مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۲، دوره ۱۳، شماره ۱، ص ۵۹–۷۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱–۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2023.39637.1995

تحلیل هم‌گرایی روش شبه‌طیفی ژاکوبی برای معادلات انتگرال–دیفرانسیل کسری تأخیری در فضای $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$

نرگس پیک‌رایگان، مهدی قوتمند ×، محمد هادی نوری اسکندری

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۳/۳

چکیده: روش‌های شبه‌طیفی در سال‌های اخیر به‌دلیل دقت و سرعت هم‌گرایی بالایی که دارند برای حل بسیاری از رده‌های معادلات دیفرانسیل و انتگرال به‌کار گرفته شده‌اند. در این مقاله، یک روش شبه‌طیفی ژاکوبی کارا برای حل رده‌ای از معادلات انتگرال–دیفرانسیل کسری تأخیری ارائه می‌کنیم. سپس با ارائه چندین لم و قضیه، هم‌گرایی روش را روی فضای $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$ بررسی کرده و کران‌های خطا را مشخص می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مشتقات کسری ریمان–لیوویل و کاپوتو، چندجمله‌ای‌های درون‌یاب لاگرانژ، نقاط ژاکوبی–گاوس، معادله انتگرال–دیفرانسیل کسری تأخیری.

رده‌بندی ریاضی: 65R20,65L70,65L20,45J05,26A33

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل و انتگرال–دیفرانسیل تأخیری کسری، معادلاتی‌اند که مرتبه مشتق ظاهرشده در آن‌ها از مرتبه کسری است و به‌علاوه یک پارامتر تأخیر در این معادلات وجود دارد. در [۱۸]، روش ماتریس عملیاتی اصلاح‌شده برای حل معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری ارائه شده است. سیام و همکاران، از مشتق کسری کاپوتو برای ارائه روش خود استفاده کردند و به الگوریتمی کارآمد دست یافتند و با تحلیل هم‌گرایی کار خود و ارائه چندین مثال، توانایی بالای کار خود را نشان دادند. یوتانان و همکاران از روش موجک لژاندر و انتگرال‌های کسری ریمان–لیوویل استفاده کردند تا معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری را حل کنند [۲۱]. آن‌ها در این راه از تبدیل لاپلاس معکوس نیز بهره بردند تا به معادله جبری دست یابند. هم‌چنین آن‌ها کران‌های خطا را درفضای $L^2[0,1]$ بررسی کردند. گاندی و مادوری با استفاده از مشتق کسری کاپوتو و ریمان–لیوویل، دو طرح عددی از مرتبه بالاتر را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری ارائه کردند [۴]. آن‌ها از تقریبی مبتنی بر مشتق کسری ریمان–لیوویل و از تقریب مبتنی بر تفاضل متناهی برای مشتق کسری کاپوتو استفاده کرده و نشان دادند که تقریب مبتنی

×نویسنده مسئول مقاله
(M. Ghovatmand) Ghovatmand@shahroodut.ac.ir

بر تفاضل متناهی، دارای محاسبات کمتری در حدود ۵۰ درصد نسبت به تقریب مبتنی بر درون‌یاب است. شهمراد و همکاران از روش تاو برای حل رده‌ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری استفاده کردند [۱۶]. آن‌ها از انتگرال خطی ریمان-لیوویل استفاده کردند و به بیان فرمول ماتریس عملیاتی روش تاو پرداختند. درواقع، هدف آن‌ها حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای کسری تأخیری بود که با استفاده از این ماتریس توانستند این معادلات را در مفهوم مشتق کسری به یک دستگاه معادلات غیرخطی تبدیل کنند و در نهایت کران‌های خطای خود را نیز به‌دست آوردند.

اما در [۹] نویسندگان یک روش شبه‌طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری ارائه کرده اند که تعمیمی از روش شبه‌طیفی ارائه‌شده در [۲۰] برای معادلات دیفرانسیل کسری است. همچنین در [۱۰] این روش شبه‌طیفی برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری توسیع داده شده است و تحلیل خطا در فضای $L^{\infty}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$ صورت گرفته است. ساختار این مقاله به‌صورت زیر است. در بخش دوم به بیان برخی از مفاهیم پایه‌ای می‌پردازیم. در بخش سوم، رویکرد عددی خود را بیان می‌کنیم. بخش چهار شامل چندین لم است که به ما کمک می‌کنند تا بتوانیم تحلیل خطای کار خود را در فضای $L^{2}_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$ بررسی کنیم. در بخش پنجم، نتیجه‌گیری و پیش‌نهادهایی برای کارهای آینده ارائه خواهد شد.

۲ مفاهیم پایه

در این بخش، برخی از مقدمات و مفاهیم مورد نیاز در بخش‌های بعدی را ارائه می‌دهیم.

۱.۲ مشتق و انتگرال کسری کاپوتو

تعریف ۱.۲. مشتق کسری کاپوتوی $\Psi(\cdot)$ از مرتبه $n-1<\gamma<n$ برای یک عدد صحیح مثبت n به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_a^C D_t^{\gamma}\Psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^t\dfrac{\Psi^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{(\gamma-n+1)}}d\tau, & n-1<\gamma<n,\\ \Psi^{(n)}(t), & \gamma=n,\ \ t\in(a,b],\end{cases} \tag{۱.۲}$$

که در آن تابع $\Psi(\cdot)$ و تابع گامای $\Gamma(\cdot)$ روی بازه $[a,b]$ تعریف شده‌اند.

تعریف ۲.۲. انتگرال کسری ریمان-لیوویل $\Psi(\cdot)$ از مرتبه $\gamma\geq 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_a^C I_t^{\gamma}\Psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t(t-\tau)^{\gamma-1}\Psi(\tau)d\tau, & \gamma>0,\\ \Psi(t), & \gamma=0.\end{cases} \tag{۲.۲}$$

تذکر ۳.۲. توجه داشته باشیم که

$$ {}_a^C I_t^{\gamma}\left({}_a^C D_t^{\gamma}\Psi(t)\right)=\Psi(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\Psi^{(j)}(a)\frac{t^j}{j!}. \tag{۳.۲}$$

برای مشاهده سایر ویژگی‌های مهم انتگرال‌ها و مشتقات کسری به [۲، ۱۱، ۱۴، ۱۵] مراجعه شود.

