشد، آن‌گاه $S = T$ یا $S = R$.

در گزاره ۸.۲ از [۷] نشان داده شده است که اگر D یک دامنه‌ی صحیح باشد به‌طوری که $|D| > ۲^{۲^{\aleph_۰}}$، آن‌گاه D دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. همچنین در قضیه ۱.۳ از [۲] ثابت شده است که هر دامنه‌ی تجزیه‌ی یکتای ناشمارا نیز دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. در نتیجه ۴.۲ از [۳] نشان داده شده است که هر حلقه‌ی نوتری ناشمارا دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. در نهایت، در قضیه ۲۴.۲ از [۴] ثابت شده است که اگر D یک دامنه‌ی صحیح باشد به‌طوری که $\dim(D) = ۱$ و $|D| = ۲^{۲^{\aleph_۰}}$، آن‌گاه D دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. در این بخش به بررسی وجود زیرحلقه‌های ماکسیمال در دامنه‌های پروفر خواهیم پرداخت.

[†] overring

قضیه **۲.۲.** فرض کنیم D یک دامنه‌ی صحیح باشد که $\dim(D) = ۱$. در این صورت اگر D دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال نباشد، آن‌گاه ایدآل‌های ماکسیمال $M_۱$، $M_۲$، ... از D وجود دارند به‌طوری که $\bigcap_{i=۱}^{\infty} M_i = ۰$.

اثبات. ابتدا ادعا می‌کنیم یک دامنه‌ی ایدآل اصلی مانند R، مشمول در D وجود دارد به‌طوری که $|Irr(R)| = \aleph_۰$. اگر $Char(D) = ۰$، آن‌گاه در این حالت کافی است حلقه‌ی R را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیریم. حال فرض کنیم $Char(D) = p$، در این صورت $\mathbb{Z}_p$ زیرحلقه‌ی D است. چون D میدان نیست، میدان بودن $\mathbb{Z}_p$ ایجاب می‌کند که D روی $\mathbb{Z}_p$ جبری نیست. بنابراین D شامل عضوی مانند x است که x روی $\mathbb{Z}_p$ جبری نیست. در نتیجه $\mathbb{Z}_p[x]$ یک دامنه‌ی ایدآل اصلی است که $\mathbb{Z}_p[x] \subseteq D$ و $|Irr(\mathbb{Z}_p[x])| = \aleph_۰$. حال قرار می‌دهیم $R = \mathbb{Z}_p[x]$ و اثبات ادعا در این حالت نیز تمام است. حال فرض کنیم R همان دامنه‌ی ایدآل اصلی مورد نظر باشد که در ابتدای اثبات ادعا کرده بودیم و $Irr(R) = \{q_۱, q_۲, \ldots\}$. اگر عضوی از $Irr(R)$ در D وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۲.۲ از [۲]، D دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است که متناقض با فرض است. بنابراین به‌ازای هر i، ایدآل ماکسیمال M_i از D موجود است به‌طوری که $q_i \in M_i$. $(M_i \cap R)$ ها ایدآل‌های اول متمایز در R اند؛ زیرا اگر $i \neq j$ و $M_i \cap R = M_j \cap R$، آن‌گاه چون q_i و q_j عضوهای تحویل‌ناپذیر غیرشریک‌اند و R دامنه‌ی ایدآل اصلی است، پس $R = q_iR + q_jR$ زیرمجموعه‌ی $M_j \cap R$ است که تناقض است. حال ثابت می‌کنیم که $Q := \bigcap_{i=۱}^{\infty} M_i = ۰$. فرض کنیم $Q \neq ۰$. با توجه به این که R دامنه‌ی ایدآل اصلی است، پس $\dim(R) = ۱$ و R نوتری است. هم‌چنین با توجه به این که $(M_i \cap R)$ ها، نامتناهی ایدآل‌های ماکسیمال متمایزند، پس $Q \cap R = ۰$. لذا طبق قضیه ۱ از [۱۷]، ایدآل اول ناصفر P از D موجود است به‌طوری که $Q \subseteq P$ و $P \cap R = ۰$. درنتیجه با توجه به این که $\dim(D) = ۱$، بنابراین $P \in Max(D)$ و در نتیجه D/P میدان است. از طرفی $P \cap R = ۰$، پس D/P میدانی است که شامل یک دامنه‌ی ایدآل اصلی است و لذا طبق قضیه ۲.۲ از [۲]، D/P دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. پس طبق گزاره ۳.۲ از [۱]، D دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است، که متناقض با فرض است. لذا $Q = ۰$ و اثبات تمام است. □

قضیه **۳.۲.** فرض کنیم T یک دامنه‌ی صحیح با بُعد کرول متناهی باشد به‌طوری که $\dim(T) \geq ۱$. در این صورت اگر T زیرحلقه‌ی ماکسیمال نداشته باشد، آن‌گاه ایدآل‌های ماکسیمال $M_۱$، $M_۲$، ... از T وجود دارند به‌طوری که $\bigcap_{i=۱}^{\infty} M_i$ یک ایدآل اول در T است.

اثبات. با استقراء روی $\dim(T)$ اثبات را انجام می‌دهیم. طبق قضیه قبل برای $\dim(T) = ۱$، قضیه برقرار است. فرض کنیم برای $\dim(T) \leq n - ۱$ قضیه درست باشد. ثابت می‌کنیم قضیه برای $\dim(T) = n \geq ۲$ نیز برقرار است. با توجه به اثبات قضیه قبل، T شامل یک دامنه‌ی ایدآل اصلی مانند R است به‌طوری که $Irr(R) = \{q_۱, q_۲, \ldots\}$. هم‌چنین ایدآل‌های ماکسیمال متمایز M_i از T وجود دارند به طوری که $q_i \in M_i$ و $(\bigcap_{i=۱}^{\infty} M_i) \cap R = ۰$. قرار می‌دهیم $Q := \bigcap_{i=۱}^{\infty} M_i$. اگر $Q = ۰$، آن‌گاه $Q \in Spec(T)$ و اثبات تمام است. حال فرض کنیم که $Q \neq ۰$. چون $Q \cap R = ۰$، طبق قضیه ۱ از [۱۷]، ایدآل اول P از T موجود است به طوری که $Q \subseteq P$ و $P \cap R = ۰$. بنابراین T/P شامل نسخه‌ای از R است. حال چون T دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال نیست، پس طبق گزاره ۳.۲ از [۱]، T/P دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال نیست و لذا طبق قضیه ۲.۲ از [۲]، T/P میدان نیست. از طرفی چون $Q \neq ۰$ و $Q \subseteq P$، پس $P \neq ۰$ و درنتیجه $۱ \leq \dim(T/P) \leq n - ۱$. حال طبق فرض استقراء، ایدآل‌های ماکسیمال $N_۱/P$، $N_۲/P$، ... از T/P موجودند به‌طوری که $\bigcap_{i=۱}^{\infty}(N_i/P) = (\bigcap_{i=۱}^{\infty} N_i)/P$ یک ایدآل اول در دامنه‌ی T/P است. بنابراین ایدآل‌های ماکسیمال $N_۱$، $N_۲$، ... از T موجودند به‌طوری که $\bigcap_{i=۱}^{\infty} N_i$ یک ایدآل اول در T می‌باشد و لذا اثبات تمام است.
□

تذکر **۴.۲.** اگر R زیرحلقه‌ی ماکسیمال T باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $\alpha \in T$، چندجمله‌ای ناصفر $f(x)$ در $R[x]$ موجود است به‌طوری که حداقل یکی از ضرایب $f(x)$ عضو $U(R)$ است و $f(\alpha) = ۰$. زیرا اگر $\alpha^۲ \in R$، آن‌گاه $f(x) = x^۲ - \alpha^۲ \in R[x]$ و $f(\alpha) = ۰$. حال اگر $\alpha^۲ \notin R$، آن‌گاه با توجه به این که R در T زیرحلقه‌ی ماکسیمال است، $R[\alpha^۲] = T$. لذا چون $\alpha \in T$، عناصر $c_۰, c_۱, \ldots, c_n$ در R وجود دارند به‌طوری که $n \geq ۰$ و $\alpha = c_n(\alpha^۲)^n + c_{n-۱}(\alpha^۲)^{n-۱} + \cdots + c_۱(\alpha^۲) + c_۰$. حال قرار می‌دهیم: $f(x) = c_nx^{۲n} + c_{n-۱}x^{۲n-۲} + \cdots + c_۱x^۲ + c_۰ - x \in R[x]$ و داریم $f(\alpha) = ۰$.

تذکر **۵.۲.** اگر R زیرحلقه‌ی ماکسیمال T باشد، آن‌گاه طبق تذکر قبل، T توسیع جبری R می‌باشد.

تذکر **۶.۲.** اگر R زیرحلقه‌ی ماکسیمال T باشد و R' مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی از T باشد که روی R صحیح هستند، آن‌گاه با توجه به این که $R \leq R' \leq T$، دقیقاً یکی از دو حالت زیر برقرار است:

۱- $R = R'$ و لذا R در T بسته‌ی صحیح است.