۲.۲ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و فضاهای سوبولوف

تعریف ۴.۲. فرض کنیم $\mathcal{J}_n^{\gamma,\eta}(t)$ و $\omega^{\gamma,\eta}(t)=(1-t)^{\gamma}(1+t)^{\eta}$، که در آن $\gamma,\eta>-1$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و توابع وزن متناظر باشد. این چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌هایی متعامد روی بازه $I=[-1,1]$ اند که در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases}\mathcal{J}_{n+1}^{\gamma,\eta}=\left(A_n^{\gamma,\eta}t-B_n^{\gamma,\eta}\right)\mathcal{J}_n^{\gamma,\eta}(t)-C_n^{\gamma,\eta}\mathcal{J}_{n-1}^{\gamma,\eta}, & n\geq 1,\\ \mathcal{J}_0^{\gamma,\eta}(t)=1, \quad \mathcal{J}_1^{\gamma,\eta}(t)=\frac{1}{2}(\gamma+\eta+2)t+\frac{1}{2}(\gamma-\eta),\end{cases}$$

که در آن

$$A_n^{\gamma,\eta} = \frac{(2n+\gamma+\eta+1)(2n+\gamma+\eta+2)}{2(n+1)(n+\gamma+\eta+1)},$$
$$B_n^{\gamma,\eta} = \frac{(\eta^2-\gamma^2)(2n+\gamma+\eta+1)}{2(n+1)(n+\gamma+\eta+1)(2n+\gamma+\eta)},$$
$$C_n^{\gamma,\eta} = \frac{(n+\gamma)(n+\eta)(2n+\gamma+\eta+2)}{(n+1)(n+\gamma+\eta+1)(2n+\gamma+\eta)}. \qquad (4.2)$$

تعریف **۵.۲**. برای $1 \leq p \leq \infty$ ، فرض کنیم

$$L^p_{\omega^{\gamma,\eta}}(I) = \{v : v \text{ و اندازه‌پذیر است } ||v||_{L^p_{\omega^{\gamma,\eta}}} < \infty\},$$

که در آن برای $1 \leq p < \infty$

$$||v||_{L^p_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)} = \left(\int_{-1}^{1} |v(t)|^p \omega^{\gamma,\eta}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (5.2)$$

برای $p = \infty$ ، داریم

$$||v||_{L^\infty_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)} = ess \sup_{t\in I} |v(t)|.$$

تعریف **۶.۲**. مجموعه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی $\{\mathcal{J}_n^{\gamma,\eta}(t)\}_{n=0}^{\infty}$ یک فضای $L^2_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)$–متعامد کامل را تشکیل می‌دهند که ضرب داخلی در این فضا به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(\Psi,\Phi)_{L^2_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)} = \int_{-1}^{1} \Psi(t)\Phi(t)\omega^{\gamma,\eta}(t)dt, \quad \Psi,\Phi \in L^2_{\omega^{\gamma,\eta}}(I).$$

تعریف **۷.۲**. نقاط ژاکوبی–گاوس $\{s_j^{\gamma,\eta}\}_{j=0}^{N}$ و وزن‌های متناظر $\{\omega_j^{\gamma,\eta}\}_{j=0}^{N}$ را برای یک عدد صحیح مثبت N در نظر بگیریم. فرمول تقریبی انتگرال ژاکوبی–گاوس به‌صورت زیر است

$$\int_{-1}^{1} \Psi(t)\omega^{\gamma,\eta}(t)dt \simeq \sum_{j=0}^{N} \Psi(s_j^{\gamma,\eta})\omega_j^{\gamma,\eta}. \qquad (6.2)$$

تعریف **۸.۲**. چندجمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ $I_N^{\gamma,\eta}\Psi \in \mathcal{P}_N$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_N^{\gamma,\eta}\Psi(t) = \sum_{j=0}^{N} \Psi(s_j^{\gamma,\eta})L_j(t), \qquad (7.2)$$

که در آن $L_j(t), j = 0,1,\dots,N$ و $\{s_j^{\gamma,\eta}\}_{j=0}^{N}$ توابع پایه‌ای درون‌یاب لاگرانژ و نقاط متناظر آن‌ها هستند و $\mathcal{P}_N$ فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه N است. این توابع در رابطه $I_N^{\gamma,\eta}\Psi(s_j^{\gamma,\eta}) = \Psi(s_j^{\gamma,\eta}), 0 \leq j \leq N$ صدق می‌کنند.

تعریف **۹.۲**. فضای سوبولوف $H^m(I)$ که $m \in \mathbb{N}$، فضای تمام توابع $\Phi \in L^2(I)$ است به‌طوری‌که مشتقات آن‌ها تا مرتبه m وجود دارند و این مشتقات در فضای $L^2(I)$ هستند

$$H^m(I) = \left\{\Phi : \Phi^{(k)} \in L^2(I), \ \ k = 0,1,\dots,m\right\}. \qquad (8.2)$$

نرم و شبه‌نرم در این فضا به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$||\Phi||_{m,I} = \left(\sum_{k=0}^{m} ||\Phi^{(k)}(\cdot)||^2_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}}, \ |\Phi|_{m,I} = ||\Phi^{(m)}(\cdot)||_{L^2(I)}. \qquad (9.2)$$

تعریف ۱۰.۲. فضای $H^m(I)$ یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود، هرگاه مجهز به ضرب داخلی زیر باشد:

$$(\Psi, \Phi)_{m,I} = \sum_{j=0}^{m} \int_I \Psi^{(j)}(t)\Phi^{(j)}(t)dt. \tag{۱۰.۲}$$

فضای سوبولوف ژاکوبی وزن‌دار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^{m,N}_{\omega^{\gamma,\eta}}(I) := \left\{\Psi : \Psi^{(p)}(\cdot) \in L^2_{\omega^{\gamma+p,\alpha+p}}(I),\ p = 0, 1, \ldots, m\right\},\ m \in \mathbb{N}, \tag{۱۱.۲}$$

و نرم آن عبارت است از

$$|\Psi|_{H^{m,N}_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)} = \left(\sum_{i=min(m,N+1)}^{m} \parallel \Psi^{(i)} \parallel^2_{L^2_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{۱۲.۲}$$

۳ روش شبه‌طیفی ژاکوبی برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری

معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری زیر را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} {}^C_0D^\gamma_t\Psi(t) = q_1(t)\Psi(t) + q_2(t)\Psi(t-\mu) + \lambda_1\int_0^t K_1(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau + \lambda_2\int_{t-\mu}^t K_2(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau \\ \qquad\qquad +f(t),\ \ 0 \le t \le T, \\ \Psi(t) = \chi(t), \quad -\mu \le t \le 0, \end{cases} \tag{۱.۳}$$

که در آن f، $q_1(t)$، $q_2(t)$ و توابع هسته $K_i, i = 1, 2$ توابعی معلوم‌اند، $\chi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ تابع تأخیر است که به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است، $\Psi : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ تابع مجهول، $0 < \gamma \le 1$، $(\lambda_1, \lambda_2) \ne (0, 0)$ و $0 < \mu < T$ یک پارامتر تأخیر معین است. ابتدا، (۱.۳) را با جایگزینی تابع تأخیر به شکل معادل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} {}^C_0D^\gamma_t\Psi(t) = \begin{cases} q_1(t)\Psi(t) + q_2(t)\chi(t-\mu) + \lambda_1\int_0^t K_1(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau \\ \qquad +\lambda_2\int_{t-\mu}^0 K_2(t,\tau)\chi(\tau)d\tau + \lambda_2\int_0^t K_2(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau + f(t),\ \ 0 \le t \le \mu, \\ q_1(t)\Psi(q) + q_2(t)\Psi(t-\mu) + \lambda_1\int_0^t K_1(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau \\ \qquad +\lambda_2\int_{t-\mu}^t K_2(t,\tau)\Psi(\tau)d\tau + f(t),\ \ \mu < t \le T, \end{cases} \\ \Psi(0) = \chi(0). \end{cases} \tag{۲.۳}$$