۲- $R' = T$ و لذا T روی R صحیح است.

لم ۷.۲. فرض کنیم T دامنه‌ی صحیح و R زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن باشد. اگر R در T بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه $Q(R) = Q(T)$. به‌ویژه R هیچ‌گاه میدان نیست.

اثبات. طبق تذکر ۵.۲، T روی R جبری می‌باشد. بنابراین با توجه به تمرین ۳۵ صفحه ۴۴ از [۱۷]، $T \leq Q(R)$ و درنتیجه $Q(T) \leq Q(R)$. ازطرفی چون $R \leq T$، پس $Q(R) \leq Q(T)$ و بنابراین $Q(T) = Q(R)$. در نهایت توجه کنیم که اگر R میدان باشد، آن‌گاه $R = T$ که به‌وضوح تناقض است. □

لم ۸.۲. فرض کنیم T یک دامنه‌ی صحیح باشد که میدان نیست. در این صورت اگر R زیرحلقه‌ی ماکسیمال T باشد، آن‌گاه $Q(R) = Q(T)$. به‌ویژه R هیچ‌گاه میدان نیست.

اثبات. اگر R در T بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه طبق لم قبل، اثبات تمام است. حال فرض کنیم T روی R صحیح باشد. چون T میدان نیست، R نیز نمی‌تواند میدان باشد. درنتیجه $(\circ)$ ایدآل اولی از R است که ماکسیمال نیست. از طرفی طبق قضیه ۲.۲ از [۱۵]، ایدآل ماکسیمال M از R وجود دارد به‌طوری که برای هر $P \in Spec(R) \setminus \{M\}$، $R_P = T_P$. لذا $Q(R) = R_{(\circ)} = T_{(\circ)}$، بنابراین $T_{(\circ)}$ میدانی شامل T است و چون $T_{(\circ)} \leq Q(T)$، پس $Q(T) = T_{(\circ)} = R_{(\circ)} = Q(R)$. در نهایت توجه کنیم که اگر R میدان باشد، آن‌گاه $R = T$ که به‌وضوح تناقض است. □

اگر M و M' دو ایدآل ماکسیمال از حلقه‌ی R باشند به‌طوری که $R/M \simeq R/M'$، آن‌گاه مطابق قضیه ۲.۲ و گزاره ۳.۲ از [۱]، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. حال در ارتباط با دامنه‌های پروفر، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر باشد. در این صورت اگر P و Q ایدآل‌های اول مقایسه‌ناپذیر در R باشند به‌طوری که $R/P \simeq R/Q$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. طبق تمرین ۷.۱ صفحه ۹۶ از [۱۶]، $P + Q = R$. بنابراین

$$\frac{R}{P \cap Q} \simeq \frac{R}{P} \times \frac{R}{Q} \simeq \frac{R}{P} \times \frac{R}{P}$$

و لذا طبق قضیه ۲.۲ از [۱]، $R/(P \cap Q)$ دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. درنتیجه طبق گزاره ۳.۲ از [۱]، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

□

چون هر دامنه‌ی بزوت، یک دامنه‌ی پروفر است، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی بزوت باشد. در این صورت اگر P و Q ایدآل‌های اول مقایسه‌ناپذیر در R باشند به‌طوری که $R/P \simeq R/Q$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر باشد و $\dim(R) = ۱$. در این صورت اگر P و Q ایدآل‌های اول متمایز ناصفر در R باشند به‌طوری که $R/P \simeq R/Q$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. چون $\dim(R) = ۱$، P و Q دو ایدآل اول مقایسه‌ناپذیر در R هستند. بنابراین با توجه قضیه ۹.۲، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

□

نتیجه ۱۲.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر و I یک ایدآل ناصفر در آن باشد. در این صورت اگر P و Q ایدآل‌های اول مینیمال شامل I باشند به‌طوری که $P \neq Q$ و $R/P \simeq R/Q$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. با توجه به فرض، P و Q مقایسه‌ناپذیرند. درنتیجه با توجه به قضیه ۹.۲، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

□

قضیه ۱۳.۲. فرض کنیم T دامنه‌ی پروفر و $R \leq T$ یک توسیع صحیح از حلقه‌ها باشد. در این صورت اگر $Q_۱$ و $Q_۲$ ایدآل‌های اول متمایز در T باشند به‌طوری که $T/Q_۱ \simeq T/Q_۲$ و $R \cap Q_۱ = R \cap Q_۲$. آن‌گاه T دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. طبق قضیه ۴۴ از [۱۷]، $Q_۱$ و $Q_۲$ مقایسه‌ناپذیرند. پس طبق قضیه ۹.۲، T دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. □

قضیه ۱۴.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر باشد و P و Q ایدآل‌های اول متمایز ناصفر در R باشند به‌طوری که $R/P \simeq R/Q$. در این صورت اگر P یا Q متناهیاً تولیدشده باشد، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. فرض کنیم P یک ایدآل متناهیاً تولیدشده باشد، پس طبق تمرین ۱۳ صفحه ۴۲ از [۱۷]، P یک ایدآل ماکسیمال است و درنتیجه $P+Q=R$. بنابراین طبق قضیه ۹.۲، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

□

قضیه ۱۵.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر و I مجموعه‌ی تمام عناصر اول R، در حد شراکت، باشد. در این صورت اگر $|I| > ۲^{\aleph_۰}$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. طبق تمرین ۱۳ صفحه ۴۲ از [۱۷]، به‌ازای هر $p \in I$، pR یک ایدآل ماکسیمال در R می‌باشد. بنابراین

$$|Max(R)| \geq |I| = |\{pR\,|\,p\in I\}| > ۲^{\aleph_۰}$$

و درنتیجه طبق گزاره ۶.۲ از [۵]، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. □

مثال ۱۶.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی ددکیند و I مجموعه‌ی عناصر اول R، در حد شراکت، باشد. در این صورت اگر $|I| > ۲^{\aleph_۰}$، آن‌گاه $R+xQ(R)[x]$ یک دامنه‌ی پروفر است که دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. چون هر دامنه‌ی ددکیند، یک دامنه‌ی پروفر است، طبق قضیه قبل، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. از طرفی داریم:

$$\frac{R+xQ(R)[x]}{xQ(R)[x]} \simeq R.$$

بنابراین $\frac{R+xQ(R)[x]}{xQ(R)[x]}$ دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال و درنتیجه طبق گزاره ۳.۲ از [۱]، $R+xQ(R)[x]$ دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. همچنین $R+xQ(R)[x]$ طبق مثال ۵.۱ صفحه ۹۳ از [۱۶]، دامنه‌ی پروفر است. □

نتیجه ۱۷.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر و UFD باشد به‌طوری که $|Irr(R)| > ۲^{\aleph_۰}$. در این صورت R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. چون R دامنه‌ی UFD است، بنابراین هر عنصر تحویل‌ناپذیر، اول است. در نتیجه طبق قضیه ۱۵.۲، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

□

قضیه ۱۸.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر باشد. در این صورت اگر p عنصر اولی از R باشد به‌طوری که $|R/(p)| \geq ۲^{\aleph_۰}$ یا $Char(\frac{R}{(p)}) = ۰$، آن‌گاه R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

اثبات. طبق تمرین ۱۳ صفحه ۴۲ از [۱۷]، $R/(p)$ میدان است. پس طبق نتیجه ۳.۱ از [۵]، $R/(p)$ دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. درنتیجه طبق گزاره ۳.۲ از [۱]، R دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است.

□

۳ انتقال ویژگی پروفر، بزوت و ... از یک دامنه‌ی صحیح به زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن و به عکس

یکی از مباحث ویژه که در یک توسیع $R \leq T$ از حلقه‌ها وجود دارد، انتقال ویژگی‌های جبری بین R و T است. حالت خاص این مبحث، زمانی است که R زیرحلقه‌ی ماکسیمال T باشد. در قضیه ۱۰ از [۲۰] نشان داده شده است که اگر R در T بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه R دامنه‌ی صحیح است اگر و تنها اگر T دامنه‌ی صحیح باشد. همچنین در مراجع [۱۰]، [۱۱]، [۱۸] و [۱۹] ثابت شده است که R متناهی است اگر و تنها اگر T متناهی باشد. تعمیم این نتیجه، در قضیه ۸.۳ از [۸] بیان شده است. این قضیه بیان می‌کند که R آرتینی است اگر و تنها اگر T آرتینی و روی R صحیح باشد. نمونه جالب‌تر از این گونه نتایج نیز در گزاره ۱۰.۲ از [۵] می‌باشد، که نشان می‌دهد تنها درون‌ریختی حلقه‌ای، زیرحلقه‌های ماکسیمال اعداد حقیقی، همانی است. برخی دیگر از ویژگی‌های جبری که بین یک حلقه و زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن انتقال می‌یابد در [۹] بررسی شده‌اند. در این بخش به بررسی انتقال شرایط پروفر، بزوت و ... از یک دامنه‌ی صحیح به زیرحلقه‌ی ماکسیمال و به عکس خواهیم پرداخت.