برای استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، تغییر متغیرهای زیر را به‌کار می‌گیریم

$$t = \frac{T}{2}(1+z), \quad z = \frac{2t}{T} - 1, \quad \tau = \frac{T}{2}(1+\vartheta), \quad \vartheta = \frac{2\tau}{T} - 1. \tag{۳.۳}$$

تعریف می‌کنیم $U(z) = \Psi(\frac{T}{2}(1+z))$. بنابراین، $U(z-\bar{\mu}-1) = \Psi(t-\mu)$. همچنین

$$\begin{cases} \bar{q}_1(z) = q_1(\frac{T}{2}(1+z)),\ \ \bar{q}_2(z) = q_2(\frac{T}{2}(1+z)),\ \ \bar{\chi}(z-\bar{\mu}) = \chi(t-\mu) = \chi(\frac{T}{2}(z-\bar{\mu})), \\ \bar{K}_1(z,\vartheta) = K_1\left(\dfrac{T}{2}(1+z), \dfrac{T}{2}(1+\vartheta)\right),\ \ \bar{K}_2(z,\vartheta) = K_2\left(\dfrac{T}{2}(1+z), \dfrac{T}{2}(1+\vartheta)\right), \\ \bar{f}(z) = f(\frac{T}{2}(1+z)). \end{cases} \tag{۴.۳}$$

حال می‌توانیم سیستم (۲.۳) را با استفاده از روابط (۲.۳)، (۳.۳)، (۴.۳) و رابطه $ {}^{C}_{\circ}D^{\gamma}_{t}\Psi(t) = \left(\frac{۲}{T}\right)^{\gamma} {}^{C}_{-۱}D^{\gamma}_{z}U(z)$ که $z \in [-۱, ۱]$ به سیستم معادل زیر تبدیل کنیم. (فرض کنیم $V(z) = {}^{C}_{-۱}D^{\gamma}_{z}U(z)$)

$$\begin{cases} V(z) = \begin{cases} \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۱(z)U(z) + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۲(z)\bar{\chi}(z-\bar{\mu}) + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۱ \int_{-۱}^{z} \bar{K}_۱(z,\vartheta)U(\vartheta)d\vartheta \\ \quad + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۲ \int_{-۱}^{z} \bar{K}_۲(z,\vartheta)U(\vartheta)d\vartheta + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \hat{f}(z), \quad -۱ \leq z \leq \bar{\mu}, \\ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۱(z)U(z) + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۲(z)U(z-\bar{\mu}-۱) + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۱ \int_{-۱}^{z} \bar{K}_۱(z,\vartheta)U(\vartheta)d\vartheta \\ \quad + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۲ \int_{-۱}^{z-\bar{\mu}-۱} \bar{K}_۲(z,\vartheta)U(\vartheta)d\vartheta + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{f}(z), \quad \bar{\mu} < z \leq ۱, \end{cases} \\ U(z) = \frac{۱}{\Gamma(\gamma)} \int_{-۱}^{z} (z-\vartheta)^{\gamma-۱} V(\vartheta)d\vartheta + \bar{\chi}(-۱), \end{cases} \tag{۵.۳}$$

که در آن $\hat{f}(z) = \left(\frac{T}{۲}\right) \lambda_۲ \int_{z-\bar{\mu}-۱}^{-۱} \bar{K}_۲(z,\vartheta)\bar{\chi}(\vartheta)d\vartheta + \bar{f}(t)$. از تغییر متغیرهای $\vartheta_۱(z,s) = \frac{۱+z}{۲}s + \frac{z-۱}{۲}$ و $\vartheta(z,s) = \frac{\bar{\mu}+۱}{۲}s + \frac{۲z-\bar{\mu}-۱}{۲}$، استفاده می‌کنیم تا کران‌های انتگرال‌های فوق را به بازه $[-۱, ۱]$ انتقال دهیم و انتگرال‌ها را در (۵.۳) با استفاده از فرمول ژاکوبی–گاوس تقریب بزنیم. بنابراین، داریم

$$\begin{cases} V(z) = \begin{cases} \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۱(z)U(z) + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۲(z)\bar{\chi}(z-\bar{\mu}) \\ \quad + \left(\frac{z+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۱ \int_{-۱}^{۱} \bar{K}_۱\left(z,\vartheta_۱(z,s)\right)U\left(\vartheta_۱(z,s)\right)ds \\ \quad + \left(\frac{z+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۲ \int_{-۱}^{۱} \bar{K}_۲\left(z,\vartheta_۱(z,s)\right)U\left(\vartheta_۱(z,s)\right)ds \\ \quad + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \hat{f}(z), \quad -۱ \leq z \leq \bar{\mu}, \\ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۱(z)U(z) + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{q}_۲(z)U(z-\bar{\mu}-۱) \\ \quad + \left(\frac{z+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۱ \int_{-۱}^{۱} \bar{K}_۱\left(z,\vartheta_۱(z,s)\right)U\left(\vartheta_۱(z,s)\right)ds \\ \quad + \left(\frac{\bar{\mu}+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} \lambda_۲ \int_{-۱}^{۱} \bar{K}_۲\left(z,\vartheta(z,s)\right)U\left(\vartheta(z,s)\right)ds \\ \quad + \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} \bar{f}(z), \quad \bar{\mu} < z \leq ۱, \end{cases} \\ U(z) = \frac{۱}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{۱+z}{۲}\right)^{\gamma} \int_{-۱}^{۱} (۱-s)^{\gamma-۱} V\left(\vartheta_۱(z,s)\right)ds + \bar{\chi}(-۱), \end{cases} \tag{۶.۳}$$

فرض کنیم $\beta = ۱ - \gamma$. نقاط هم‌محلی $\{z_i^{-\beta,-\beta}\}_{i=\circ}^{N}$ و وزن‌های $\omega^{-\beta,-\beta}$ را به‌صورت نقاط ژاکوبی–گاوس و توابع وزن متناظر در نظر بگیریم. تعریف می‌کنیم

$$U_i = U_N(z_i^{-\beta,-\beta}), \quad V_i = V_N(z_i^{-\beta,-\beta}), \quad U_N(z) = \sum_{j=\circ}^{N} U_j L_j(z), \quad V_N(z) = \sum_{j=\circ}^{N} V_j L_j(z). \tag{۷.۳}$$