لم ۱.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R یک دامنه‌ی بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه R در T نیز بسته‌ی صحیح است.

اثبات. طبق لم ۸.۲، $Q(R) = Q(T)$. از طرفی R یک دامنه‌ی بسته‌ی صحیح است و لذا R در T بسته‌ی صحیح است. □

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R یک دامنه‌ی بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه T به‌عنوان R–مدول متناهیاً تولیدشده نیست.

اثبات. طبق لم قبل، R در T بسته‌ی صحیح است و در نتیجه T روی R صحیح نیست. بنابراین طبق قضیه ۱۷ از [۱۷]، T به‌عنوان R–مدول متناهیاً تولیدشده نیست. □

قضیه ۳.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R یک دامنه‌ی پروفر باشد، آن‌گاه T دامنه‌ی پروفر است و R در T بسته‌ی صحیح است.

اثبات. طبق لم ۸.۲، $Q(R) = Q(T)$. پس T زبرحلقه‌ی R است. چون هر دامنه‌ی پروفر، بسته‌ی صحیح است، پس R در T بسته‌ی صحیح است. در نهایت، توجه کنیم که طبق قضیه ۱.۱ صفحه ۹۱ از [۱۶]، T دامنه‌ی پروفر است. □

نتیجه ۴.۳. اگر R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال پروفر از دامنه‌ی صحیح موضعی T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$، آن‌گاه T یک دامنه‌ی ارزیاب است.

اثبات. طبق قضیه قبل، T یک دامنه‌ی پروفر است. حال با توجه به این‌که T یک دامنه‌ی صحیح موضعی است، طبق قضایای ۵۹ و ۶۳ از [۱۷]، T یک دامنه‌ی ارزیاب است. □

نتیجه ۵.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح نوتری T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R یک دامنه‌ی پروفر باشد، آن‌گاه T یک دامنه‌ی ددکیند است.

اثبات. طبق قضیه ۳.۳، T یک دامنه‌ی پروفر است. حال چون T نوتری است، پس T یک دامنه‌ی ددکیند است. □

نتیجه ۶.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح نوتری T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر T نیم‌موضعی و R پروفر باشد، آن‌گاه T یک دامنه‌ی ایدآل اصلی است.

اثبات. طبق نتیجه قبل، T یک دامنه‌ی ددکیند است. چون T یک دامنه‌ی صحیح نیم‌موضعی است، طبق قضیه ۶۰ از [۱۷]، T یک دامنه‌ی ایدآل اصلی است. □

نتیجه ۷.۳. فرض کنیم T یک دامنه‌ی صحیح نوتری باشد و $\dim(T) \geq 2$. در این صورت اگر R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال T باشد، آن‌گاه R پروفر نیست.

اثبات. فرض کنیم R یک دامنه‌ی پروفر باشد. در این صورت طبق نتیجه ۵.۳، T یک دامنه‌ی ددکیند است. در نتیجه طبق قضیه ۹۶ از [۱۷]، $\dim(T) \leq 1$ که متناقض با فرض است. □

مثال ۸.۳. فرض کنیم R یک دامنه‌ی ایدآل اصلی باشد به‌طوری که $\dim(R) \neq 0$. در این صورت برای هر $n \geq 1$، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $S := R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است و زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن نمی‌تواند دامنه‌ی پروفر باشد. زیرا طبق نتیجه ۷.۲ از [۱]، حلقه‌ی S دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است. فرض کنیم T زیرحلقه‌ی ماکسیمال S باشد. طبق قضیه ۳۸ از [۱۷]، $\dim(S) \geq 2$ و درنتیجه طبق نتیجه قبل، T نمی‌تواند دامنه‌ی پروفر باشد.

به طور مشابه، با استفاده از قضیه ۱۱.۲ از [۱]، مثال زیر را داریم.

مثال ۹.۳. فرض کنیم R یک دامنه‌ی ایدآل اصلی باشد به‌طوری که $\dim(R) \neq 0$. در این صورت برای هر $n \geq 1$، حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$ دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال است و زیرحلقه‌ی ماکسیمال آن نمی‌تواند دامنه‌ی پروفر باشد.

لم ۱۰.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R دامنه‌ی پروفر باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند:

۱) T یک دامنه‌ی ارزیاب است.