در نتیجه

$$U_N(z-\bar{\mu}-۱)=\sum_{j=۰}^{N} U_j L_j(z-\bar{\mu}-۱). \tag{۸.۳}$$

حال با کمک روابط فوق و با استفاده از فرمول‌های انتگرال ژاکوبی-گاوس به دستگاه معادلات جبری خطی زیر دست می‌یابیم
(۹.۳)

$$\begin{cases} V_i=\begin{cases} \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma}\bar{q}_۱(z_i^{-\beta,-\beta})U_i+\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma}\bar{q}_۲(z_i^{-\beta,-\beta})\bar{\chi}(z_i^{-\beta,-\beta}-\bar{\mu}) \\ \quad +\left(\frac{z_i^{-\beta,-\beta}+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\alpha+۱}\sum_{j=۰}^{N}u_j\sum_{k=۰}^{N}\Big(\lambda_۱\bar{K}_۱\left(z_i^{-\beta,-\beta},\vartheta_۱(z_i^{-\beta,-\beta},s_k)\right) \\ \quad\quad +\lambda_۲\bar{K}_۲\left(z_i^{-\beta,-\beta},\vartheta_۱(z_i^{-\beta,-\beta},s_k)\right)\Big)L_j\left(\vartheta_۱(z_i^{-\beta,-\beta},s_k)\right)\omega_k^{۰,۰} \\ \quad\quad\quad +\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma}\hat{f}(z_i^{-\beta,-\beta}),\ \ i=۱,۲,\dots,l_{\bar{\mu}}, \\ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma}\bar{q}_۱(z_i^{-\beta,-\beta})U_i+\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma}\bar{q}_۲(z_i^{-\beta,-\beta})\sum_{j=۰}^{N}U_jL_j(z_i^{-\beta,-\beta}-\bar{\mu}-۱) \\ \quad +\left(\frac{z_i^{-\beta,-\beta}+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱}\lambda_۱ \\ \quad\quad \cdot\sum_{j=۰}^{N}U_j\sum_{k=۰}^{N}\bar{K}_۱\left(z_i^{-\beta,-\beta},\vartheta_۱(z_i^{-\beta,-\beta},s_k)\right)L_j\left(\vartheta_۱(z_i^{-\beta,-\beta},s_k)\right)\omega_k^{۰,۰} \\ \quad\quad\quad +\left(\frac{\bar{\mu}+۱}{۲}\right)\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱}\lambda_۲ \\ \quad\quad\quad\quad \cdot\sum_{j=۰}^{N}U_j\sum_{k=۰}^{N}\bar{K}_۲\left(z_i^{-\beta,-\beta},\vartheta_۲\left(z_i^{-\beta,-\beta},s_k\right)\right)L_j\left(\vartheta_۲\left(z_i^{-\beta,-\beta},s_k\right)\right)\omega_k^{۰,۰} \\ \quad\quad\quad\quad\quad +\left(\frac{T}{۲}\right)^{\alpha}\bar{f}(z_i^{-\beta,-\beta}),\ \ i=l_{\bar{\mu}}+۱,\dots,N, \end{cases} \\ U_i=\frac{۱}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{z_i^{-\beta,-\beta}+۱}{۲}\right)^{\gamma}\sum_{k=۰}^{N}\sum_{j=۰}^{N}V_jL_j\left(\vartheta_۱(z_i^{-\beta,-\beta},\hat{s}_k)\right)\omega_k^{-\beta,۰}+\bar{\chi}(-۱),\ \ i=۱,۲,\dots,N, \end{cases}$$

که در آن $\{\omega_k^{۰,۰}\}_{k=۰}^{N}$ و $\{\omega_k^{-\beta,۰}\}_{k=۰}^{N}$ به‌ترتیب، توابع وزن متناظر با نقاط ژاکوبی-گاوس $\{s_k\}_{k=۰}^{N}$ و $\{\hat{s}_k\}_{k=۰}^{N}$ و $(U_۰,U_۱,\dots,U_N)$ و $(V_۰,V_۱,\dots,V_N)$ پارامترهای مجهول مسئله‌اند. اندیس $l_{\bar{\mu}}$ نیز در رابطه $z_{l_{\bar{\mu}}}\leq\bar{\mu}<z_{l_{\bar{\mu}}+۱}<T$ صدق می‌کند. با حل (۹.۳)، می‌توانیم یک جواب تقریبی برای (۱.۳) و مشتق کسری آن به‌صورت هم‌زمان به‌دست آوریم.

۴ همگرایی و تحلیل خطا در فضای $L^۲_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$

در این بخش، همگرایی روش پیشنهادی را در فضای $L^۲_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)$ با ارائه چندین لم مفید اثبات خواهیم کرد.

۱.۴ چندین لم مفید

لم ۱.۴. ([۳، ۱۹]) $\Psi\in H^{m,N}_{L^۲_{\omega^{-\alpha,-\alpha}}(I)}$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم که $I_N^{-\alpha,-\alpha}\Psi$ چندجمله‌ای درون‌یاب Ψ مربوط به $(N+۱)$ نقطه ژاکوبی-گاوس $\{x_j\}_{j=۰}^{N}$ را نشان می‌دهد، یعنی $I_N^{-\alpha,-\alpha}\Psi(x)=\sum_{j=۰}^{N}\Psi(x_j)L_j(x)$. در این‌صورت، روابط زیر برقرار هستند

$$||I_N^{-\alpha,-\alpha}\Psi-\Psi||_{L^۲_{\omega^{-\alpha,-\alpha}}(I)}\leq c_۲N^{-m}|\Psi|_{H^{m,N}_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)}, \tag{۱.۴}$$

$$||I_N^{-\alpha,-\alpha}\Psi - \Psi||_{L^\infty(I)} \leq \begin{cases} c_۲ N^{۱-\alpha-m}|\Psi|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}}}(I)}, & ۰ \leq \alpha < \frac{۱}{۲}, \\ c_۲ N^{\frac{۱}{۲}-m}\log N|\Psi|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}}}(I)}, & \frac{۱}{۲} \leq \alpha < ۱, \end{cases} \quad (۲.۴)$$

که در آن $\omega^{-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}}$ تابع وزن چبیشف است.

لم ۲.۴. ([۶])(نامساوی گرونوال) $M \geq ۰$ و $۰ < \alpha < ۱$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم Ψ و Φ توابعی انتگرال‌پذیر موضعی نامنفی هستند که روی بازه $[-۱, ۱]$ تعریف شده‌اند و در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\Psi(x) \leq \Phi(x) + M\int_{-۱}^{x}(x-\tau)^{-\alpha}\Psi(\tau)d\tau.$$

در این‌صورت، ثابت $\bar{c}_۳$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\Psi(x) \leq \Phi(x) + \bar{c}_۳ M\int_{-۱}^{x}(x-\tau)^{-\alpha}\Phi(\tau)d\tau, \quad -۱ \leq x < ۱.$$

به‌علاوه اگر تابع انتگرال‌پذیر نامنفی $g(x)$ در رابطه زیر صدق کند

$$g(x) \leq E(x) + M\int_{-۱}^{x} g(s)ds, \quad -۱ < x \leq ۱,$$

که در آن $E(x)$ یک تابع انتگرال‌پذیر است، آن‌گاه ثابت $c_۳$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} ||g||_{L^\infty(-۱,۱)} &\leq c_۳||E||_{L^\infty(-۱,۱)}, \\ ||g||_{L^p_{\omega^{-\gamma,\eta}}(-۱,۱)} &\leq c_۳||E||_{L^p_{\omega^{-\gamma,\eta}}(-۱,۱)}, \quad p \geq ۱. \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

لم ۳.۴. ([۱۲، ۱۳]) فرض کنیم $\zeta \in (۰, ۱)$ و κ یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این‌صورت، یک ثابت $c_{\kappa,\zeta} > ۰$ و یک تابع چندجمله‌ای $\mathcal{F}_N\Psi \in \mathcal{P}_N$ برای هر تابع $\Psi \in C^{\kappa,\zeta}(I)$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$||\Psi - \mathcal{F}_N\Psi||_{L^\infty(I)} \leq c_{\kappa,\zeta}N^{-(\kappa+\zeta)}||\Psi||_{C^{\kappa,\zeta}}, \quad (۴.۴)$$

که در آن $\mathcal{F}_N : C^{\kappa,\zeta}(I) \to \mathcal{P}_N$ یک عمل‌گر خطی و $||\cdot||_{\kappa,\zeta}$ نرم استاندارد در فضای $C^{\kappa,\zeta}(I)$ است.