۲) ایدآل اول P در R موجود است به‌طوری که $T = R_P$.

اثبات. طبق لم ۸.۲، $Q(R) = Q(T)$. پس T زبرحلقه‌ی R است. حال فرض کنیم (۱) برقرار باشد، لذا مطابق قضیه ۶۵ از [۱۷]، (۲) برقرار است. به‌عکس، اگر (۲) برقرار باشد، آن‌گاه مطابق نتیجه ۴.۳، T دامنه‌ی ارزیاب است. □

لم ۱۱.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R نوتری باشد و $\dim(R) = 1$، آن‌گاه T نیز نوتری است و $\dim(T) = 1$.

اثبات. طبق لم ۸.۲، $Q(R) = Q(T)$. پس T زبرحلقه‌ی R است. درنتیجه طبق قضیه ۹۳ از [۱۷]، اثبات تمام است. □

لم ۱۲.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد به‌طوری که $\dim(T) \neq 0$. در این صورت اگر R دامنه‌ی پروفر باشد، آن‌گاه زیرمجموعه‌ی I از $Spec(R)$ موجود است به‌طوری که $T = \bigcap\limits_{P \in I} R_P$.

اثبات. با توجه به قضیه ۳.۳، T بسته‌ی صحیح است. حال طبق قضیه ۵۷ از [۱۷]، $T = \bigcap\limits_{V \in J} V$ که در آن J مجموعه‌ی تمام ارزیاب‌های $Q(R) = Q(T)$ است که شامل T و لذا R اند. از طرفی چون R پروفر است، طبق قضیه ۶۵ از [۱۷]، به‌ازای هر $V \in J$، ایدآل اول P در R موجود است به‌طوری که $V = R_P$. فرض کنیم I مجموعه‌ی ایدآل‌های اول R باشد که $R_P \in J$، در این صورت $T = \bigcap\limits_{P \in I} R_P$. □

برای ادامه‌ی کار، به تمرین ۳۱ صفحه ۴۳ از [۱۷] نیاز داریم. گزاره زیر، این تمرین را بیان می‌کند.

گزاره ۱۳.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی موضعی از $R[b]$ باشد که در آن بسته‌ی صحیح است. در این صورت اگر چندجمله‌ای $f(x)$ در $R[x]$ وجود داشته باشد به‌طوری که حداقل یکی از ضرایب آن در R وارون‌پذیر است و $f(b) = 0$، آن‌گاه $b \in R$ یا $b^{-1} \in R$.

نتیجه ۱۴.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال موضعی از دامنه‌ی صحیح T باشد. در این صورت اگر R در T بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $b \in T$، $b \in R$ یا $b^{-1} \in R$.

نتیجه ۱۵.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد و $P \in Spec(R)$. در این صورت اگر R در T بسته‌ی صحیح باشد و $R_P \subsetneqq T_P$، آن‌گاه به‌ازای هر $b \in T_P$، $b \in R_P$ یا $b^{-1} \in R_P$.

لم ۱۶.۳. فرض کنیم R در دامنه‌ی صحیح T بسته‌ی صحیح و ماکسیمال باشد. هم‌چنین فرض کنیم برای هر $Q \in Spec(T)$، اگر $P \in Spec(R)$ به‌گونه‌ای باشد که $Q \cap R \subseteq P$، آن‌گاه برای هر $x \in T_Q$ نتیجه شود که $x \in T_P$ یا $x^{-1} \in T_P$. در این صورت اگر T دامنه‌ی پروفر باشد، آن‌گاه R نیز یک دامنه‌ی پروفر است.

اثبات. طبق لم ۷.۲، $Q(R) = Q(T)$. حال فرض کنیم P ایدآل اول دلخواهی از R باشد. اگر $R_P = T_P$، آن‌گاه با توجه به پروفر بودن T_P، نتیجه می‌شود که R_P یک دامنه‌ی ارزیاب است. حال فرض کنیم $R_P \subsetneqq T_P$ و Q ایدآل اولی از T باشد که $Q \cap R \subseteq P$ (وجود چنین ایدآل اولی با در نظر گرفتن مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی $R \setminus P$ در T تضمین می‌شود). حال چون $R_P \subsetneqq T_P$، $T_P \leq T_Q$ و T_Q ارزیاب است، بنابراین به‌ازای هر عضو ناصفر b از

$$Q(R) = Q(R_P) = Q(T) = Q(T_P) = Q(T_Q),$$

$b \in T_Q$ یا $b^{-1} \in T_Q$. در نتیجه طبق فرض و نتیجه قبل، $b \in R_P$ یا $b^{-1} \in R_P$. بنابراین R_P دامنه‌ی ارزیاب است. چون P ایدآل اول دلخواهی از R است، طبق قضیه ۶۴ از [۱۷]، R دامنه‌ی پروفر است. □

اگر R زیرحلقه‌ی ماکسیمال حلقه‌ی T باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۲.۲ از [۱۵]، ایدآل ماکسیمال M از R وجود دارد به‌طوری که برای هر $P \in Spec(R) \setminus \{M\}$، $R_P = T_P$. به‌علاوه R_M زیرحلقه‌ی ماکسیمال T_M است. این ایدآل ماکسیمال را ایدآل ماکسیمال بحرانی می‌نامند.

لم ۱۷.۳. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد. هم‌چنین فرض کنیم R در T بسته‌ی صحیح و به‌ازای ایدآل ماکسیمال بحرانی P، T_P موضعی باشد. در این صورت اگر T پروفر باشد، آن‌گاه R نیز پروفر است.

اثبات. طبق لم ۷.۲، $Q(R) = Q(T)$. فرض کنیم P ایدآل اول دلخواهی از R باشد. اگر $R_P = T_P$، آن‌گاه چون T_P دامنه‌ی پروفر است، نتیجه می‌گیریم R_P یک دامنه‌ی ارزیاب است. حال فرض کنیم $R_P \subsetneqq T_P$، در این صورت با توجه به موضعی بودن T_P نتیجه می‌گیریم T_P یک دامنه‌ی ارزیاب است. بنابراین به‌ازای هر عضو ناصفر x از $Q(R) = Q(R_P) = Q(T_P) = Q(T)$، $x \in T_P$ یا $x^{-1} \in T_P$. لذا طبق نتیجه ۱۵.۳، $x \in R_P$ یا $x^{-1} \in R_P$. پس R_P دامنه‌ی ارزیاب است. چون P ایدآل اول دلخواه است، پس طبق قضیه ۶۴ از [۱۷]، R پروفر است.

□

نتیجه **۱۸.۳**. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال در دامنه‌ی ارزیاب T باشد. در این صورت اگر R در T بسته‌ی صحیح باشد، آن‌گاه R یک دامنه‌ی پروفر است.

اثبات. چون T دامنه‌ی ارزیاب است، به‌ازای هر ایدآل اول P از R، T_P دامنه‌ی ارزیاب است و در نتیجه طبق لم قبل، R دامنه‌ی پروفر است. □

قضیه **۱۹.۳**. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال بزوت در دامنه‌ی صحیح T باشد و $T \neq Q(T)$. در این صورت T دامنه‌ی بزوت است و R در T بسته‌ی صحیح است.

اثبات. طبق لم ۸.۲، $Q(R) = Q(T)$. پس T زیرحلقه‌ی R می‌باشد و بنابراین طبق تمرین ۷ صفحه ۷۳ از [۱۷]، زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی X از R موجود است به‌طوری که $T = R_X$. فرض کنیم $I = (\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n})$ یک ایدآل متناهیاً تولیدشده از T باشد، در این صورت

$$I = (\frac{a_1}{1}, \dots, \frac{a_n}{1}) = (a_1, \dots, a_n)_X.$$

چون R دامنه‌ی بزوت است، $(a_1, \dots, a_n) = (a)$ و بنابراین $I = (a)_X = (\frac{a}{1})$. چون R بزوت است، پس R بسته‌ی صحیح است و درنتیجه R در T بسته‌ی صحیح است. □

مثال **۲۰.۳**. فرض کنیم R یک دامنه‌ی ددکیند باشد. اگر R یک دامنه‌ی ایدآل اصلی نباشد و T زیرحلقه‌ی ماکسیمال $R+xQ(R)[x]$ باشد، آن‌گاه T دامنه‌ی بزوت نیست. فرض کنیم T دامنه‌ی بزوت باشد. چون $R+xQ(R)[x]$ میدان نیست و T زیرحلقه‌ی ماکسیمال $R+xQ(R)[x]$ است، بنابراین طبق قضیه قبل، $R+xQ(R)[x]$ دامنه‌ی بزوت است و این تناقض است. زیرا طبق مثال ۵.۱ صفحه ۹۳ از [۱۶]، $R+xQ(R)[x]$ دامنه‌ی بزوت نیست.

نتیجه **۲۱.۳**. فرض کنیم R یک زیرحلقه‌ی ماکسیمال از دامنه‌ی صحیح T باشد و $T \neq Q(T)$. در این صورت اگر R دامنه‌ی بزوت و UFD باشد، آن‌گاه T دامنه‌ی بزوت و UFD است.