لم ۴.۴. ([۱۷]) فرض کنیم که تبدیل $\mathcal{M}$ برای یک تابع مفروض $K(\cdot,\cdot)$ و ثابت $\eta \in (۰, ۱)$ به‌ازای هر $\Psi \in C(I)$ با رابطه زیر تعریف شده باشد

$$\mathcal{M}\Psi(x) = \int_{-۱}^{x}(x-\tau)^{-\eta}K(x,\tau)\Psi(\tau)d\tau. \quad (۵.۴)$$

در این‌صورت ثابت $c_۴$ وجود دارد ($c_۴$ ممکن است وابسته به $||K||_{C^{۰,\zeta}}$ و $||K||_{L^\infty(\mathcal{D})}$ باشد که در آن $\mathcal{D} = [-۱, ۱]^۲$)، به‌طوری‌که

$$\frac{|\mathcal{M}\Psi(x') - \mathcal{M}\Psi(x'')|}{|x' - x''|^\zeta} \leq c_۴ \max_{x\in I}|\Psi(x)|,$$

با فرض $۰ < \zeta < ۱ - \eta$، برای هر $x', x'' \in I$ و $x' \neq x''$.
این نتیجه می‌دهد که

$$\| \mathcal{M}\Psi \|_{C^{۰,\zeta}} \leq c_۴ \max_{x\in I}|\Psi(x)|, \quad ۰ < \zeta < ۱ - \eta.$$

لم ۵.۴. ([۸]) فرض کنیم $c_۴$ یک ثابت باشد و $L_j(t)$ برای $j = ۰, ۱, \dots, N$ و $\{x_j\}_{j=۰}^{N}$ به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های پایه‌ای درون‌یاب لاگرانژ و نقاط ژاکوبی-گاوس متناظر باشند. در این‌صورت، رابطه زیر را برای هر تابع کراندار $\Psi(\cdot)$ داریم

$$\sup_N \| \sum_{j=۰}^{N}\Psi(x_j)L_j(x) \|_{L^۲_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)} \leq c_۴ \max_{x\in I}|\Psi(x)|,$$

که در آن $c_۴$ ثابتی مستقل از تابع $\Psi(\cdot)$ است.

۲.۴ تحلیل هم‌گرایی

قضیه ۶.۴. فرض کنیم $\bar{q}_1(z) = q_1$ یک تابع ثابت باشد و به‌علاوه $U(\cdot)$ جواب هموار و دقیق معادله (۵.۳) باشد. همچنین فرض کنیم $U_N(\cdot)$ و $V_N(\cdot)$ جواب‌های تقریبی حاصل از حل سیستم (۹.۳) و متناظر رابطه (۷.۳) باشند. اگر $U \in H^{m+1}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)$، $0 < \gamma < 1$ و $\beta = 1 - \gamma$، آن‌گاه

$$||E_N(\cdot)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq \begin{cases} A'_N||U||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + B'_N|V|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)} + C'_N|U|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & \frac{1}{2} \leq \gamma < 1, \\ D'_N||U||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + F'_N|V|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)} + M'_N|U|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{۶.۴}$$

$$||e_N(\cdot)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq \begin{cases} G'_N||U||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + H'_N|V|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)} + K'_N|U|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & \frac{1}{2} \leq \gamma < 1, \\ Q'_N||U||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + R'_N|V|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)} + S'_N|U|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{۷.۴}$$

که در آن

$$K_1^* = \max_{z\in[-1,1]} |K_1(z,\vartheta_1(z,s))|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, \tag{۸.۴}$$

$$K_2^* = \max\left\{\max_{z\in[-1,1]} |K_2(z,\vartheta_1(z,s))|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, \max_{z\in[-1,1]} |K_2(z,\vartheta_2(z,s))|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}\right\}, \tag{۹.۴}$$

$$E_N(z) = V_N(z) - V(z), \quad e_N(z) = U_N(z) - U(z), \tag{۱۰.۴}$$

$$\begin{aligned} A'_N = \Bigg[& c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) \\ & + \left(\frac{c_1c_4\bar{c}c_{0,\varsigma}N^{\gamma-\frac{1}{2}-m-\rho}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)}K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}K_2^*\right)}{A_{1N}}\right) \\ & \cdot\Bigg(c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) \\ & + c_2N^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) \\ & + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\Bigg)\Bigg] \cdot \frac{1}{A_{3N}}, \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

$$\begin{aligned} B'_N = \Bigg[& c_2N^{-m} + \Bigg(c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) \\ & + c_2N^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) \\ & + \left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg) \end{aligned}$$

$$\cdot\left(\frac{c_2c_4\bar{c}c_{0,\rho}N^{\gamma-m-\zeta}}{A_{1N}}\right)\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{3N}},\tag{۱۲.۴}$$

$$\begin{aligned}
C'_N=\Bigg[&c_1c_2c_4N^{-2m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_2c_2N^{-1-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_2N^{-m}\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)+2\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+\Bigg(c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_2N^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\Bigg)\\
&\cdot c'_N\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{3N}},
\end{aligned}\tag{۱۳.۴}$$

$$\begin{aligned}
D'_N=\Bigg[&c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+\left(\frac{c_1c_4\bar{c}c_{0,\zeta}N^{-m-\zeta}\log N\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)}K_1^*+||\lambda_2||_{L^\infty(I)}K_2^*\right)}{A_{2N}}\right)\\
&\cdot\Bigg(c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_2N^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\Bigg)\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{3N}},
\end{aligned}\tag{۱۴.۴}$$

$$\begin{aligned}
F'_N=\Bigg[&c_2N^{-m}+\Bigg(c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_2N^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\cdot\left(\frac{c_2c_4\bar{c}c_{0,\zeta}N^{\frac{1}{2}-m-\zeta}\log N}{A_{2N}}\right)\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{2N}}, \tag{۱۵.۴}$$

$$\begin{aligned}
M'_N=\Bigg[&c_1c_2c_4N^{-2m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+c_2c_2N^{-1-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\quad+c_2N^{-m}\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)+2\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\quad\quad+\Bigg(c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\quad\quad\quad+c_2N^{-1}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\quad\quad\quad\quad+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\Bigg)\\
&\quad\quad\quad\quad\cdot m'_N\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{3N}},
\end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