اثبات. طبق قضیه ۱۹.۳ و اثبات آن، T دامنه‌ی بزوت است و زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی X از R موجود است به‌طوری که $T = R_X$. بنابراین طبق تمرین ۳ صفحه ۲۴ از [۱۷]، T دامنه‌ی UFD است. □

سپاس‌گزاری. نویسندگان از داور محترم دقیق و علاقه‌مند، به خاطر پیشنهادات ارزشمندشان که در غنی‌تر شدن محتوای این مقاله نقشی شایسته داشته است، تشکر و قدردانی می‌نمایند. همچنین نویسنده اول از حمایت مالی معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه(SCU.MM۱۴۰۰/۷۲۱) در انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نماید.

فهرست منابع

[1] A. Azarang, *On maximal subrings,* Far East J. Math. Sci. (FJMS), 32(1) (2009), 107-118.

[2] A. Azarang, *Submaximal integral domains,* Taiwanese J. Math., 17(4) (2013), 1395-1412.

[3] A. Azarang, *On the existence of maximal subrings in commutative noetherian rings*, J. Algebra Appl., 14(1) (2015), ID:1450073.

[4] A. Azarang, *Conch Maximal Subrings*, Comm. Algebra, 50(3) (2022), 1267-1282.

[5] A. Azarang and O. A. S. Karamzadeh, *Which fields have no maximal subrings?* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 126 (2011), 213-228

[6] A. Azarang and O. A. S. Karamzadeh, *On the existence of maximal subrings in commutative artinian rings,* J. Algebra Appl., 9(5) (2010), 771-778.

[7] A. Azarang and O. A. S. Karamzadeh, *Most commutative rings have maximal Subrings,* Algebra Colloquium, 19 (Spec1) (2012), 1139-1154.

[8] A. Azarang and O. A. S. Karamzadeh, *On maximal subrings of commutative rings,* Algebra Colloquium, 19 (Spec1) (2012), 1125-1138.

[9] A. Azarang and O. A. S. Karamzadeh and A. Namazi, *Hereditary properties between a ring and its maximal subrings,* Ukrainian. Math. J., 65(7) (2013), 981-994.

[10] H. E. Bell and F. Guerriero, *Some Condition for Finiteness and Commutativity of Rings*, Internat. J. Math. Math. Sci., 13(3) (1990), 535-544.

[11] H. E. Bell and A. A. Klein, *On finiteness of rings with finite maximal subrings*, Internat. J. Math. Math. Sci., 16(2) (1993), 351-354.

[12] D. E. Dobbs, *Every commutative ring has a minimal ring extension,* Comm. Algebra, 34 (2006), 3875-3881.

[13] D. E. Dobbs and J. Shapiro, *A classification of the minimal ring extensions of an integral domain,* J. Algebra, 305 (2006), 185-193.

[14] D. E. Dobbs and J. Shapiro, *A classification of the minimal ring extensions of certain commutative rings,* J. Algebra, 308 (2007), 800-821.

[15] D. Ferrand and J-P. Olivier, *Homomorphismes minimaux d'anneaux,* J. Algebra, 16 (1970), 461-471.

[16] L. Fuchs and L. Salce, *Modules over Non-Noetherian Domains,* Mathematical Surveys and Monographs, Volume 84, American Mathematical Society, 2001.

[17] I. Kaplansky, *Commutative Rings,* rev. ed., University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[18] A. A. Klein, *The finiteness of a ring with a finite maximal subrings*, Comm. Algebra, 21(4) (1993), 1389-1392.

[19] T. J. Laffey, *A finiteness theorem for rings*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, 92(2) (1992), 285-288.

[20] M. L. Modica, *Maximal Subrings,* Ph. D. Dissertation, University of Chicago, 1975.

Maximal Subrings of Prüfer Domains

Mohammadreza Alinaghizade [‡] **, Alborz Azarang**

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: O.A.S. Karamzadeh

Received: 2021/10/20 Accepted: 2022/5/1

Abstract: In this paper we present conditions under which a Prüfer domain has a maximal subring. We study the Prüfer and Bézout properties which are shared between an integral domain and its maximal subrings too.

Keywords: Prüfer domain, Bézout domain, Maximal subring.

©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[‡]Corresponding author.
E-mail addresses: mohamad-alinaghi@stu.scu.ac.ir (M. Alinaghizadeh), a_azarang@scu.ac.ir, (A.Azarang).