$$\begin{aligned}
G'_N=\Bigg[&c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)(1+A'_N)\\
&+\left(\frac{c_1c_4\bar{c}c_{0,\zeta}N^{\gamma-\frac{1}{2}-m-\zeta}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)}K_1^*+||\lambda_2||_{L^\infty(I)}K_2^*\right)}{A_{1N}}\right)\\
&\quad\cdot\Bigg(1+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\quad\quad+c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{4N}},
\end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

$$\begin{aligned}
H'_N=\Bigg[&c_2N^{-m}+c_1c_4B'_NN^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+\left(\frac{c_2c_4\bar{c}c_{0,\zeta}N^{\gamma-m-\zeta}}{A_{1N}}\right)\Bigg(1+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\quad+c_1c_4N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+K_2^*||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)\Bigg]\cdot\frac{1}{A_{4N}},
\end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

$$K'_N = \Bigg[c_2 N^{-m}\left(1 + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}\|q\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\left(c_2 N^{-m} + C'_N\right)$$
$$+ \Bigg(1 + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)c'_N\Bigg] \cdot \frac{1}{A_{4N}}, \tag{۱۹.۴}$$

$$Q'_N = \Bigg[c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\left(1 + D'_N\right)$$
$$+ \left(\frac{c_1 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{-m-\zeta}\log N\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^\infty(I)}K_1^* + \|\lambda_2\|_{L^\infty(I)}K_2^*\right)}{A_{2N}}\right)$$
$$\cdot\Bigg(1 + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)\Bigg] \cdot \frac{1}{A_{4N}}, \tag{۲۰.۴}$$

$$R'_N = \Bigg[c_2 N^{-m} + c_1 c_4 F'_N N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ \left(\frac{c_2 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{\frac{1}{2}-m-\zeta}\log N}{A_{2N}}\right)\Bigg(1 + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)\Bigg] \cdot \frac{1}{A_{4N}}, \tag{۲۱.۴}$$

$$S'_N = \Bigg[c_2 N^{-m}\left(1 + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}\|q\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\left(c_2 N^{-m} + M'_N\right)$$
$$+ \Bigg(1 + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$+ c_1 c_4 N^{-m}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}\left(K_1^*\|\lambda_1\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^*\|\lambda_2\|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\Bigg)m'_N\Bigg] \cdot \frac{1}{A_{4N}}, \tag{۲۲.۴}$$

$$
\begin{aligned}
c'_N = & \frac{c_2 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{\gamma-m-\zeta} \left(c_3 \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) + 2\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^\infty(I)} \right)}{A_{1N}} \\
& + \frac{c_2 N^{\gamma-m} \left(c_1 N^{\gamma-\frac{1}{2}-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^*\right) \right)}{A_{1N}} \\
& + \frac{c_2 N^{\gamma-m} \left(c_2 N^{\gamma-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) \right)}{A_{N1}}, \qquad (23.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m'_N = & \frac{c_2 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{\frac{1}{2}-m-\zeta} \log N \left(c_3 \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) + 2\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^\infty(I)} \right)}{A_{2N}} \\
& + \frac{c_2 N^{\frac{1}{2}-m} \left(c_1 N^{-m} \log N \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^*\right) \right)}{A_{2N}} \\
& + \frac{c_2 N^{\frac{1}{2}-m} \left(c_2 N^{\frac{1}{2}-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) \right)}{A_{2N}}, \qquad (24.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{1N} = & 1 - \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^\infty(I)} - c_1 N^{\gamma-\frac{1}{2}-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^*\right) \\
& - c_2 N^{\gamma-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) - c_2 c_4 c_{0,\zeta} N^{\gamma-\frac{1}{2}-m} (c_1 N^{\gamma-\frac{1}{2}-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}) \\
& \cdot \Bigg(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^* + c_2 N^{\gamma-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) \\
& + c_3 \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^\infty(I)} \Bigg), \qquad (25.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{2N} = & 1 - \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^\infty(I)} - c_1 N^{-m} \log N \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^*\right) \\
& \cdot \left(1 + c_2 c_4 c_{0,\zeta} N^{-\zeta} \log N\right) - c_2 N^{\frac{1}{2}-m} \log N \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) \\
& \cdot \left(1 + c_2 c_4 c_{0,\zeta} N^{-\zeta} \log N\right) - c_2 c_4 c_{0,\zeta} N^{-m} \log N \\
& \cdot \left(c_3 \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)}\right) + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^\infty(I)} \right), \qquad (26.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{3N} = & 1 - \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma} ||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} - c_1 c_4 N^{-m} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(K_1^* ||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + K_2^* ||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \right) \\
& - c_2 N^{-1} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \right), \qquad (27.4)
\end{aligned}
$$

$$A_{۴N} = ۱ - \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} ||q||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} - c_{۲}N^{-۱}\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱}\left(||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||\lambda_{۲}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right), \quad (۲۸.۴)$$

که در این روابط $c_{۱} - c_{۴}$ و $c_{۰,\zeta}$ ثابت‌هایی مستقل از N هستند، اما به کران توابع $K_{۱}(z,\vartheta)$ و $K_{۲}(z,\vartheta)$ وابسته‌اند.

اثبات. با تعمیم نامساوی مثلثی و بر اساس لم ۲.۴، از روابط (۵۷) و (۵۸) در [۱۰] نتیجه می‌شود که:

$$||E_N(\cdot)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq \max\{M_{۱}, M_{۲}\}, \quad (۲۹.۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
M_{۱} = &\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} ||q||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\left(||E_N(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۵}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۹}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+ c_{۳}\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\left(||J_{۵}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۹}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+ c_{۳}\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۲}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\left(||J_{۵}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۹}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۱}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۲}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۲}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۴}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} ||q||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۵}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \qquad (۳۰.۴)\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۶}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۲}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۷}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{۲} = &\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} ||q||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\left(||E_N(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۵}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۹}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+ c_{۳}\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\left(||J_{۵}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۹}(\vartheta)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+ c_{۳}\left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۲}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\left(||J_{۵}(\vartheta(z,\theta))||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۹}(\vartheta(z,\theta))||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۱}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۲}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۳}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_{۴}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma} ||q||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۵}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \qquad (۳۱.۴)\\
&+ \left(\frac{T}{۲}\right)^{\gamma+۱} ||\lambda_{۱}||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_{۶}(z)||_{L^{۲}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_8(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}, \tag{۳۲.۴}$$

و

$$||e_N(\cdot)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq ||E_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_5(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_9(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}, \tag{۳۳.۴}$$

که در آن $J_i(z)$ برای $i = 1, 2, \ldots, 9$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_1(z) = \sum_{j=0}^{N} I_{j,1} L_i(z), \tag{۳۴.۴}$$

$$J_2(z) = \sum_{j=0}^{N} I_{j,2} L_j(z), \tag{۳۵.۴}$$

$$J_3(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\bar{\mu}+1}{z_j+1} I_{j,3} L_j(z), \tag{۳۶.۴}$$

$$J_4(z) = I_N^{-\beta,-\beta} V(z) - V(z), \tag{۳۷.۴}$$

$$J_5(z) = I_N^{-\beta,-\beta} U(z) - U(z), \tag{۳۸.۴}$$

$$J_6(z) = I_N^{-\beta,-\beta}\left(\int_{-1}^{z} \bar{K}_1(z,\vartheta) e_N(\vartheta) d\vartheta\right) - \int_{-1}^{z} \bar{K}_1(z,\vartheta) e_N(\vartheta) d\vartheta, \tag{۳۹.۴}$$

$$J_7(z) = I_N^{-\beta,-\beta}\left(\int_{-1}^{z} \bar{K}_2(z,\vartheta) e_N(\vartheta) d\vartheta\right) - \int_{-1}^{z} \bar{K}_2(z,\vartheta) e_N(\vartheta) d\vartheta, \tag{۴۰.۴}$$

$$J_8(z) = I_N^{-\beta,-\beta}\left(\frac{\bar{\mu}+1}{z+1}\int_{-1}^{z} \bar{K}_2(z,\vartheta(z,\theta)) e_N(\vartheta(s,\theta)) d\theta\right) - \frac{\bar{\mu}+1}{z+1}\int_{-1}^{z} \bar{K}_2(z,\vartheta(z,\theta)) e_N(\vartheta(z,\theta)) d\theta, \tag{۴۱.۴}$$

$$J_9(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(I_N^{-\beta,-\beta}\int_{-1}^{z}(z-\vartheta)^{-\beta} E_N(\vartheta) d\vartheta - \int_{-1}^{z}(z-\vartheta)^{-\beta} E_N(\vartheta) d\vartheta\right). \tag{۴۲.۴}$$

در این‌صورت داریم

$$||E_N(\cdot)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq \max\{\bar{M}_1, \bar{M}_2\}, \tag{۴۳.۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\bar{M}_1 = \frac{1}{1-\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}}\Bigg(&\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_1(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_2(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + ||J_4(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\\
&+\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + 2\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)\\
&\cdot||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} + \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_6(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_7(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&\quad+\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\right)\\
&\quad\cdot||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\Bigg),
\end{aligned}\tag{۴۴.۴}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_2=&\frac{1}{1-\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}}\Bigg(\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_1(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_3(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+||J_4(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&+\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+2\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\right)\\
&\cdot||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_6(z)||_{L^\infty(I)}\\
&+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_8(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&+\left(c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\right)\\
&\cdot||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\Bigg),
\end{aligned}\tag{۴۵.۴}
$$

و

$$
||e_N(\cdot)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\leq\max\{F_1,F_2\},\tag{۴۶.۴}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
F_1=&\frac{1}{1-\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}}\Bigg(\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_1(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_2(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+||J_4(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&+\left(1+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\right)\\
&\cdot||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_6(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}\\
&+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}||J_7(z)||_{L^2_{\omega-\beta,-\beta}(I)}
\end{aligned}\tag{۴۷.۴}
$$

$$+\left(1+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right) \tag{۴۸.۴}$$

$$\cdot||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\Bigg), \tag{۴۹.۴}$$

$$F_2=\frac{1}{1-\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}}\Bigg(\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_1(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_3(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||J_4(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+\left(1+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}||q||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$\cdot||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_6(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}||J_8(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+\left(1+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_1||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+c_3\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1}||\lambda_2||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\right)$$
$$\cdot||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\Bigg). \tag{۵۰.۴}$$

با استفاده از لم ۵.۴، معادلات (۳۴.۴)-(۳۶.۴)، رابطه (۵۳) در [۱۰] و رابطه (۵.۵.۲۹) در [۳] برای یک ثابت c_1 داریم

$$||J_1(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_4\max_{-1\le z\le 1}|I_{j,1}|\le c_1c_4N^{-m}\max_{[-1,1]}|\bar{K}_1(z,\vartheta)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}}(||U||_{L^2(I)}+||E_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}), \tag{۵۱.۴}$$
$$||J_2(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_4\max_{1\le z\le 1}|I_{j,2}|\le c_1c_4N^{-m}\max_{[-1,1]}|\bar{K}_2(z,\vartheta)|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}}(||U||_{L^2(I)}+||E_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}), \tag{۵۲.۴}$$
$$||J_3(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_4\max_{0\le j\le N}|I_{j,3}|\le c_1c_4N^{-m}\max_{[-1,1]}|\bar{K}_2(z,\vartheta(z,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}}(||U||_{L^2(I)}+||E_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}$$
$$+||J_5(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}+||J_9(\vartheta)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}). \tag{۵۳.۴}$$

همچنین با استفاده از لم ۱.۴ داریم

$$||J_4(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_2N^{-m}|V|_{H^{m,N}_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)},$$
$$||J_5(z)||_{L^\infty(I)}\le c_2N^{-m}|U|_{H^{m,N}_{\omega^{\gamma,\eta}}(I)}. \tag{۵۴.۴}$$

به‌علاوه از لم ۱.۴ و (۳۹.۴)-(۴۱.۴) با $m=1$ داریم

$$||J_6(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_2N^{-1}|\int_{-1}^{x}\bar{K}_1(z,\vartheta)e_N(\vartheta)d\vartheta|_{H^{1,N}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_2N^{-1}||e_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)},$$
$$||J_7(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_2N^{-1}|\int_{-1}^{x}\bar{K}_2(z,\vartheta)e_N(\vartheta)d\vartheta|_{H^{1,N}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}\le c_2N^{-1}||e_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)},$$

$$||J_8(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq c_2 N^{-1} \Big| \int_{-1}^{x} \bar{K}_2(z,\vartheta(z,\theta)) e_N(\vartheta(z,\theta)) d\theta \Big|_{H^{1,N}_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq c_2 N^{-1} ||e_N(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)}. \tag{۵۵.۴}$$

از این‌رو، از لم‌های ۱.۴، ۳.۴ و ۴.۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} ||J_9(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} &= \Big|\Big| \left(I_N^{-\beta,-\beta} - 1\right) \mathcal{M}E_N(z) \Big|\Big|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \\ &= \Big|\Big| \left(I_N^{-\beta,-\beta} - 1\right) \left(\mathcal{M}E_N(z) - \mathcal{F}_N \mathcal{M}E_N(z)\right) \Big|\Big|_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \\ &\leq ||I_N^{-\beta,-\beta}(\mathcal{M}E_N(z) - \mathcal{F}\mathcal{M}E_N(z))||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \\ &\qquad + ||(\mathcal{M}E_N(z) - \mathcal{F}\mathcal{M}E_N(z))||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \\ &\leq \bar{c} ||\mathcal{M}E_N(z) - \mathcal{F}_N \mathcal{M}E_N(z)||_{L^\infty(I)} \\ &\leq \bar{c} c_{0,\zeta} N^{-\zeta} ||\mathcal{M}E_N(z)||_{C^{0,\zeta}} \\ &\leq c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{-\zeta} ||E_N(z)||_{L^\infty(I)}, \end{aligned} \tag{۵۶.۴}$$

که در آن c_4، $\bar{c}$ و $c_{0,\zeta}$ ثابت‌هایی مستقل از N هستند و کران $||E_N(z)||_{L^\infty(I)}$ در [۱۰] محاسبه شده است. با روندی مشابه با اثبات قضیه ۱ در [۱۰] داریم

$$||J_9(z)||_{L^2_{\omega^{-\beta,-\beta}}(I)} \leq \begin{cases} a'_N ||U||_{L^2(I)} + b'_N |V|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)} + c'_N |U|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & \frac{1}{2} \leq \gamma < 1, \\ d'_N ||U||_{L^2(I)} + f'_N |V|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)} + m'_N |U|_{H^{m,N}_{\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}}(I)}, & 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{۵۷.۴}$$

که در آن c'_N، m'_N، A_{1N} و A_{2N} به‌ترتیب توسط (۲۳.۴)، (۲۴.۴)، (۲۵.۴) و (۲۶.۴) تعریف شده‌اند و

$$\begin{aligned} a'_N &= \frac{c_1 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{\gamma - \frac{1}{2} - m - \zeta} \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^*\right)}{A_{1N}}, \\ b'_N &= \frac{c_2 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{\gamma - m - \zeta}}{A_{1N}}, \\ d'_N &= \frac{c_1 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{-m-\zeta} \log N \left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma+1} \left(||\lambda_1||_{L^\infty(I)} K_1^* + ||\lambda_2||_{L^\infty(I)} K_2^*\right)}{A_{2N}}, \\ f'_N &= \frac{c_2 c_4 \bar{c} c_{0,\zeta} N^{\frac{1}{2} - m - \zeta} \log N}{A_{2N}}. \end{aligned}$$

در اینجا، اگر $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ آن‌گاه فرض می‌کنیم $1 - \beta < \zeta < 1 - \beta - \frac{1}{2}$. به‌علاوه اگر $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ فرض می‌کنیم $0 < \zeta < 1 - \beta$. اثبات با استفاده از (۵۱.۴)–(۵۵.۴) و (۵۷.۴) کامل می‌شود. □

۵ نتیجه گیری و پیش‌نهادها

روش شبه‌طیفی ژاکوبی یک روش کارا برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل کسری تأخیری است. هم‌گرایی این روش در فضای $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$ با به‌کارگیری شرایطی خفیف و چندین لم و قضیه اثبات شد و کران‌هایی برای خطای تقریبات به‌دست آوردیم. در کارهای آینده روش پیشنهادی و هم‌گرایی آن را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تأخیری و کسری توسیع خواهیم داد. هم‌چنین، روش را برای مسائل کنترل بهینه تحت معادلات انتگرال–دیفرانسیل تأخیری کسری به‌کار خواهیم برد.

فهرست منابع

[1] K. K. Ali, E. M. Mohamed, K. S. Nisar, M. M. Khashan, M. Zakarya, A collocation approach for multiterm variable-order fractional delay-differential equations using shifted Chebyshev polynomials, Alexandria Engineering Journal. **61** (2022) 3511-3526 .

[2] P. Borisut, P. Kumam, I. Ahmed, K. Sitthithakerngkiet, Nonlinear Caputo fractional derivative with nonlocal riemann-liouville fractional integral condition via fixed point theorems, Symmetry. **11** (2019) 829.

[3] C. Canuto and M. Y. Hussaini and A. Quarteroni and T. A. Zang, Spectral methods: fundamentals in single domains, Springer, 2007.

[4] N. R. Gande, H. Madduri, Higher order numerical schemes for the solution of fractional delay differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics. **402** (2022) 113810.

[5] F. Hartung and M. Pituk, Recent Advances in Delay Differential and Difference Equations, Springer, 2014.

[6] G. Mastroianni, D. Occorsio, Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals. A survey, Journal of computational and applied mathematics. **134** (2001) 325-341.

[7] A. K. Mittal, Error analysis and approximation of Jacobi pseudospectral method for the integer and fractional order integro-differential equation, Applied Numerical Mathematics. **171** (2022) 249-268.

[8] P. Nevai, Mean convergence of Lagrange interpolation. III, Transactions of the American Mathematical Society. (1984) 669-698.

[9] N. Peykrayegan, M. Ghovatmand, M. H. Noori Skandari, On the convergence of Jacobi-Gauss collocation method for linear fractional delay differential equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences. **44** (2021) 2237-2253.

[10] N. Peykrayegan, M. Ghovatmand, M. H. Skandari, An efficient method for linear fractional delay integro-differential equations, Computational and Applied Mathematics. **40** (2021) 1-33.

[11] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, Elsevier, 1998.

[12] D. L. Ragozin, Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces, Transactions of the American Mathematical Society. **150** (1970) 41-53.

[13] D. L. Ragozin, Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces, Transactions of the American Mathematical Society. **162** (1971) 157-170.

[14] S. G. Samko and A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives (Vol. 1), Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[15] K. Saoudi, P. Agarwal, P. Kumam, A. Ghanmi, P. Thounthong, The Nehari manifold for a boundary value problem involving Riemann–Liouville fractional derivative, Advances in Difference Equations. **2018** (2018) 1-18.

[16] S. Shahmorad, M. H. Ostadzad, D. Baleanu, A Tau–like numerical method for solving fractional delay integro–differential equations, Applied Numerical Mathematics. **151** (2020) 322-336.

[17] J. Shen and T. Tang and L. L. Wang, Spectral methods: algorithms, analysis and applications (Vol. 41), Springer Science and Business Media, 2011.

[18] M. I. Syam, M. Sharadga, I. Hashim, A numerical method for solving fractional delay differential equations based on the operational matrix method, Chaos, Solitons and Fractals. **147** (2021) 110977.

[19] Y. Wei, Y. Chen, Convergence analysis of the spectral methods for weakly singular Volterra integro-differential equations with smooth solutions, Advances in Applied Mathematics and Mechanics. **4** (2012) 1-20.

[20] Y. Yang, Y. Chen, Y. Huang, Spectral-collocation method for fractional Fredholm integro-differential equations, Journal of the Korean Mathematical Society. **51** (2014) 203-224.

[21] B. Yuttanan, M. Razzaghi, T. N. Vo, Legendre wavelet method for fractional delay differential equations, Applied Numerical Mathematics. **168** (2021) 127-142.

Convergence analysis of Jacobi pseudospectral method for delay fractional integral-differential equations in $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$ space

Narges Peykrayegan , Mehdi Ghovatmand[†] , Mohammad Hadi Noori Skandari

Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Communicated by: Abdolrahman Razani

Received: 2022/1/9 Accepted: 2023/5/24

Abstract: In recent years, pseudospectral methods have been used for solving many classes of differential and integral equations due to their high accuracy and rate of convergence. In this paper, we present an efficient Jacobi pseudospectral method for solving a class of fractional delay integral-differential equations. Then, by presenting several lemmas and theorems, we investigate the convergence of the method on space $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)$ and identify the error boundaries.

Keywords: Riemann-Liouville and Caputo Fractional Derivatives, Lagrange Interpolation Polynomials, Jacobi-Gauss Points, Fractional Delay Integral-Differential Equation.

©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[†]Corresponding author.
Ghovatmand@shahroodut.ac.ir (M. Ghovatmand)